MIROSŁAW DĄBROWSKI

Pozwólmy dzieciom myśleć!

O UMIEJĘTNOŚCIACH MATEMATYCZNYCH POLSKICH TRZECIOKLASISTÓW

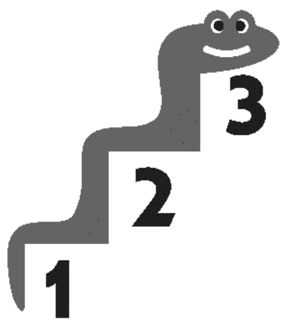
WYDANIE II ZMIENIONE

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CK

EUROPEJSKI
FUNDUSZ
SPOŁECZNY

Mirosław Dąbrowski



Pozwólmy dzieciom myśleć!

O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów

Wydanie II zmienione

Warszawa 2008

Autor książki: Mirosław Dąbrowski
Opracowanie graficzne: Stefan Drobner

Recenzent: dr hab. Dorota Klus-Stańska, prof. UWM
Redaktor językowy: Sylwia Dorcz

Wydawca: Centralna Komisja Egzaminacyjna

Warszawa 2008

ISBN 83-7400-238-7

SPIS TREŚCI

WPROWADZENIE

Pod koniec 2005 r. Centralna Komisja Egzaminacyjna uruchomiła, współfinansowany przez Europejski Fundusz Społeczny, projekt pod tytułem:

Badanie podstawowych umiejętności uczniów trzecich klas szkoły podstawowej.

Celem tego projektu było zebranie informacji na temat rzeczywistego zakresu oraz poziomu opanowania podstawowych umiejętności przez uczniów kończących I etap kształcenia, a także czynników środowiskowych i edukacyjnych, wpływających na te umiejętności.

Na przełomie maja i czerwca 2006 r. w 137 szkołach na terenie całej Polski przeprowadzono serię testów osiągnięć szkolnych, w których uczestniczyło prawie 2500 trzecioklasistów. Uczniowie otrzymali do rozwiązania łącznie siedem zestawów zadań – trzy testy dotyczące umiejętności językowych oraz cztery testy badające umiejętności matematyczne. Pozwoliło to zebrać informacje nie tylko o poziomie poszczególnych badanych umiejętności w skali całego kraju, ale także o bardziej lub mniej typowych sposobach rozumowania uczniów – zarówno w kategorii rozwiązań poprawnych, jak i błędnych.

Pod koniec października 2006 r. w ramach projektu przeprowadzono badanie dodatkowe, którym objęto ponad 400 uczniów klas czwartych – uczestników badania trzecioklasistów sprzed prawie pięciu miesięcy. Jego celem była próba oceny, w jakim stopniu w tym okresie uległy zmianie niektóre ważne matematyczne umiejętności uczniów. Czwartoklasiści otrzymali dwa zestawy zadań matematycznych, wśród których znalazła się część zadań z testów wykorzystanych w badaniu w klasach trzecich. Zadania przedstawiono dzieciom w niezmienionej postaci lub też różniące się od pierwowzoru jedynie wykorzystywanymi liczbami.

W badaniu klas czwartych wzięły udział te szkoły z badania zasadniczego, których dyrektorzy wyrazili na to zgodę – w większości były to szkoły wiejskie. Sposób doboru szkół sprawił, że próba ta nie jest reprezentatywna dla polskiego systemu edukacji, jednak i tak porównanie wyników obu testów dostarcza ciekawego materiału do rozważań.

W niniejszym opracowaniu chcemy zaprezentować wyniki badań i przykłady uczniowskich rozumowań w zakresie kilku podstawowych dla I etapu kształcenia umiejętności matematycznych, np. umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych czy wykonywania obliczeń złożonych.

Analiza tych wyników jest dobrą okazją do refleksji nad stanem polskiej edukacji początkowej oraz panującymi w szkole stereotypami edukacyjnymi.

Mamy nadzieję, że zarówno przedstawione wyniki, jak i towarzyszący im bogaty komentarz metodyczny, zachęcą nauczycieli klas 1–3, oraz nauczycieli matematyki klas 4–6, do refleksji także nad doskonaleniem własnego warsztatu zawodowego.

Więcej informacji na temat badań można znaleźć w raporcie końcowym na stronie www.cke.edu.pl.

STRUKTURA SYSTEMU DZIESIĘTNEGO

Klasy 1–3 w polskiej tradycji edukacyjnej „od zawsze” zdominowane były przez „rachunki” – takie też jest pierwsze skojarzenie większości osób wracających myślami do początków swojej szkolnej edukacji: *Rachunki, rachunki, rachunki*. Wystarczy rzut oka na obowiązującą podstawę programową czy wykorzystywane aktualnie podręczniki, aby przekonać się, że wciąż taka właśnie jest rzeczywistość współczesnej szkoły polskiej.

Z tego powodu ważne jest więc, zwłaszcza z punktu widzenia efektywności procesu kształcenia, dobre zrozumienie przez uczniów systemu dziesiętnego i jego struktury. Zapisywanie, odczytywanie i porównywanie liczb, wykonywanie obliczeń w pamięci oraz pisemnie, posługiwanie się liczbami w życiu codziennym – wszystkie te umiejętności (i wiele innych) budowane są na bazie stopniowo rozwijanej u dzieci wiedzy o systemie dziesiętnym.

Wiedza ta nie jest łatwa ani do zrozumienia, ani stosowania, o czym świadczy także historia.

System dziesiętny został wprowadzony do użytku przez Hindusów w I tysiącleciu naszej ery, a do Europy dotarł, dzięki Arabom, około XIII wieku. Kilka wieków minęło, zanim Europejczycy oswoili się z notacją dziesiętną i zaczęli ją powszechnie stosować. Nasi uczniowie muszą to zrobić w nieporównywalnie krótszym czasie. Z jakim skutkiem?

W testach wykorzystanych do badania umiejętności uczniów klas trzecich znajdowały się dwa zadania wprost nawiązujące do struktury systemu dziesiętnego:

4. W każde okienko wpisz pasującą cyfrę.

a) 1□6 > 178 b) 8□ < □0 c) 1□5 > □42 > 14□

5. W tych liczbach dwucyfrowych zamazano niektóre cyfry.
Tam, gdzie to nadal możliwe, wstaw w okienko znak > albo <.
W pozostałe okienka wstaw znak zapytania.

a) ●7 □ 48 b) 2● □ ●5 c) ●3 □ 11

Pierwsze zadanie jest typowe – do większości okienek pasuje więcej niż jedna cyfra, co także ma wpływ na poziom jego złożoności. Z rozwiązaniem tego zadania uczniowie nie mieli trudności. Kolejne przykłady uzupełniło dobrze odpowiednio: 91,5%, 85,8% oraz 81,8% dzieci (por. diagram 1).

W przypadku tego zadania prawie ¾ uczniów uzupełniło poprawnie wszystkie trzy przykłady (por. diagram 2).

Zadanie 5. ma nietypowy charakter, prawdopodobnie większość badanych uczniów nie rozwiązywała w szkole tego typu zadań. W efekcie dziecko stanęło przed nowym dla siebie wyzwaniem. Nie mogąc odwołać się do pamięci w poszukiwaniu skutecznego sposobu pokonania trudności, musiało ujawnić, na ile potrafi posługiwać się swoją wiedzą z zakresu struktury systemu dziesiętnego oraz na ile wiedza ta ma operacyjny charakter. Zadanie to wypadło zdecydowanie gorzej od poprzedniego – poziom poprawności dla kolejnych przykładów wyniósł: 19,2%, 30,4% i 34,2% (por. diagram 1), a prawie połowa uczniów nie uzupełniła dobrze ani jednego przykładu (por. diagram 2).

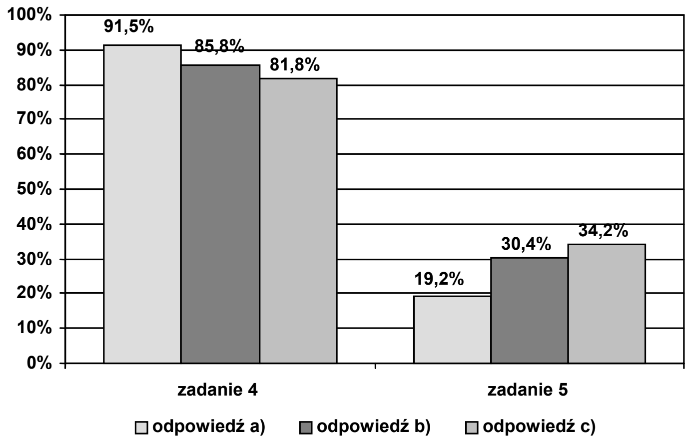


Diagram 1. Porównywanie liczb naturalnych – procent poprawnych rozwiązań.

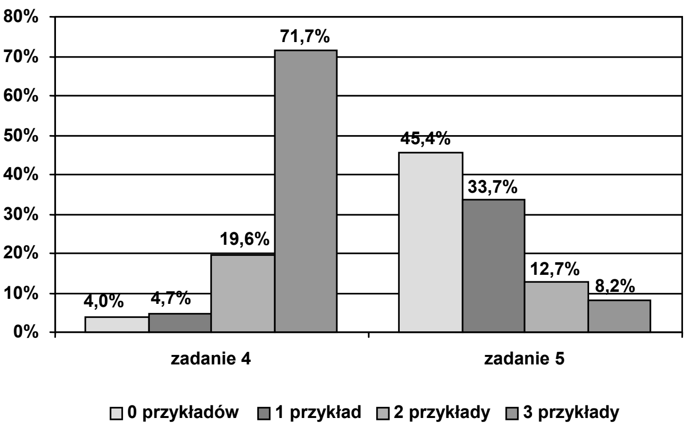
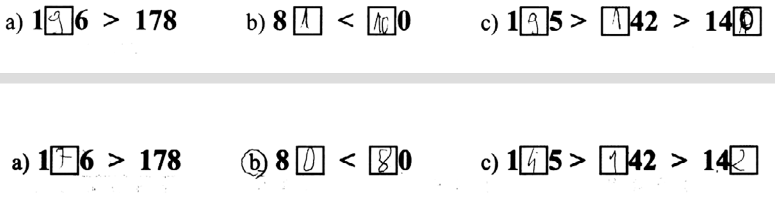
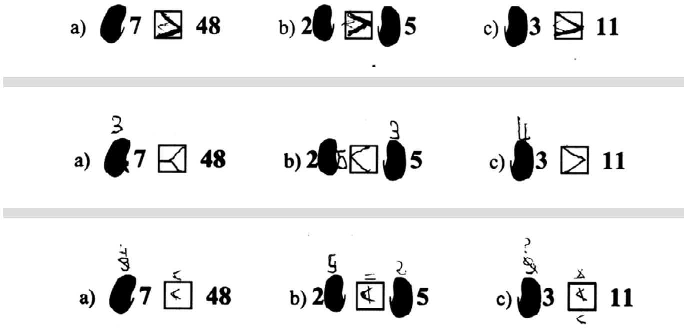


Diagram 2. Porównywanie liczb naturalnych – procent poprawnie uzupełnionych przykładów.

Liczba błędnych rozwiązań zadania 4. była stosunkowo niewielka i należy sądzić, że – przynajmniej w części – błędy te były efektem nieuwagi uczniów:



Dużo więcej ciekawego materiału do analizy dostarczają rozwiązania drugiego z omawianych zadań. Bardzo czytelnie pokazują one, w jaki sposób najczęściej rozumowali uczniowie i jakie przy tym przeżywali rozterki:

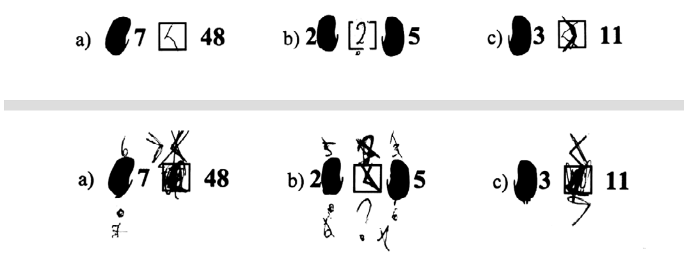


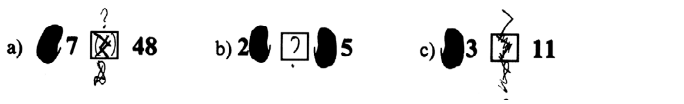
Jak pokazują przykłady, niektórzy uczniowie podstawiali w miejsce kleksa jakąś cyfrę i wpisywali w okienko znak odpowiedni dla otrzymanej konkretnej sytuacji.

W przypadku przykładów **a** i **b** musiało to doprowadzić do błędnych odpowiedzi.

Dziwi jednak słaby wynik w przykładzie **c** (34,2%), w którym ta akurat strategia gwarantuje sukces. Wydaje się, że w tym przypadku większość dzieci skupiła się na widocznej części zapisu liczb, a nie na sensie całości zapisu.

Pozostali uczniowie zdecydowali się prawdopodobnie na kilka prób i wyciągnęli z nich właściwe (w części lub w całości) wnioski:





Zadanie 5. wykorzystane zostało także w testach przeprowadzonych w klasie 4. Wyniki uczniów (tych samych!) były o kilka procent lepsze niż w klasie 3, odpowiednio: 27,2%, 38,1% i 39,5%. Jak widać, w obu przypadkach hierarchia trudności przykładów była analogiczna, a przykład **c** w klasie 4 nadal okazywał się równie trudny jak pozostałe.

W większości stosowanych programów nauczania oraz podręczników rozwijanie umiejętności matematycznych uczniów w klasie 4 rozpoczyna się od szeregu tematów dotyczących właśnie systemu dziesiętnego: zapisywania i odczytywania liczb wielocyfrowych, porównywania ich, znaczenia cyfr w liczbie wielocyfrowej itp. Przytoczone wyniki nasuwają przypuszczenie, że w przypadku znacznej części uczniów nie spowodowało to istotnej zmiany w rozumieniu systemu dziesiętnego w stosunku do stanu z końca klasy 3.

Najpierw sens, potem symbol

Wyodrębnić można dwa typowe sposoby wprowadzania nowych pojęć czy symboli matematycznych[1]:

1) wprowadzamy nowe pojęcie czy symbol matematyczny, odwołując się do innych pojęć i symboli, z którymi uczniowie zapoznali się już wcześniej, po czym szukamy przykładów czy sytuacji życiowych, które pozwolą uczniom zrozumieć sens i przydatność danego pojęcia lub symbolu;

2) zaczynamy od zorganizowania takiej sytuacji i uruchomienia takich działań uczniów, z których wynika sens i użyteczność interesującego nas pojęcia czy symbolu, po czym, gdy „grunt będzie już przygotowany”, wprowadzamy odpowiednią nazwę czy znak.

Warto zwrócić uwagę na to, że oba podejścia składają się dokładnie z tych samych dwóch etapów – nazwijmy je

[1] Zob. H. Freudenthal, *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht 1973.

odpowiednio: *etapem nadawania sensu* i *etapem definiowania* – tyle, że ułożonych w odwrotnej kolejności.

Pierwsze podejście: *najpierw definicja, potem sens* jest w polskiej szkole zdecydowanie bardziej rozpowszechnione, niezależnie od wieku uczniów. Drugie: *najpierw sens, potem nazwa czy symbol*, zgodne ze współczesną wiedzą psychologiczną i pedagogiczną, jest zdecydowanie skuteczniejsze. Jego przydatność jest tym większa, im uczeń jest młodszy, a jego sposób myślenia bardziej konkretny.

Dlaczego więc tak chętnie sięgamy po przekaz werbalny z dużą ilością symboliki? Przecież, w ostatecznym rozrachunku, zarówno jedno, jak i drugie podejście zajmują i tak mniej więcej tyle samo czasu oraz wymagają porównywalnego wysiłku – oczywiście, o ile tylko chcemy, aby nasi uczniowie choć w części zrozumieli to, czego się uczą.

Dziecko, ucząc się, tworzy trzy typy reprezentacji opisujących badany i poznawany świat: *enaktywne*, *ikoniczne* i *symboliczne*[2]. Upraszczając nieco – dziecko może komunikować się z otaczającym światem (z rodzicami, nauczycielem, rówieśnikami, rozwiązywanym zadaniem, ...) na trzech poziomach złożoności języka:

– *enaktywnie*, czyli za pomocą gestów i działania;

– *ikonicznie*, czyli używając rysunków, które oznaczają to, co przedstawiają, więc mogą być zrozumiałe bez żadnych dodatkowych umów i ustaleń;

oraz

– *symbolicznie*, czyli za pośrednictwem obrazków o umownym znaczeniu; ich zrozumienie jest możliwe dopiero wówczas, gdy komunikujące się osoby umówią się, co dokładnie one przedstawiają, jaki jest ich sens.

Dziecko (i zazwyczaj także dorosły), badając i poznając jakiś nowy obszar świata, sięga często po wszystkie trzy typy reprezentacji i to na ogół w takiej właśnie kolejności, jaką podano wyżej – kolejność ta oddaje naturalną złożoność tych trzech sposobów komunikowania się.

Płynie stąd nauka, której wagi nie sposób przecenić: **starajmy się tak organizować proces uczenia się, aby dziecko zaczynało swoje myślenie i działanie, o ile tylko odczuje taką potrzebę, na poziomie enaktywnym oraz ikonicznym po to, aby mogło być aktywne intelektualnie i ze swoich działań mogło wydobywać sens tego, co jest naszym edukacyjnym celem**. Właściwa nazwa czy symbol powinny pojawiać się dopiero wówczas, gdy dziecko wie i rozumie, co będą one oznaczać. Dopiero wtedy jest ono tak

---

[2] Zob. J. Bruner, *Poza dostarczone informacje*, Warszawa, PWN 1978.

naprawdę gotowe zrozumieć i zapamiętać poznawane pojęcie czy symbol – jest gotowe się nim posługiwać.

Na potrzebę, czy nawet konieczność, takiej właśnie chronologii poznawania matematyki i jej języka, od lat zwracają uwagę także wybitni matematycy[3]. Język matematyki – nazwy i symbole – jest tworzony po to, aby ułatwić komunikowanie się, aby pewne informacje można było przekazywać szybciej, prościej(!) i bardziej niezawodnie. Będzie dobrze pełnił swoją funkcję, gdy sens pojęć i symboli będzie w procesie uczenia się poprzedzać ich nazwy. Powtórzmy raz jeszcze: **najpierw sens, potem symbol!**

Po tych bardziej ogólnych refleksjach, do których jeszcze wielokrotnie będziemy nawiązywać, wróćmy do systemu dziesiętnego.

Zobaczyć strukturę na własne oczy

Z systemem dziesiętnym uczeń obcuje od początku do końca swojego kształcenia. Budowanie i pogłębianie jego rozumienia to proces, który trwa całymi latami – po liczbach naturalnych w świadomości ucznia pojawiają się liczby dziesiętne, po liczbach wymiernych – liczby rzeczywiste. Proces ten przebiega dużo płynniej, gdy od początku wiedza dziecka budowana jest na bazie właściwych wizualnych wyobrażeń. Najłatwiej i najlepiej je tworzyć, dając uczniom możliwość operowania dobrze dobranymi modelami.

Jeśli uważnie rozejrzymy się wokół, na pewno dostrzeżemy przedmioty, które mogą pomóc w tworzeniu podwalin wiedzy dzieci na temat systemu dziesiętnego. Jedną z najprostszych pomocy dydaktycznych, a równocześnie sytuacyjnie i merytorycznie najbogatszych, są przezroczyste foliowe woreczki z zamknięciem strunowym oraz żetony.

Gdy mamy przed sobą kilkanaście żetonów, najbezpieczniejszą metodą ich przeliczenia jest oddzielenie dziesięciu z nich. Ta sama strategia postępowania zdaje doskonale egzamin przy przeliczaniu większej liczby przedmiotów – żeby się nie pomylić, warto grupować je po dziesięć.

Teraz już tylko wystarczy włożyć po 10 żetonów do każdego woreczka, zamknąć je – i pomoc gotowa:

[3] Por. np. Rene Thom, *Matematyka „nowoczesna” – pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?* „Wiadomości Matematyczne”, XVIII, 1974.

Sięgając po tę pomoc, warto pamiętać o tym, żeby:

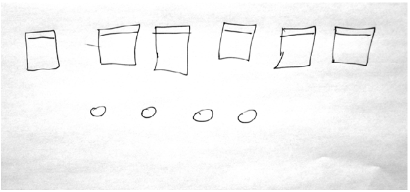
– umówić się z dziećmi, że w woreczku musi być 10 żetonów, nie 8, 9 czy 11, ale zawsze 10; jeśli nie ma ich tylu, to woreczek zostaje pusty;
– wszystkie woreczki i żetony były identyczne: tej samej wielkości i tego samego koloru, w innym przypadku uczniowie szybko zaczną wprowadzać dodatkowe kody, które najprawdopodobniej zmienią i zaburzą charakter pomocy; pamiętajmy o tym, że zwłaszcza kolor jest bardzo silnie oddziałującą cechą przedmiotu.

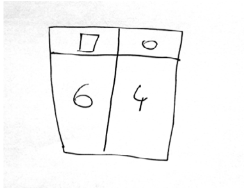
Teraz uczniowie mogą już (prawie) wszystko z zakresu „pierwszej setki”, np. mogą:

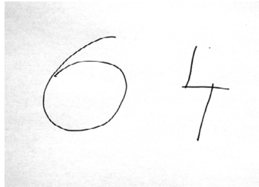
– ustalać, ile jest łącznie żetonów (*cztery woreczki i jeszcze pięć żetonów, to cztery dziesiątki, czyli 40 i jeszcze 5, czyli 45*),
– szybko dobierać odpowiednią liczbę żetonów (*56 – potrzebujemy 5 woreczków i jeszcze 6 żetonów*),
– porównywać ilości(!) żetonów i samodzielnie odkrywać oraz formułować reguły rządzące porównywaniem liczb dwucyfrowych,
– formułować, operując modelem, zadania, zagadki, pytania, problemy związane z systemem dziesiętnym, co uruchamia aktywność intelektualną dzieci i pogłębia rozumienie samego systemu.

Słowo *ilość* jest użyte powyżej świadomie, choć puryści językowi pewnie woleliby w tym miejscu zobaczyć słowo *liczba*. Pamiętajmy jednak, że słowo *ilość* jest naturalnie językowo związane z pytaniem *ile* – gdy zadajemy pytanie zaczynające się od ile, pytamy o ilość pewnych obiektów, a podawana w odpowiedzi *liczba* jest miarą *ilości*, tak samo jak litry są miarą pojemności, a metry długości. Pozwalajmy, aby język ucznia rósł razem z nim.

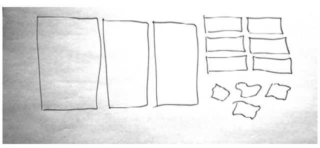
Warto, aby dzieci, operując tym narzędziem mogły przechodzić kolejno przez wszystkie wspomniane wcześniej poziomy komunikowania się: najpierw działanie z pomocą modelu, potem stopniowo coraz bardziej uproszczony rysunek, na końcu zapis symboliczny, także o stopniowo rosnącym poziomie formalizmu. Pozwoli im to świadomie i ze zrozumieniem poszerzać swój matematyczny język:

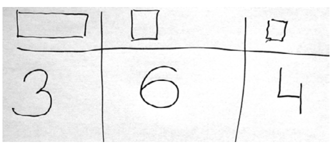


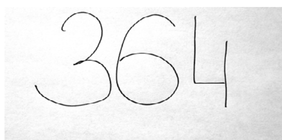




Rozszerzając zakres liczbowy do 1000, stajemy przed wyborem: *Pakować po dziesięć woreczków z żetonami do większych torebek czy poszukać innego modelu?* Na przykład takiego:







Niezależnie od tego, czy naszym celem jest rozwijanie arytmetycznych, czy geometrycznych umiejętności uczniów, warto pamiętać o tym, że im więcej dobrych modeli będą mieli uczniowie w rękach, tym pełniejsze, lepsze i bardziej nośne będą ich intuicje i wyobrażenia.

Modele pokazane powyżej (i inne o podobnie naturalnym charakterze) pozwalają na zobaczenie struktury systemu dziesiętnego na własne oczy, bez żadnych utrudnień czy zakłóceń. Nie zastąpią ich żadne ustne opisy i wyjaśnienia, zabawy kartami czy dziesięciościenną kostką z cyframi od 0 do 9, tabelki lub inne pomoce o symbolicznym charakterze, choć oczywiście mogą one stopniowo pogłębiać i poszerzać wiedzę uczniów.

Jedną z takich pomocy, o której warto tu dodatkowo wspomnieć, ponieważ daje uczniom wiele edukacyjnych możliwości, a wciąż jest w naszej szkole mało znana, jest tzw. plansza stu liczb:

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Warto zwrócić uwagę na sposób, w jaki ponumerowane są kolejne pola tej planszy. Pierwszy wiersz od dołu to I dziesiątka, drugi wiersz to II dziesiątka itd., w każdym wierszu liczby uporządkowane są rosnąco. Pierwsza kolumna od lewej strony to liczby, w których cyfrą jedności jest 1, druga kolumna ma cyfrę jedności 2 itd.

Taki układ liczb jest zamierzony – ma na celu pokazanie, choć w inny sposób niż we wcześniejszych pomocach, struktury systemu dziesiętnego, w tym m.in. roli cyfr w liczbie dwucyfrowej. Ta plansza jest także potężnym liczydłem, żeby to dostrzec wystarczy sięgnąć po pionek i zacząć wędrówkę po jej polach.

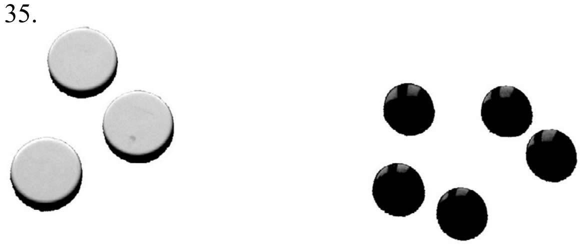
Każdy ruch w prawo to dodawanie: do numeru pola, z którego ruszamy dodajemy liczbę kroków: 34 + 3 = 37, bo jeśli ruszamy z pola 34 i robimy trzy kroki w prawo, to stajemy na polu 37. Obowiązuje przy tym tylko jedna zasada – wędrujemy po polach zgodnie z ich numerami, zatem następnym polem po polu 10 jest pole 11, a po polu 40 – pole 41. Stwarza to uczniom okazję do budowania strategii przekraczania progów dziesiątkowych: najpierw do pełnej dziesiątki, a potem reszta. Analogicznie: każdy ruch w lewo to odejmowanie.

Skok o jeden wiersz do góry, to dodanie jednej dziesiątki do liczby, na której stał pionek, skok o trzy wiersze – to dodanie 30. Zejście o jeden wiersz w dół – to odjęcie dziesiątki itd.

Dziecko, bawiąc się planszą lub grając na niej w jakąś grę ma możliwość samodzielnego rozwijania swojej sprawności rachunkowej, a nawet odkrywania pewnych strategii rachunkowych, np. dodać 9 to ruch do góry i w lewo, czyli dodanie 10 i odjęcie 1 itp.

Warto po tę planszę sięgać i to jak najczęściej. Pamiętajmy jednak, że przemawia ona do ucznia językiem symboli – odkrycie jej tajemnic wymaga nieco czasu.

Symboliczne w swym charakterze jest także wykorzystywanie np. żetonów różnej wielkości czy koloru do reprezentowania liczb. Jeśli umówimy się, że większy żeton ma wartość 10, a mniejszy 1, to żetony ze zdjęcia przedstawiają liczbę 35.



No właśnie, jeśli się umówimy! Ta umowa daje nam użyteczne narzędzie do sprawnego liczenia, ale nie do pokazania, wbrew ewentualnej nadziei, istoty systemu dziesiętnego.

Cyfra czy liczba?

Język, którym posługujemy się, mówiąc o liczbach zapisanych dziesiętnie, jest dość trudny, co dodatkowo komplikuje nam życie. Oto kilka ilustrujących to przykładów:

- czym innym jest np. liczba dziesiątek w liczbie, a zupełnie czym innym cyfra dziesiątek: w liczbie 354 jest 35 dziesiątek (tyle byłoby woreczków z żetonami), ale jej cyfrą dziesiątek jest 5; na liczbę tę składa się 354 jedności (żetonów), ale jej cyfrą jedności jest 4;
- liczba 346 jest liczbą trzycyfrową, liczba 222 także, choć zapisano ją za pomocą tylko jednej cyfry: 2;
- ile liczb dwucyfrowych można zbudować z cyfr 5 i 8: dwie czy cztery?

Mówienie o liczbach w systemie dziesiętnym wymaga w wielu sytuacjach uwagi i precyzji. Trudno o to, gdy znaczna część dzieci, a także ludzi dorosłych, używa pojęć cyfra i liczba wymiennie. Skąd się bierze to powszechne już zjawisko?

Można zaryzykować tezę, że sami sobie tworzymy ten kłopot. Słowo *cyfra* pada po raz pierwszy (i wiele razy kolejnych) wówczas, gdy dzieci operują liczbami jednocyfrowymi: 7 jest raz znakiem graficznym, czyli cyfrą, a zaraz potem liczbą określającą ilość jabłek w koszyku. I tak na zmianę: cyfra 3, liczba 3, cyfra 8 i liczba 8 – i ani jednego przykładu liczby, który burzyłby właśnie powstające w uczniu przekonanie, że cyfra i liczba to to samo. Żadne werbalne rozróżnianie cyfry i liczby nie usuwa tego mankamentu definiowania – gdy wprowadzamy jakąś definicję należy pokazać zarówno obiekty tę definicję spełniające, jak i takie, które do definiowanej klasy nie należą.

Czy stałoby się coś złego, gdybyśmy przez pierwsze dwa albo trzy lata nauki, np. od „zerówki" do klasy 2, w ogóle w kontaktach z dziećmi nie używali słowa *cyfra* i wprowadzili je dopiero wówczas, gdy dzieci budują (np. używając kart z cyframi) liczby dwu- czy trzycyfrowe?

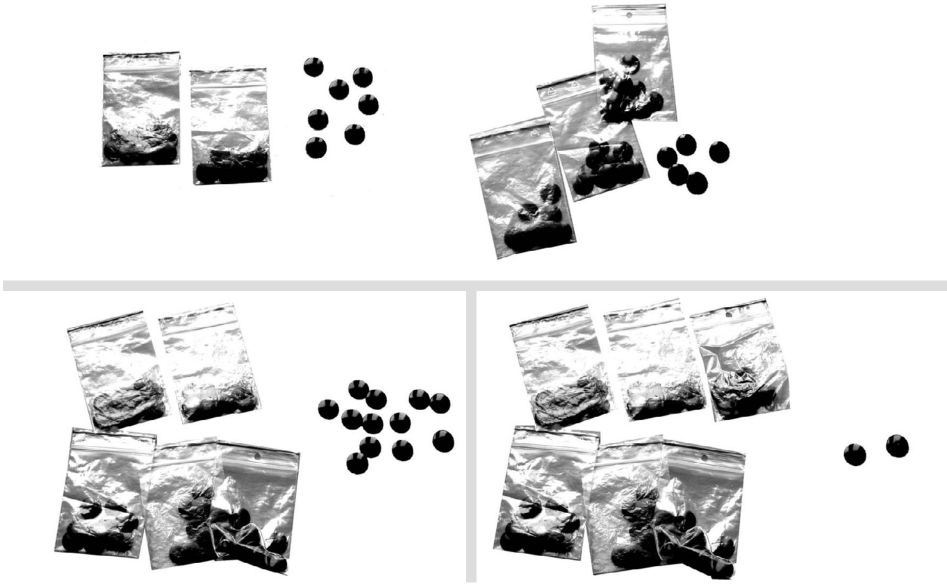
Spróbujmy zapomnieć o: *bo tak zawsze było*, *zawsze tak się przecież robi, taka jest tradycja* itp. i zastanowić się nad konsekwencjami zniknięcia tego określenia na jakiś czas z naszego słownika. Być może okaże się, że odpowiedzią na tak postawione pytanie jest: *nic złego by się nie stało, bo ta nazwa tak naprawdę wcale przez te początkowe lata nie jest potrzebna!* A może nawet mówienie o liczbach byłoby prostsze: *tak zapisujemy liczbę 3, tak 7, a tak liczbę 10 –* i koniec.

Rozpakować woreczek?

Gdy już raz uruchomiliśmy dzięki woreczkom i żetonom działania dzieci, to warto z pomocą tego narzędzia zrobić kolejny krok i zorganizować taką sytuację, w której uczniowie będą np.:

- uzupełniać liczbę żetonów tak, aby wszystkie żetony znalazły się w woreczkach, czyli dopełniać do pełnych dziesiątek;
- ustalać, ile żetonów mają łącznie dwie osoby, czyli dodawać, także z przekraczaniem progu dziesiątkowego;
- ustalać, ile żetonów zostanie, jeśli zabierzemy pewną ilość woreczków i żetonów, czyli odejmować, także z przekraczaniem progu dziesiątkowego.

Jeśli Adam ma 2 woreczki i jeszcze 7 żetonów, a Ewa ma 3 woreczki i 5 żetonów to – aby ustalić, ile mają razem – wystarczy (tak jak zawsze przy dodawaniu na konkretach) złożyć wszystko razem: 5 woreczków i jeszcze 12 żetonów. Na koniec warto zapakować 10 żetonów do nowego woreczka, aby lepiej było widać, ile jest wszystkich żetonów razem:



Nie sprawi też dziecku trudności przedstawienie całej operacji na rysunku.

Przypomnijmy raz jeszcze: działanie i rysunek budują rozumienie, nadają sens kryjącym się za nimi matematycznym operacjom. W ślad za nimi może (i powinien) iść zapis symboliczny – dzięki takiemu właśnie następstwu symbole wynikają z wcześniejszych doświadczeń dziecka, zaczynają mieć dla niego pewien „konkretny” sens.

Jak będzie wyglądać zapis symboliczny pokazanej na zdjęciach sytuacji? Może on przyjąć różne formy, zwłaszcza gdy uczniowie sami będą go tworzyć, np.:

□	○
2	7
+ 3	5
5	12
6	2

$27 + 35 = 50 + 12 = 62$

$27 + 35 = 50 + 10 + 2 = 62$

$27 + 35 = 20 + 30 + 7 + 5 = 50 + 12 = 62$

Po naszej podpowiedzi, że dodawane liczby wygodnie jest zapisywać jedna pod drugą, może powstać także taki zapis (por. s. 63):

$$\begin{array}{r} 27 \\ +\ 35 \\ \hline 50 \\ +\ 12 \\ \hline 62 \end{array}$$

Na stole leżą: 6 woreczków, i jeszcze 4 żetony. Zabranie 2 woreczków i 2 żetonów, czyli wykonanie odejmowania 64 – 22 nikomu nie sprawi trudności. Co jednak, gdy trzeba zabrać 2 woreczki i 8 żetonów, czyli wykonać odejmowanie 64 – 28? Tu też odpowiedź jest szybka: należy rozpakować jeden woreczek.

To wcześniejsze *pakowanie* i *rozpakowywanie woreczka* może nadać sens czynnościom, które są kluczowe dla algorytmów działań pisemnych: „przenoszeniu jedynki" przy dodawaniu oraz „pożyczaniu" czy „rozmienianiu" przy odejmowaniu. Rozmienianie to przecież nic innego jak rozpakowywanie woreczka czy rozrywanie dużego opakowania chusteczek po to, by mieć do dyspozycji 10 paczuszek.

Wiele ciekawych i wartych dokładniejszego zbadania pomysłów może pojawić się przy próbach opisania przez uczniów wykonanych czynności. Tym razem działania uczniów (związane z odejmowaniem 64 – 28) mogą biec bowiem bardzo różnymi torami:

– *Najpierw rozpakowuję jeden woreczek i mam 14 żetonów, więc już mogę zabrać. Zabieram dwa woreczki i 8 żetonów, więc zostaje 6 żetonów i trzy woreczki.* Przy takim postępowaniu dziecko jest o krok od samodzielnego zbudowania algorytmu pisemnego odejmowania – pozostaje zasugerować mu formę zapisu.

– *Najpierw zabieram dwa woreczki, potem te cztery żetony luzem i mam jeszcze zabrać 4, więc rozpakowuję woreczek i zostaje mi 6 żetonów.* Gdybyśmy chcieli zapisać tę procedurę symbolicznie, to efekt byłby taki:

$$64 - 28 = 44 - 8 = 40 - 4 = 36$$

Zapis trudny, ale jakże sprytna i skuteczna strategia odejmowania w pamięci! Można by ją nazwać: *odejmowaniem po kawałku* (por. s. 42).

– *Zabieram trzy woreczki i oddaję z powrotem dwa żetony, bo trzy woreczki to za dużo.* Prawda, że pięknie?

– …

OBLICZENIA PROSTE I ZŁOŻONE

Już we wczesnym okresie przedszkolnym dziecko rozpoczyna swoją edukację w zakresie posługiwania się liczbami (naturalnymi) oraz ich dodawania i odejmowania. Dzięki różnorodnym osobistym doświadczeniom stopniowo buduje intuicje i wyobrażenia dotyczące tych dwóch działań – powtarzając za Arystotelesem: abstrahuje je wraz ze wszystkimi ich podstawowymi własnościami z otaczającego świata. A okazji do tego ma mnóstwo, bo przecież prawie nieustannie coś dokłada, dosuwa, dowozi, dorysowuje, ... oraz odkłada, odsuwa, odwozi, ściera, ...

Z tymi intuicjami dziecko rozpoczyna edukację elementarną, w której swoje doświadczenia, dotychczas najczęściej o charakterze enaktywnym i ikonicznym (por. s. 11), poszerza o ich wymiar symboliczny. Na ogół już na początku pierwszej klasy dziecko ma dużo większe możliwości arytmetyczne niż to zwyczajowo się przyjmuje, ma natomiast trudności ze stosowaniem języka symbolicznego oraz z symbolicznym sposobem reprezentowania liczb.

Rozumienie symboli i operowanie nimi to zdecydowanie najtrudniejszy element edukacji matematycznej – **to symbole, czy raczej brak ich zrozumienia, generują najwięcej niepowodzeń szkolnych**, także w zakresie arytmetyki. Stąd tak ważna jest ostrożność i staranność w trakcie stopniowego budowania języka symbolicznego ucznia: najpierw sens – potem symbol, najpierw znaczenie – potem wzbogacenie słownika o nowe pojęcie.

Rozwijanie sprawności rachunkowej dzieci to, zgodnie z naszą tradycją, podstawowy i najobszerniejszy cel edukacji elementarnej w zakresie umiejętności matematycznych. Znaczna część badania umiejętności trzecioklasistów musiała więc dotyczyć właśnie tej grupy umiejętności – zaczynając od działań na liczbach jednocyfrowych, a kończąc na algorytmach działań pisemnych.

Prezentację wyników w tym obszarze zacznijmy od obliczeń prostych i złożonych, wykonywanych na liczbach jedno- i dwucyfrowych. Zbadaniu umiejętności między innymi dodawania i mnożenia niewielkich liczb służyło następujące zadanie:

4. Zobacz, jak zbudowane są te tabelki. Uzupełnij w nich wszystkie puste pola.

a)

+	32	13	29
5	37		
18			
			56

b)

·	6	12	
5	30		
9			63
8			

W podpunkcie **a** uczeń miał wykonać tak naprawdę dwie różne rzeczy:

– wpisać, zgodnie z podanym przykładem, wyniki odpowiednich obliczeń w pola dwóch górnych wierszy tabelki; ta część rozwiązania ucznia była zaliczana, jeśli podał 4 lub 5 poprawnych wyników;

oraz

– ustalić, dzięki znajomości wyniku (56) i jednego składnika (29), jaki jest nagłówek ostatniego wiersza, po czym uzupełnić pozostałe dwa puste pola; ta część rozwiązania ucznia była uznawana za dobrą, jeśli podał poprawnie nagłówek oraz przynajmniej jeden z dwóch pozostałych wyników.

Dokładnie w ten sam sposób zbudowany jest i oceniany podpunkt **b** tego zadania, dotyczący mnożenia.

Oto zestawienie szczegółowych danych na temat sprawności rachunkowej uczniów w zakresie dodawania liczb jedno- i dwucyfrowych (litera *n* oznacza brakujący nagłówek):

Działanie	5 + 13	5 + 29	18 + 32	18 + 13	18 + 29	*n* (27)	*n* + 32	*n* + 13
Poprawne wyniki	**90,9%**	**89,1%**	**85,3%**	**83,1%**	**78,8%**	**64,5%**	**75,8%**	**75,5%**

Tabela 3. Dodawanie liczb jedno- i dwucyfrowych – procent poprawnych obliczeń

Dwa ostatnie obliczenia: *n* + 32 i *n* + 13 mogły być wykonane poprawnie także dla błędnie obliczonego nagłówka (*n*), stąd taki właśnie układ wyników. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku mnożenia:

Działanie	9 × 6	8 × 6	5 × 12	9 × 12	8 × 12	*n* (7)	5 × *n*	8 × *n*
Poprawne wyniki	**78,3%**	**76,0%**	**78,8%**	**60,5%**	**59,7%**	**70,0%**	**73,5%**	**64,8%**

Tabela 4. Mnożenie liczb jedno- i dwucyfrowych – procent poprawnych obliczeń

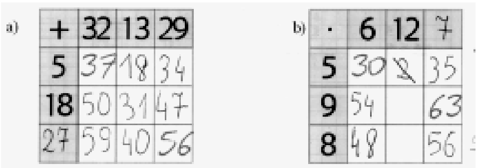
Pierwszą część podpunktu **a** (dodawanie, dwa górne wiersze obliczeń) zaliczyło 83,4% uczniów – 67,0% uczniów wykonało poprawnie wszystkie pięć obliczeń, a 16,4% zrobiło jeden błąd. Z drugą częścią tego podpunktu poradziło sobie 62,6% uczniów – 58,2% podało trzy poprawne wyniki.

Pierwszą część podpunktu **b** (mnożenie, dwie początkowe kolumny obliczeń) zrobiło dobrze 61,3% uczniów –

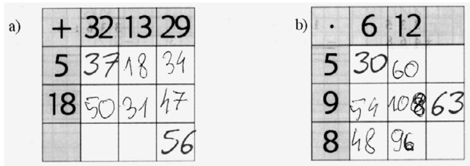
44,7% podało pięć dobrych wyników, a 16,6% – cztery. 56,8% uczniów wpisało do ostatniej kolumny tabelki trzy dobre wyniki – z tym etapem zadania poradziło sobie łącznie 67,9% uczniów.

Spójrzmy na kilka najbardziej typowych kategorii braków i błędów:

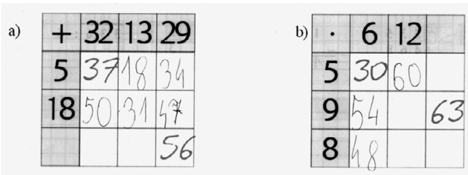
1.



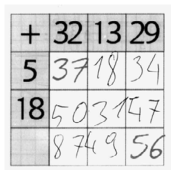
2.



3.

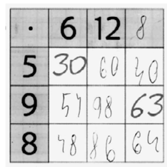


4.



5.

6.



Autor rozwiązania 1. poprawnie uzupełnił ostatnią kolumnę w podpunkcie **b**, ale szybko zrezygnował z mnożenia liczby 12 – i to nawet przez 5. W rozwiązaniu 2. uczeń bezbłędnie dodaje i mnoży, ale nie potrafi znaleźć brakujących nagłówków. Kolejny uczeń (3) ma trudności i z jednym, i z drugim. Te trzy rozwiązania pokazują „hierarchię" typowych błędów.

Z powyższych tabel wynika, że około $^1/_3$ uczestników badania nie umiała ustalić właściwej postaci nagłówka dolnego wiersza w podpunkcie **a**. Niektórzy uczniowie tworzyli własne reguły uzupełniania tabeli (np. 4). Także przy mnożeniu właściwe uzupełnienie nagłówka sprawiło trudność prawie $^1/_3$ dzieci (5, 6) – w tym także uczniom sprawnie mnożącym w „zwykłej" sytuacji (2, 5).

Umiejętność wykonywania obliczeń złożonych badana była w typowy sposób:

2. Oblicz.

a) 40 – 20 : 4 = ... b) 36 – (16 – 9) = ...

c) 18 : 9 · 2 = ... d) 37 – 11 + 6 = ...

e) 16 + 4 · 5 = ... f) 60 : 6 + 4 · 7 = ...

Przykłady obliczeń zostały tak dobrane, aby dawały okazję do zastosowania wszystkich podstawowych reguł dotyczących kolejności wykonywania obliczeń:

- *najpierw nawiasy* (b),
- *mnożenie i dzielenie przed dodawaniem i odejmowaniem* (a, e, f),
- *od lewej do prawej* (c, d).

Diagram pokazuje procent poprawnych obliczeń dla każdego z przykładów tego zadania.

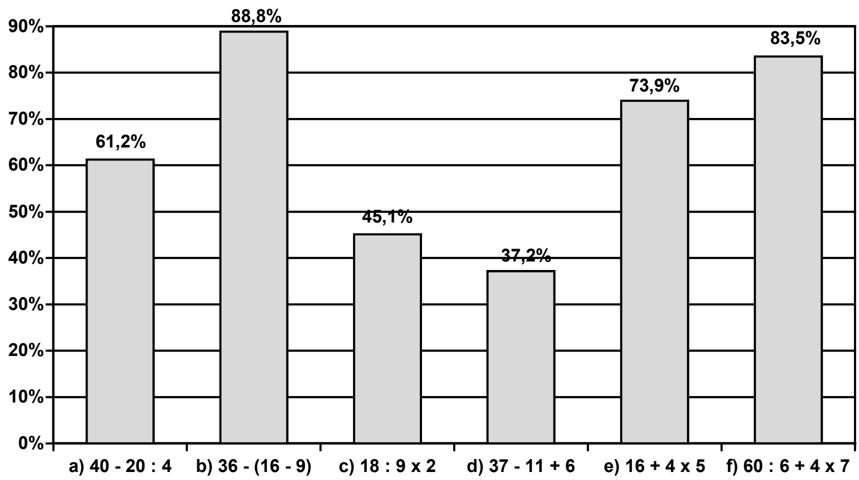


Diagram 5. Kolejność wykonywania działań – procent poprawnych obliczeń.

Z przytoczonych wyżej reguł uczniowie najskuteczniej zastosowali pierwszą: 88,8% z nich poprawnie wykonało obliczenie, w którym użyto nawiasów.

Z trzech przykładów, w których pojawiły się działania o różnym priorytecie (czyli: a, e i f) zdecydowanie najlepiej wypadło na pozór najbardziej skomplikowane, czyli **f**: 83,5% dobrych wyników. W przykładach **a** i **e** spora część uczniów wykonała obliczenia błędnie, w ogromnej większości stosując zasadę *od lewej do prawej*.

Zdecydowanie najwięcej kłopotu sprawiły uczniom te obliczenia, w których wystąpiły działania o jednakowym priorytecie: przykład **c** zrobiło poprawnie tylko 45,1% uczniów, a przykład **d** tylko 37,2%, czyli mniej więcej co trzeci uczeń. Analiza błędnych rozwiązań w obu tych przykładach pokazuje, że dla znacznej części uczniów mnożenie ma pierwszeństwo przed dzieleniem, a dodawanie należy wykonać przed odejmowaniem.

12,8% uczniów wykonało poprawnie wszystkie sześć obliczeń, a 4,2% nie wykonało dobrze żadnego z nich. Najczęściej, bo aż w 37,5% przypadków, uczeń poprawnie wykonywał cztery obliczenia:

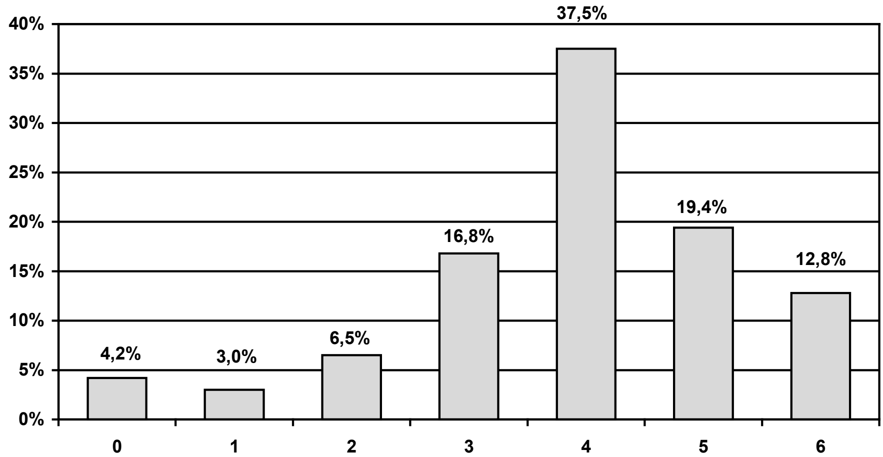


Diagram 6. Kolejność wykonywania działań – procent poprawnie wykonanych przykładów.

Warto przyjrzeć się uważnie obliczeniom uczniów, ponieważ w niektórych fragmentach są one zaskakujące.

Część uczniów (1, 2) stara się konsekwentnie stosować strategię zapisywania wyniku nad działaniem (działaniami), od którego należy zacząć, choć nie zawsze przynosi to właściwe efekty (2):

1.

$40 - 20 \overset{5}{:} 4 = 40 - 5 = 35$ $\qquad$ $36 - (16 \overset{7}{-} 9) = 36 - 7 = 29$

$18 : 9 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$ $\qquad$ $\overset{26}{37 - 11} + 6 = 26 + 6 = 32$

$16 + 4 \cdot 5 = 16 + 20 = 36$ $\qquad$ $60 \overset{10}{:} 6 + 4 \overset{28}{\cdot} 7 = 10 + 28 = 38$

2.

$18 : 9 \overset{18}{\cdot} 2 = 18 - 18 = 0$ $\qquad$ $37 - 11 \overset{17}{+} 6 = 37 - 17 = 27$

$16 + 4 \overset{20}{\cdot} 5 = 20 + 16 = 36$ $\qquad$ $60 \overset{8}{:} 6 + \overset{28}{4 \cdot 7} = 28 - 8 = 20$

Niekiedy pojawia się także dodatkowa strategia: wzięcie w nawias tego działania, od którego należy zacząć (3), ale przynosi to często fatalne skutki – uczeń bowiem swobodnie zmienia właściwą kolejność wykonywania obliczeń:

3. $(40 \overset{20}{-} 20) : 4 =$ 5 $\qquad 36 - (16 \overset{7}{-} 9) =$ 29

$18 : 9 \cdot 2 =$ 1 $\qquad 37 - (11 \overset{17}{+} 6) =$ 20

$16 + (4 \overset{20}{\cdot} 5) =$ 36 $\qquad 60 : 6 + 4 \cdot 7 =$ ....

Umieszczenie kilku obliczeń w jednym zapisie nie jest tak naturalnym zabiegiem, jak mogłoby się wydawać. Symboliczna złożoność takiego zapisu znacznie wzrasta, co widać także w przykładach 4–8, wybranych spośród wielu podobnych. By poradzić sobie z tym nowym obliczeniem, trzeba nie tylko pamiętać o kolejności wykonywania działań, ale także rozumieć, że znak równości to nie wołanie o wynik, ale symbol informujący, że po jego obu stronach „stoi to samo”, co najwyżej inaczej zapisane.

Zaawansowanie i skuteczność podejmowanych przez uczniów prób pokonania tej trudności jest różna:
– od starannego rozbicia obliczenia na pojedyncze działania, nie zawsze jednak wykonywane we właściwej kolejności (4) i prowadzące do końcowego sukcesu:

4. $40 - 20 : 4 =$ 40-20=20 20:4=5 $\qquad 36 - (16 - 9) =$ 16-9=7 36-7=29

$18 : 9 \cdot 2 =$ 18:9=2 2·2=4 $\qquad 37 - 11 + 6 =$ 11+6=17 36-17=19

$16 + 4 \cdot 5 =$ 16+4=20 20·5=100 $\qquad 60 : 6 + 4 \cdot 7 =$ 60:6=10 4·7=28 28+10=38

– przez niepoprawne, ale dość konsekwentne, i niekiedy szczęśliwe, operowanie równością (5, 6):

5. $40 - (20 : 4) =$ 5=40-5=35 $\qquad 36 - (16 - 9) =$ 7=36-7=29

$18 : (9 \cdot 2) =$ 18=18:18=1 $\qquad 37 - (11 + 6) =$ 17=37-17=20

$16 + (4 \cdot 5) =$ 20=16+20=36 $\qquad 60 : 6 + (4 \cdot 7) =$ 28=60:6=10+28=38

6. $40 - 20 : 4 =$ 5 40-5=35 $\qquad 36 - (16 \overset{7}{-} 9) =$ 7 36-7=29

$18 : 9 \cdot 2 =$ 18:18=1 $\qquad 37 - 11 + 6 =$ 17 37-17=20

– po „łagodną rezygnację” i poprzestanie tylko na pierwszym działaniu (7):

7.

40 – 20 : 4 = 40-20=20	36 – (16 – 9) = 36-16=20
18 : 9 · 2 = 18:9=2	37 – 11 + 6 = 37-11=26
16 + 4 · 5 = 16+4=20	60 : 6 + 4 · 7 = 60:6=10

Autorzy obliczeń 5 i 6, podobnie jak prawie połowa ich kolegów, zdecydowanie są zdania, że „mnożenie przed dzieleniem, a dodawanie przed odejmowaniem”. To przekonanie nie wyczerpuje listy typowych „oczekiwanych” błędów:

40 – 20 : 4 = 20:4=5	36 – (16 – 9) = 20-9=11
18 : 9 · 2 = ~~2·2=4~~ 18:18=1	36 – (16 – 9) = 36-16-9:26
16 + 4 · 5 = 20·5=100	60 : 6 + 4 · 7 = 10+4=14·7=980

A jak rozumowali autorzy obliczeń przedstawionych poniżej? Skąd takie wyniki?

1.

40 – 20 : 4 = 50 205	36 – (16 – 9) = 207
18 : 9 · 2 = 22	37 – 11 + 6 = 2617 37 − 11 = 26
16 + 4 · 5 = 2020	60 : 6 + 4 · 7 = 101028

2.

40 – 20 : 4 = 520	36 – (16 – 9) = 720
18 : 9 · 2 = 182	37 – 11 + 6 = 2677
16 + 4 · 5 = 2020	60 : 6 + 4 · 7 = [illegible]28

Zagadka iście detektywistyczna. Może pomogą kolejne obliczenia z tej samej „serii”:

3.

40 – 20 : 4 = ~~[illegible]~~ 20+5=25	36 – (16 – 9) = 20+7=27
18 : 9 · 2 = 1+18=19	37 – 11 + 6 = 26+17=43
16 + 4 · 5 = 20+20=40	60 : 6 + 4 · 7 = 10+10+28=48

4. 40 – 20 : 4 = 5 · 20 = 100 (5 written above) 36 – (16 – 9) = 7 + 29 = 36 (7 written above)

18 : 9 · 2 = 18 : 2 = 36 (18 written above) 37 – 11 + 6 = 17 + 26 = 44 (17 written above)

16 + 4 · 5 = 20 + 20 = 40 (20 written above) 60 : 6 + 4 · 7 = 28 + 10 = 38 (10 written above)

I jeszcze kilka obliczeń, rzucających coraz więcej światła na tok rozumowania uczniów:

5. 40 – 20 : 4 = (20 and 5 written above)

18 : 9 · 2 = ... (2 and 18 written above)

16 + 4 · 5 = ... (20 and 20 written above)

6. 40 – 20 : 4 = ~~820~~ 40 - 20 + 20 : 4 = 20 + 5 = 25

18 : 9 · 2 = ~~18 : 9 + 2 · 9 = 18 · 2 · 9~~ 18 : 9 + 9 · 2 = 2 · 9 + 18 = 36

16 + 4 · 5 = 16 + 4 : 5 = 20 + 4 · 5 = 20 + 20 = 40

7. 37 – 11 + 6 = 43 (26 and 17 written above)

8. 37 – 11 + 6 = 26 + 17 = 43 (26 and 17 circled above)

Kolejne obliczenia wyjaśniają coraz więcej, ale zacznijmy od początku. Autorzy obliczeń 1 i 2 wykonują każde z działań występujących w obliczeniu, ale osobno, wykorzystując środkową liczbę dwukrotnie:

40 – 20 = 20, 20 : 4 = 5; 36 – 16 = 20, 16 – 9 = 7; ...

po czym zapisują oba wyniki obok siebie, czasami w innej kolejności. Nie są to liczby trzy- czy nawet sześciocyfrowe (101028), lecz wyniki działań, które uczniowie „wyłowili" z tego obliczenia.

W analogiczny sposób postępują kolejni uczniowie, tyle że dorzucają jeszcze jeden element tej procedury: na uzyskanych liczbach wykonują jakieś operacje, np.:

40 – 20 = 20, 20 : 4 = 5, 20 + 5 = 25 (3, 6);

40 – 20 = 20, 20 : 4 = 5, 5 × 20 = 100 (4),

często zapisując uzyskane wyniki nad znakami odpowiednich działań (4, 5, 7, 8).

Dlaczego? Skąd wzięła się taka strategia? Widać bowiem, że jest to dość konsekwentne działanie, co więcej – występujące u znacznej części uczniów, z różnych szkół i obszarów Polski.

Bardzo prawdopodobną odpowiedź podsuwają obliczenia 7 i 8: ich autorzy wyraźnie budują „drzewko". Można podejrzewać, że uczniowie tworzą sobie, i to dość powszechnie(!), własną „strategię drzewka" przy obliczeniach złożonych:

robimy każde działanie z osobna, a potem łączymy otrzymane wyniki.

Jak łączymy? Na to pytanie jest tylko jedna odpowiedź, wynikająca z analizy prac dzieci: różnie. W efekcie możliwe wyniki dla tego samego obliczenia mogą być zupełnie inne, także z winy pomyłek rachunkowych, choć metoda ewidentnie jest ta sama:

$18 \overset{2}{:} 9 \overset{18}{\cdot} 2 =$ 18 : 2 = 9	$18 : 9 \cdot 2 =$ 18 − 2 = 16	$18 \overset{2}{:} 9 \cdot 2 =$ 2 + 18 = 20
$18 \overset{2}{:} 9 \overset{18}{\cdot} 2 =$ 20	$18 : 9 \overset{18}{\cdot} 2 =$ 18 · 2 = 36	$18 : 9 \cdot 2 =$ 2 · 18 = 38

Możliwe zresztą są różne „wzbogacenia” tej strategii, np. zwiększenie wyniku o jedną z liczb występujących w obliczeniu (9) albo „ujednolicenie” końcowego działania (10):

9.	40 – 20 : 4 = 25 + 4 = 29	36 – (16 – 9) = 29 – 9 = 20
	18 : 9 · 2 = 20 + 9 = 29	37 – 11 + 6 = 26 + 17 = 43
	16 + 4 · 5 = 40 + 5 = 45	60 : 6 + 4 · 7 = 38 + 7 = 45
10.	40 – 20 : 4 = 4 : 40 = 11	36 – (16 – 9) = 7 : 20 = 0
	18 : 9 · 2 = 10 : 18 = 1	37 – 11 + 6 = 17 : 26 = 0
	16 + 4 · 5 = 20 : 20 = 0	60 : 6 + 4 · 7 = 10 : 28 = 0

Pozorne ułatwienie metodyczne

W latach siedemdziesiątych minionego wieku, w ramach tzw. „nowej matematyki”, zawitało do naszych szkół, podobnie jak do większości szkół na świecie, wiele nowych pomysłów metodycznych i nowych pomocy dydaktycznych[4]. Wprowadzano je, aby zwiększyć efektywność matematycznego kształcenia dzieci. Wtedy właśnie w polskim nauczaniu początkowym pojawiły się zbiory, grafy, oś liczbowa, drzewka ...

Od początku wielu wybitnych matematyków i dydaktyków matematyki zwracało uwagę na to, że zmiany te idą w złym kierunku, bo prowadzą do podniesienia poziomu formalizmu matematycznego na lekcjach, co może doprowadzić do szybkiego „zgubienia” w procesie kształcenia znacznej części dzieci, zwłaszcza tych, które nie znalazły się jeszcze w pełni na poziomie myślenia operacyjnego. I rzeczywiście – praktyka szkolna bardzo szybko pokazała, że ostrzeżenia te były słuszne. Wprowadzony na lekcje język mnogościowy okazał się, zarówno w swej warstwie werbalnej, jak i symbolicznej, trudny. A zdarzało się przecież, że zachęcano dzieci np. do *badania łączności złączenia zbiorów rozłącznych*. Kto dziś potrafi dokonać „rozbioru” tego sformułowania?

Każde sześcioletnie dziecko jest w stanie wybrać z klocków leżących na ławce wszystkie klocki niebieskie albo wszystkie prostokątne, a nawet wszystkie niebieskie prostokątne klocki. Żaden sześciolatek czy siedmiolatek, bez intensywnego treningu, nie jest w stanie zaznaczyć części wspólnej zbioru klocków prostokątnych i zbioru klocków niebieskich. To, czego się od niego oczekuje w takiej sytuacji, jest obce jego naturalnemu językowi i nieformalnej wiedzy – w jego świecie nie ma struktury o nazwie zbiór klocków, są po prostu klocki. Przeliczanie klocków jest nieporównywalnie prostsze i bardziej naturalne niż określanie liczebności zbioru klocków, a prowadzi dokładnie do tego samego.

Język zbiorów nie jest potrzebny w nauczaniu początkowym:

- ani ze względów metodycznych – straty wynikające z jego wprowadzenia zdecydowanie przekraczają ewentualne zyski,
- ani ze względów merytorycznych – zbiory o skończonej liczbie elementów mogą okazać się matematycznie przydatne dopiero przy okazji definiowania pojęcia

[4] Por. Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 1–4, WSiP, Warszawa 1980.

funkcji, czyli aktualnie na przełomie gimnazjum i liceum; pięć lat przerwy to oczywista gwarancja rozpoczynania wszystkiego od nowa.

W chwili obecnej język zbiorów na szczęście prawie całkowicie zniknął już z polskiej szkoły. W obowiązującej aktualnie podstawie programowej zachowało się tylko jedno sformułowanie z dawnych lat: *porównywanie liczebności zbiorów* i to tylko dlatego, że jest dużo krótsze niż: *porównywanie ilości przedmiotów dzięki łączeniu ich w pary*, a znaczy to samo.

Podobnie stało się z językiem grafów, który jeszcze nie tak dawno był wszechobecny w polskich podręcznikach do klasy 1. Badania pokazały[5], że dla dzieci jest to trudny symboliczny język, którego część z nich uczy się po prostu na pamięć. Wystarczy zmienić kierunek czy kolor strzałek w grafie albo zmodyfikować jego kształt, aby dzieci zaczęły go traktować jako coś zupełnie nowego, czego trzeba „nauczyć się" od nowa.

Wprowadzenie języka zbiorów czy grafów do pracy z małymi dziećmi okazało się **pozornym ułatwieniem metodycznym** – intencje były dobre, ale efekt opłakany.

Sytuacja powtarza się w przypadku osi liczbowej, która czasami jest wprowadzana po to, aby ćwiczyć na niej przekraczanie progu dziesiątkowego. Dużo łatwiej, szybciej i lepiej można zrobić to np. za pomocą chodniczka liczbowego – dwudziestu kolejno ponumerowanych pól, ułożonych w jednym lub dwóch rzędach. Podobnie ma się rzecz z wykorzystywaniem osi liczbowej do porównywania i porządkowania liczb naturalnych – każde inne narzędzie, choćby centymetr krawiecki, da dużo lepsze efekty i to przy znacznie mniejszym nakładzie pracy wszystkich zainteresowanych. Oś liczbowa, która jest bardzo trudnym pojęciem z pogranicza arytmetyki (liczby) i geometrii (prosta) jest potrzebna dopiero przy porządkowaniu ułamków zwykłych i liczb zapisanych dziesiętnie, ale to już klasy starsze. Wczesne wprowadzanie osi liczbowej to kolejne pozorne ułatwienie metodyczne.

Także w wyniku tych prób zagościło na dobre w naszych szkołach już na poziomie klas 1–3, zjawisko *zdegenerowanego formalizmu*[6], polegające na bezmyślnym operowaniu symbolami, bez wnikania w ich sens i cel ich użycia. Wcześniej pojawiało się ono zazwyczaj pod koniec szkoły podstawowej, gdy uczniowie zaczynali używać języka algebry.

---

[5] Por. np. E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, WSiP, Warszawa 1992.

[6] Por. np. Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, t. 2, WSiP, Warszawa 1977, s. 105.

Żeby ograniczyć zakres tego zjawiska, a może nawet nie dopuścić do jego powstania, starajmy się rozmawiać z dziećmi, używając naturalnego języka i unikając matematycznego „żargonu”. Zamiast sięgać po pozorne ułatwienia metodyczne, odwołujmy się do rzeczywistych doświadczeń uczniów i posiadanej przez nich wiedzy, zwłaszcza zdobytej poza szkołą. I starajmy się, aby to, co robimy w szkole wywodziło się, czy chociaż nawiązywało do tego, co nas otacza i z czym obcujemy na co dzień – żeby było realistyczne z punktu widzenia ucznia.

A co z językiem drzewek, wciąż często używanym przy okazji wprowadzania reguł rządzących kolejnością wykonywania działań? To także dość skomplikowany i formalny język symboliczny. Nie wiemy, czy autorzy prezentowanych wcześniej „drzewkopodobnych” obliczeń poznawali i ćwiczyli stosowanie reguł dotyczących kolejności wykonywania działań za pomocą drzewek, choć wydaje się to bardzo prawdopodobne (por. rozwiązanie 7, s. 27). Jeśli tak było rzeczywiście, to przedstawione prace dzieci mogą być poważnym sygnałem, że mamy do czynienia z kolejnym pozornym ułatwieniem metodycznym – zysk niewielki, natomiast trudności wiele.

Z przytoczonych prac uczniów może płynąć pewna ogólniejsza nauka:

Gdy dziecko nie rozumie tego, co mu proponujemy, często zaczyna budować własne strategie, które mają zastąpić te proponowane przez nas. Jeśli nie będziemy zachęcać uczniów do działania oraz mówienia i jeśli nie będziemy ich uważnie słuchać (zamiast nimi dyrygować i wkładać w ich usta oczekiwaną odpowiedź), to nie zauważymy w porę, że strategie te są błędne i nie będziemy mogli szybko oraz skutecznie ich skorygować. A to oznacza liczne i bolesne zawodowe rozczarowania.

Czy warto się spieszyć?

Zarówno ogólne wyniki, jak i prace dzieci pokazują, że obliczenia złożone są dla uczniów trudniejsze niż się powszechnie uważa i mogą być źródłem sporych kłopotów – i to zarówno ze względu na samą towarzyszącą im notację, jak i przestrzeganie przyjętych w związku z nimi reguł.

Co możemy zrobić, żeby kłopoty te były możliwie jak najmniej dokuczliwe?

Zanim podejmiemy próbę udzielenia odpowiedzi na to pytanie, sformułujmy jeszcze jedno:

Do czego są nam potrzebne obliczenia złożone?

Na ostatnie pytanie odpowiedź jest stosunkowo prosta: przydają się przy rozwiązywaniu zadań tekstowych – zamiast kilku kolejnych zapisów, możemy zrobić jeden i szybciej dojść do celu. I to jedyny racjonalny powód, dla którego warto się nimi zajmować. Jest to zatem narzędzie służące wygodnemu rozwiązywaniu zadań tekstowych, ale – jak każde narzędzie – będzie dobrze pełnić swoją funkcję, jeśli uczeń będzie gotowy rozsądnie się nim posłużyć. W innym przypadku, nie tylko nie pomoże, ale wręcz utrudni rozwiązywanie zadań.

Skoro obliczenia złożone służą zadaniom tekstowym, to może warto zacząć o nich mówić właśnie przy okazji rozwiązywania zadań?

Janek kupił 4 butelki wody mineralnej, a jego tata jeszcze trzy zgrzewki tej samej wody, po 8 butelek w każdej zgrzewce. Ile butelek wody łącznie kupili?

Rozwiązując „arytmetycznie" to zadanie, można sporządzić przynajmniej trzy różne zapisy:

I. $3 \times 8 = 24$
$24 + 4 = 28$

II. $3 \times 8 + 4 = 24 + 4 = 28$

III. $4 + 3 \times 8 = 4 + 24 = 28$

Pierwszy jest dla dziecka najprostszy. Jest również najlepszy z punktu widzenia sztuki rozwiązywania zadań tekstowych – dziecko stawia sobie kolejne pytania:

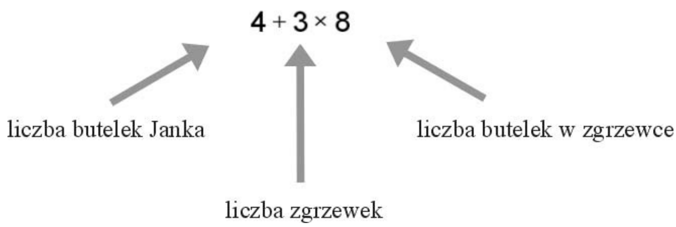
Ile butelek wody było razem w zgrzewkach?

To ile butelek było łącznie?

i odpowiadając na nie, buduje rozwiązanie zadania. Warto pozwolić uczniom jak najdłużej stosować tę metodę – zaowocuje to wyższym poziomem umiejętności rozwiązywania zadań.

Drugi sposób, dzięki zmianie kolejności zapisu danych, omija kwestię kolejności działań – do sukcesu wystarczy naturalna reguła „od lewej do prawej".

Dopiero przy trzeciej formie zapisu „dotykamy" kolejności. Jednak porządek wykonania tych obliczeń może być tylko jeden, bo wynika on z kontekstu, z tego, co oznacza każda z liczb:



Jaki sens może mieć dodawanie butelek do zgrzewek?
Co najpierw trzeba obliczyć?

Może warto sprawić, aby reguły dotyczące kolejności wykonywania działań wiązały się, czy nawet wynikały, w świadomości dziecka z pewnych konkretnych kontekstów sytuacyjnych? Aby dziecko, widząc np. zapis $8 + 5 \times 12$ mogło mu nadać, przynajmniej na początku, pewien realistyczny sens, uruchamiający właściwy szyk obliczeń? Okazji do tego jest przecież wiele:

Ania miała zapakować do pudełek 30 bombek. Zapakowała już 3 pudełka, do każdego wkładając po 6 bombek. Ile bombek ma jeszcze zapakować?

W stołówce jest 6 dużych stołów i 4 małe. Przy dużym stole może siedzieć 10 osób, a przy małym 4. Ile jest miejsc w tej stołówce?

Być może powinniśmy także pamiętać o tym, że język mówiony i pisany ma charakter liniowy – słowa padają i są odbierane w pewnej jednoznacznej kolejności. Jaki to ma związek z kolejnością wykonywania działań? Prawie zawsze, gdy podajemy reguły rządzące kolejnością, z naszych ust pada taka (lub bardzo zbliżona) formuła: najpierw mnożenie i dzielenie, potem dodawanie i odejmowanie. Jaki jest niezmienny(!) szyk wymienianych działań?

Pierwsze: mnożenie, drugie: dzielenie, trzecie: dodawanie, czwarte: odejmowanie.

Może powtarzając wielokrotnie i niezmiennie te słowa, nieświadomie tworzymy warunki do tego, aby dzieci zbudowały sobie takie właśnie priorytety działań jak powyżej? Znaczna część uczniów ujawniła je w swoich obliczeniach.

Może warto zmieniać ten szyk: *najpierw dzielenie oraz mnożenie, potem odejmowanie i dodawanie* oraz samo sformułowanie: *w pierwszej kolejności dzielenie albo mnożenie...*

Jeśli przy pierwszej takiej próbie zauważymy u dzieci oznaki zaniepokojenia, to może być sygnał, że proces generalizowania własnych reguł już trwa. Pamiętajmy, że **łatwiej jest zapobiegać niż leczyć**.

STOSOWANIE RÓŻNYCH STRATEGII LICZENIA

Żyjemy w epoce gwałtownego postępu technicznego i cywilizacyjnego, każdego roku pojawiają się kolejne urządzenia ułatwiające nam życie. W roku 1974 powstał pierwszy kieszonkowy kalkulator – urządzenie, które zbudowano po to, żeby zdjąć z nas ciężar żmudnych mechanicznych obliczeń. Jest to wciąż dość „świeży" wynalazek – niedawno obchodził swoje trzydziestolecie.

Dziś kalkulatory montowane są w telefonach komórkowych, zegarkach, lampkach biurowych. Najtańsze, czterodziałaniowe kalkulatory kosztują kilka złotych. Czy nauczyliśmy się z nich korzystać w procesie rozwijania umiejętności matematycznych dzieci albo chociaż „współżyć" z nimi? A może raczej żyjemy w skrywanym lęku przed tym niewielkim urządzeniem, które dość powszechnie w naszym kraju uważane jest za poważne zagrożenie dla uczniowskiej umiejętności wykonywania obliczeń?

Historia uczy, że postępu technicznego nie da się zatrzymać, więc wcześniej czy później „widmo kalkulatora" energicznie zapuka do drzwi polskiej szkoły. Puka już dziś, o czym świadczą obliczenia wykonywane pod ławkami, ale mało kto ma odwagę sobie to w pełni uświadomić. Czy można sprawić, żeby kalkulator był sprzymierzeńcem, a nie wrogiem?

Wydaje się, że jest tylko jedno dobre wyjście z tej sytuacji:

jeśli chcemy, aby dzieci nie sięgały przy każdym obliczeniu po kalkulator, musimy je przekonać, że mogą i potrafią wiele rzeczy obliczyć, np. w pamięci – skutecznie i bezpiecznie, a często także szybciej niż na kalkulatorze!

Najwyższa pora, abyśmy zdali sobie sprawę z tego, że zadaniem szkoły jest nie tylko nauczyć dzieci liczyć, ale przede wszystkim: *nauczyć dzieci liczyć sprytnie*! Co to znaczy sprytnie? To znaczy np. tak:

Nauczycielka:	*Ile to jest 58 + 76? Proszę, Ania.*
Ania:	*134.*
Nauczycielka:	*A jak to policzyłaś?*
Ania:	*Z pierwszej liczby wzięłam 50 i z drugiej 50, to razem 100.* *Tu zostało 8, a tu 26, to razem 34, czyli 134.*
Nauczycielka:	*Sprytnie. To policz jeszcze, ile to jest 45 + 39.*
Ania:	*Tu muszę zastosować inną metodę. 45 i 35 to 80. Razem 84!*

Okazało się, że Ania, uczennica klasy 3, nie tylko zna i stosuje kilka metod dodawania w pamięci, ale zauważyła również, że w różnych sytuacjach warto sięgać po różne metody. Zaczęła rozwijać swoją **zaradność arytmetyczną** – umiejętność, która powinna być zasadniczym celem edukacji matematycznej nie tylko w klasach 1–3.

Także współczesna psychologia zwraca szczególną uwagę na znaczenie samodzielności i aktywności intelektualnej uczniów w procesie kształcenia dla ich rozwoju[7]. Jednym z podstawowych zadań stojących przed szkołą, i to na każdym etapie jej funkcjonowania, powinno być tworzenie warunków do budowania przez dzieci różnych strategii: liczenia, rozwiązywania zadań, radzenia sobie z problemami itd. W ten sposób uczą się one posługiwać swoją wiedzą, nabierają zaufania do siebie, poprawiają swoją samoocenę, rozwijają kreatywność, a także przekonują się o użyteczności matematyki. Ucząc się tworzenia i stosowania strategii, uczą się tego, co w ich dorosłym życiu może być jednym z najważniejszych i najbardziej przydatnych narzędzi intelektualnych.

Jedno z zadań w badaniu umiejętności trzecioklasistów miało skłonić uczniów właśnie do ujawnienia stosowanych strategii obliczeniowych:

Oblicz tak, jak Ci najwygodniej.

199 + 87 **106 – 99** **150 : 25**

Dwa pierwsze przykłady miały zachęcić uczniów do zademonstrowania swojej zaradności w zakresie dodawania i odejmowania – ich wyniki są, przy odrobinie matematycznego sprytu, dość oczywiste na pierwszy rzut oka. W przypadku trzeciego przykładu uczniowie powinni być skazani na metody „niepisemne”, ponieważ algorytm pisemnego dzielenia przez liczby wielocyfrowe pojawia się dopiero w klasie czwartej.

[7] Por. np. D. Klus-Stańska, M. Nowicka, *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*, WSiP, Warszawa 2005.

Efekty poczynań uczniów prezentuje poniższy diagram:

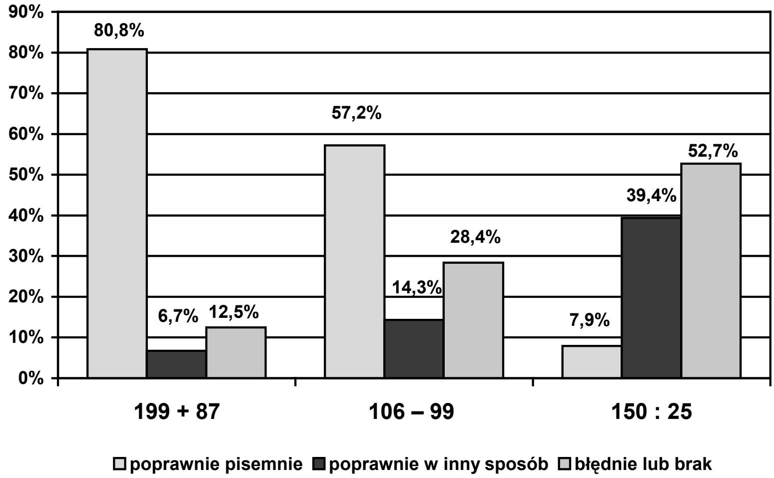


Diagram 7. „Własne" strategie liczenia uczniów – procent poprawnych obliczeń.

Ogromna większość uczniów, bo aż 90,2%, zastosowała do znalezienia sumy 199 + 87 algorytm dodawania pisemnego – 80,8% wykonało obliczenia poprawnie, a 9,4% błędnie. Tylko 9,1% uczniów sięgnęło po inne metody, przy czym 6,7% uzyskało dobry wynik, najczęściej po prostu go podając, a 2,4% pomyliło się.

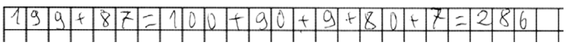
W przypadku odejmowania 106 – 99 po algorytm pisemny sięgnęło 81,6% uczniów – 57,2% zastosowało go poprawnie, a 24,4% – czyli ok. ¼ wszystkich uczniów – popełniło w obliczeniach pisemnych błąd. Inną strategię zastosowało 16,8% uczniów: 14,3% skutecznie, także i tu najczęściej od razu podając poprawny wynik, a 2,5% błędnie.

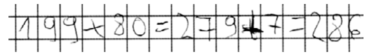
Także w przypadku dzielenia 150 : 25, czyli liczby trzycyfrowej przez dwucyfrową(!), spora część uczniów, bo 36,6%, starała się zastosować algorytm pisemnego dzielenia – i aż 7,9% uczniów zrobiło to skutecznie. Innych metod próbowało 58,3% dzieci – 39,4% z sukcesem. Zwraca uwagę fakt, że ponad połowa uczniów nie poradziła sobie z tym prostym dzieleniem.

Tylko 3,5% uczniów w każdym z trzech przypadków sięgnęło z powodzeniem po inny, niż algorytm pisemny, sposób znalezienia wyniku. Jak widać, z zaradnością arytmetyczną naszych uczniów jest zwyczajnie źle. Potwierdzają to zresztą także wszystkie inne prowadzone badania[8].

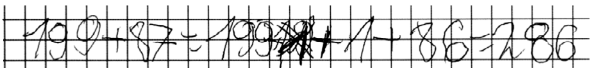
[8] Por. np. R. Dolata, B. Murawska, E. Putkiewicz, M. Żytko, *Monitorowanie osiągnięć szkolnych jako metoda doskonalenia edukacji*, Wydawnictwo „Żak", Warszawa 1997.

Spójrzmy na „niepisemne” strategie stosowane przez uczniów w przypadku dodawania. Dwie pierwsze polegają na rozbiciu obu lub jednego składnika na dziesiątki i jedności:

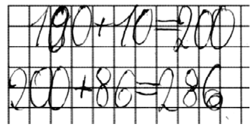
1.


2.


Obliczenia 3 i 4 to „dodawanie po kawałku” lub dopełnianie do pełnych setek, różnią się one tylko zapisem. Ostatnia strategia (5) jest bardziej zagadkowa – uczeń dodawanie 199 + 1 zastąpił działaniem 190 + 10, trudno powiedzieć, czym się kierował.

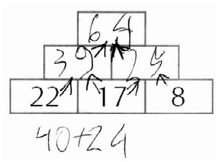
3.


4.


5.


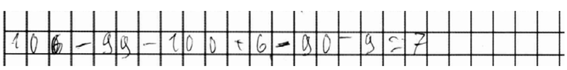
Zapis drugiej i czwartej strategii jest charakterystyczny dla kilkuetapowego obliczenia wykonywanego w pamięci. Z formalnego punktu widzenia jest on oczywiście niepoprawny, ale precyzyjnie oddaje dynamikę i kolejność wykonywanych operacji. W badaniu tego typu rozwiązania były „zaliczane”.

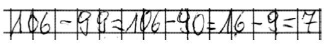
Bardzo ładna strategia dodawania pojawiła się także przy okazji rozwiązywania zupełnie innego zadania:

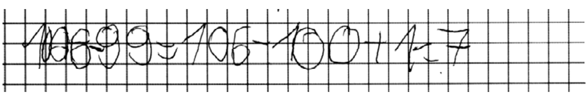


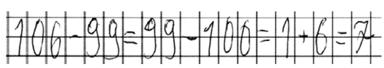
Wypełniając piramidkę uczeń, zamiast trudnego dodawania 39 + 25, wykonał zdecydowanie prostsze działanie: 40 + 24.

Nieco większą różnorodność stosowanych strategii przyniosło odejmowanie:

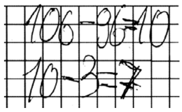
1.


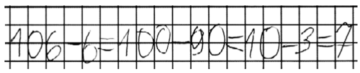
2.


3.


4.


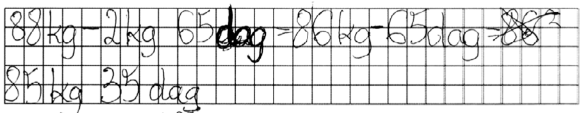
Dwie pierwsze metody są analogiczne do początkowych strategii dodawania. W trzecim obliczeniu uczeń uznał, i słusznie, że działanie 106 – 100 jest dużo prostsze, trzeba tylko potem dokonać korekty wyniku. Podobnie w strategii 4: uczeń zaczął od działania 100 – 99, po czym odpowiednio zwiększył uzyskany wynik.

5. 

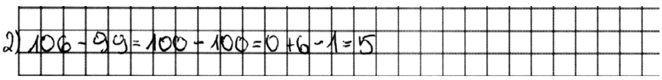
6. 

7. 

Strategie 5 i 6 to dwa różne przykłady sprytnego „odejmowania po kawałku”. Inny przykład zastosowania tej samej strategii pojawił się przy okazji odejmowania wyrażeń dwumianowanych:

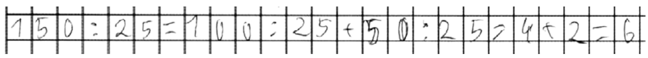


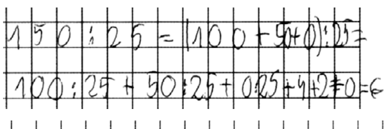
Bardzo ryzykownie, ale skutecznie, rozumował autor strategii 7, który (świadomie lub nie), wykorzystał zapis z minusem przed nawiasem. Stosowanie tej strategii wymaga albo sporej dojrzałości matematycznej, albo szczęścia, czego zabrakło np. autorowi tych obliczeń:

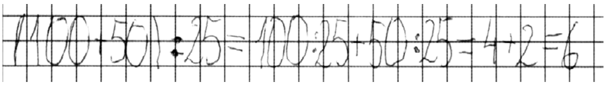


Podczas dzielenia 150 : 25 dominowały dwie metody postępowania:

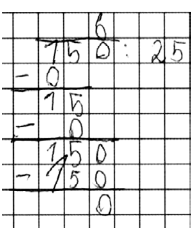
– rozkład:

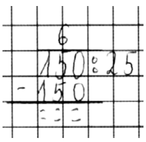


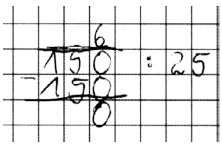




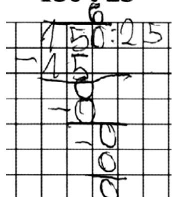
– oraz dzielenie pisemne lub jego próby:

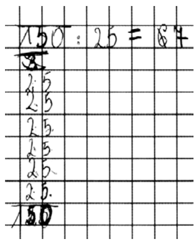


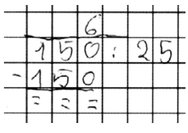


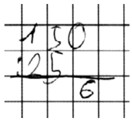


150 : 25

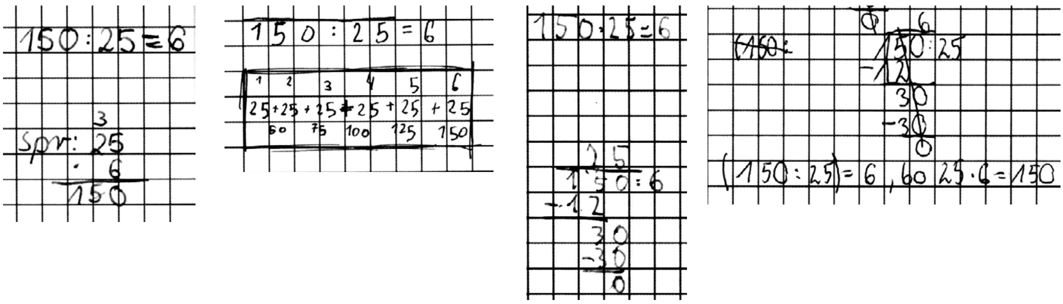






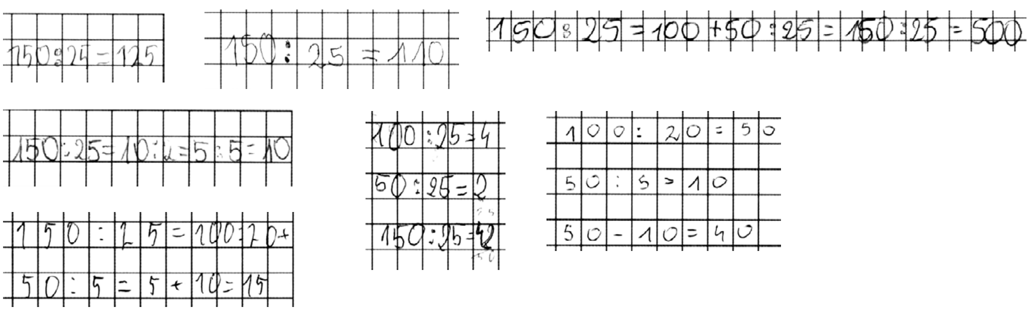


Pojawiły się także różne metody sprawdzenia, czy obliczony w pamięci wynik jest poprawny. Warto zwrócić uwagę na bardzo dojrzały pomysł sprawdzenia dzielenia za pomocą ... innego dzielenia.

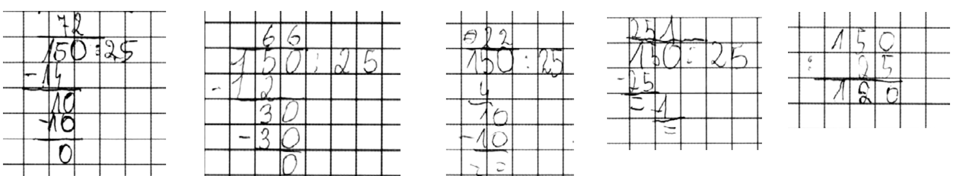


Przy okazji: czy przekreślone dzielenie pisemne na ostatniej kartce powyżej jest poprawnie wykonane?

Sporej liczby ciekawych obserwacji dostarczają błędne próby uczniów, niekiedy bardzo trudne do zinterpretowania – zarówno te związane przede wszystkim z rozkładem liczby 150:

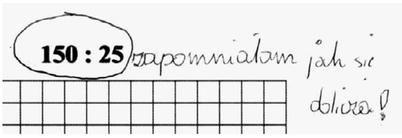


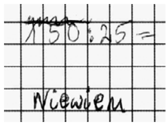
jak i dotyczące dzielenia pisemnego:

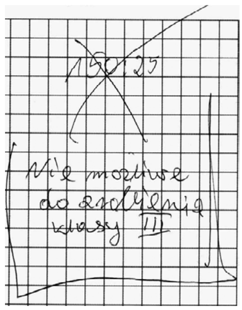


W dwóch początkowych próbach widać wyraźnie, jak uczniowie usiłują – przez analogię – zbudować ten algorytm: *jeśli dwucyfrowa, to może raz jedna cyfra, a raz druga?*

I tylko martwi „krzyk bezradności” części uczniów:







oraz niski ogólny poziom wykonania tego dzielenia – poniżej 50%.

A co z tą „większą połówką”? Prawdopodobnie ich wiedza dotycząca dzielenia nie daje się zastosować skutecznie nigdzie, poza najbardziej typowymi, „utrwalonymi” sytuacjami.

W różnorodności siła

Rozwińmy nieco i wzbogaćmy strategie, które pojawiły się w obliczeniach uczniów. Zacznijmy od dodawania:

26 + 37 = ?

- 20 i 30 to 50, 6 i 7 to 13, razem 63; jest to najpopularniejszy sposób dodawania w pamięci u dzieci i u dorosłych: najpierw dziesiątki, potem jedności;
- 6 i 7 to 13, 20 i 30 to 50, 50 i 13 to 63; mniej popularny od poprzedniego, ale również dość często występujący, bo bardzo „szkolny” – najpierw jedności, potem dziesiątki, czyli „od prawej do lewej”;
- 26 i 30 to 56, 56 i 7 to 63; zaczynamy dodawać „po kawałku”, ale na razie w sposób dość mechaniczny.

Zaletą tych trzech strategii jest, bez wątpienia, ich ogólność – dokładnie w ten sam sposób postępujemy w przypadku każdego wykonywanego dodawania (liczb dwucyfrowych). To, że nie zwracamy uwagi na specyfikę liczb występujących w działaniu jest także podstawową słabością tych strategii – nie ułatwiają nam one specjalnie życia.

- najpierw do 26 dodajmy 4, to będzie 30, i teraz dodajmy resztę, czyli 33, to razem 63; znowu „po kawałku”, ale sprytniej, bo zaczynamy od dopełnienia do pełnych dziesiątek;

– 37 i 3 to 40, i 23 to 63; dopełnienie „w drugą stronę”, które dla części dzieci może być obliczeniowo dużo prostsze od strategii poprzedniej – im liczba bliższa pełnej dziesiątki, tym łatwiejsze jest jej dopełnienie;

– 26 i 34 to 60, i jeszcze 3, to 63 (albo „w drugą stronę”); znowu dopełnienie, ale do dużo większej liczby dziesiątek;

– 25 i 35 to 60, z pierwszej liczby zostało 1, z drugiej 2, to razem 63 (albo „w drugą stronę”); niektóre dzieci preferują dodawanie „okrągłych” liczb, np. kończących się piątkami, takie dodawanie jest dla nich dużo łatwiejsze.

Te strategie odwołują się już do postaci dodawanych liczb, dzięki czemu obliczenia stają się znacznie prostsze. Można je stosować tam, gdzie występuje przekraczanie progu dziesiątkowego. Ostatnia strategia wymaga dodatkowo, aby cyfry jedności w dodawanych liczbach nie były mniejsze od 5.

Kolejne metody jeszcze szybciej prowadzą do celu:

– 30 i 37 to 67, ale to o 4 za dużo, więc 63 (albo: 40 i 26 to 66, ale to o 3 za dużo...); dużo łatwiej jest dodawać pełne dziesiątki, więc zastąpmy 26 przez 30, zróbmy proste dodawanie, a potem odpowiednio zmodyfikujmy wynik – trzeba go zmniejszyć o 4;

– 30 i 40 to 70, tu wzięliśmy o 4 za dużo, a tu o 3, to razem 7, czyli 63; tym razem zmienione zostały oba składniki;

– zamiast 26 i 37 mogę dodać 30 i 33 (albo: 40 i 23), to 63; jeśli jedną z liczb zwiększymy, a drugą zmniejszymy o tyle samo, to wynik pozostanie bez zmian, zróbmy to tak, aby otrzymać pełną dziesiątkę.

To tylko „pierwsza dziesiątka” możliwych sposobów znalezienia wyniku tego działania. Jeśli będziemy regularnie zachęcać dzieci do opowiadania, w jaki sposób wykonują obliczenia, to powyższa lista szybko uzupełni się o kolejne pomysły.

Podobne, a może i większe, bogactwo możliwych strategii istnieje także dla odejmowania:

53 – 28 = ?

– 13 odjąć 8 to 5, 40 odjąć 20 to 20, razem 25; najbardziej typowo „szkolny” sposób odejmowania, osoby dorosłe odejmujące w ten sposób w pamięci, często „widzą przed oczyma” odpowiedni „słupek”;

– 53 minus 20 to 33, 33 minus 8 to 25; zaczynamy odejmować po kolei, najpierw dziesiątki, potem jedności, czyli dość mechanicznie, bez zwracania uwagi na postać liczb;

– 53 minus 8 to 45 i jeszcze odjąć 20 to 25; analogicznie jak powyżej, ale zaczynając od jedności, niektórym osobom ta kolejność wydaje się bardziej naturalna, bo „od prawej do lewej".

Trzy metody, które mają dokładnie te same zalety i wady, co analogiczne metody dla dodawania: ogólność i wysoki poziom trudności wykonywanych obliczeń.

– 53 minus 3 to 50, teraz odejmujemy resztę, czyli 25; ponownie odejmowanie „po kawałku", ale znacznie sprytniej niż poprzednio, bo odejmowanie od pełnych dziesiątek jest dużo łatwiejsze;

– 53 odjąć 23, to 30, odjąć 5, to 25; znowu po kolei, ale zaczynając od największej możliwej wygodnej liczby.

Sprytne odejmowanie po kolei to potężna strategia, której użyteczność rośnie wraz z wielkością odejmowanych liczb (por. dalej).

– 50 minus 28 to 22, ale to o 3 za mało, więc 25; zastępujemy odejmowanie innym, prostszym, po czym robimy odpowiednią korektę wyniku;

– 48 odjąć 28, to 20, dodać 5, to 25; znowu zastępujemy działanie innym, dużo prostszym, o mniejszym wyniku, po czym uzupełniamy „braki";

– 58 minus 28, to 30, ale to o 5 za dużo, więc 25; tym razem końcowa korekta ma na celu odpowiednie zmniejszenie wyniku.

Okazuje się, że przy odrobinie sprytu odejmowanie staje się prostym działaniem. „Wygodne" zmniejszanie i zwiększanie odjemnej jest bezpieczną operacją – jest dość oczywiste, jak zmiany te wpływają na wielkość otrzymywanego wyniku. Dużo ryzykowniejszym pomysłem (por. s. 38), choć też skutecznym, jest „grzebanie" przy odjemniku:

– dużo łatwiej jest odjąć pełne dziesiątki, więc najpierw 53 odjąć 30, to 23, ale odjęliśmy o 2 za dużo, więc wynik będzie o 2 większy, czyli 25;

– 50 odjąć 30 to 20, teraz jeszcze 3 i 2, to 25.

Dwie następne strategie wymagają nie tylko sprytu, ale także spostrzegawczości:

– zamiast 53 odjąć 28, mogę wykonać dużo prostsze odejmowanie: 50 – 25, czyli 25; jeśli obie liczby zwiększymy lub zmniejszymy o tę samą liczbę, to nadal będą różnić się o tyle samo;

– jeszcze prościej jest, gdy odejmujemy pełne dziesiątki: 55 odjąć 30, to 25.

Tym razem mamy „pierwszą dwunastkę” strategii odejmowania w pamięci, a to jeszcze nie koniec.

Które z tych strategii dodawania i odejmowania są najlepsze? Odpowiedź jest prosta:

te, które dają uczniowi największe poczucie bezpieczeństwa, które rozumie i potrafi stosować, bo – być może – sam je wymyślił.

Zamiast trudnego – łatwe

Kolejka w sklepie spożywczym. Teraz my. *Trzydzieści cztery pięćdziesiąt* – informuje kasjerka. Dajemy 50 zł. Jeśli mamy szczęście, to – mimo obecności na ladzie kasy fiskalnej – usłyszymy za chwilę następujące słowa, towarzyszące wydawaniu reszty:

Trzydzieści pięć	(w naszą stronę wędruje moneta pięćdziesięciogroszowa);
Czterdzieści	(tym razem 5 złotych);
Pięćdziesiąt	(banknot 10 złotych);
Dziękuję	(na tym koniec, więcej już nie będzie).

Ile reszty dostaliśmy?

Trudne, czy nawet bardzo trudne, odejmowanie:

50 zł – 34,50 zł = ?

zostało zastąpione bardzo prostym dodawaniem:

0,50 zł + 5 zł + 10 zł = 15,50 zł.

Dlaczego ta metoda jest dobra? Bo różnica mówi nam o tym, o ile różnią się obie liczby, czyli ile trzeba dodać do mniejszej, aby otrzymać większą z nich. Taką strategię odejmowania przyjęto nazywać **odejmowaniem przez dopełnianie**.

Prześledźmy jej działanie na kilku przykładach:

16 – 9 = ?	**1** (do 10) i **6** (do 16) to **7**
34 – 16 = ?	**4** (do 20) i **10** (do 30) i **4** (do 34) to **18**
81 – 37 = ?	**3** (do 40) i **40** (do 80) i **1** (do 81) to **44**
103 – 46 = ?	**4** (do 50) i **50** (do 100) i **3** (do 103) to **57**

I stopniowo upraszczając zapis w miarę oswajania się z metodą i nabierania wprawy:

76 – 29 = ?	**1** (do 30) i **46** (do 76) to **47**
151 – 117 = ?	**3** (do 120) i **31** (do 151) to **34**

133 – 59 = ?	**41** (do 100) i **33** (do 133) to **74**
67 – 18 = ?	**2** i **47** to **49**
165 – 88 = ?	**12** i **65** to **77**
612 – 384 = ?	**16** i **212** to **228**
1006 – 539 = ?	**61** i **400** i **6** to **467**.

Proste obliczenia w pamięci (plus zapisanie kilku liczb, żeby nie trzeba było ich pamiętać) zamiast pisemnego odejmowania z trzykrotnym „rozmienianiem" obok siebie?

Strategia ta jest bardzo skuteczna w przypadku przykładów z wielokrotnym „rozmienianiem", i raczej nieskuteczna, gdy mamy obliczyć np. 689 – 235.

Zaradność arytmetyczna to nie tylko znajomość strategii, to także, a może nawet przede wszystkim, umiejętność podjęcia przez ucznia decyzji, która metoda w danej sytuacji będzie najlepsza.

Którą strategię wybrać?

Skuteczna metoda to taka, która uwzględnia specyfikę liczb występujących w działaniu, bo tylko do konkretnych liczb uczeń może dobrać właściwy „chwyt". Tam, gdzie pojawia się przekraczanie progów, zawsze jest do wyboru kilka sposobów sprytnego i bezpiecznego(!) wykonania obliczeń. Przy okazji mogą ujawnić się dodatkowo zupełnie nowe strategie:

35 + 47 = ?

35 + 45 + 2	33 + 47 + 2	35 + 50 – 3	40 + 50 – 8	....

66 + 58 = ?

66 + 4 + 30 + 24	50 + 50 + 16 + 8	66 + 60 – 2	64 + 60	....

88 + 79 = ?

90 + 80 – 3	80 + 80 + 8 – 1	90 + 79 – 2	....

165 + 57 = ?

160 + 60 + 5 – 3	165 + 55 + 2	....

117 + 36 = ?

120 + 40 – 7	....

A jak sprytnie poradzić sobie np. z dodawaniem:

48 + 29 + 25?

Tak: 50 + 30 + 25 – 3, tak: 48 + 2 + 29 + 1 + 22, czy w inny jeszcze sposób?

Taka sama sytuacja występuje w przypadku odejmowania – zawsze istnieje kilka możliwości:

61 – 39 = ?

61 – 31 – 8	1 + 21	69 – 39 – 8	62 – 40	....

94 – 57 = ?

94 – 54 – 3	3 + 34	90 – 53	....

115 – 66 = ?

34 + 15	115 – 15 – 51	....

331 – 164 = ?

36 + 131	....

Kwestię wyboru strategii do wykorzystania bez wątpienia warto zostawić najbardziej zainteresowanemu – czyli uczniowi. Nawet jeśli jego wybór nie będzie zgodny z naszym, co na pewno często będzie miało miejsce, to będzie to doskonała okazja do dyskusji o różnych możliwych metodach wykonywania obliczeń oraz plusach i minusach każdej z nich.

Pomóc trochę losowi

Dodawanie i odejmowanie to działania arytmetyczne, z którymi dziecko często obcuje w swoim codziennym życiu. Od samego początku buduje swoje wyobrażenia na ich temat i tworzy strategie wykonywania tych operacji.

Wystarczy pozwolić uczniom na stosowanie własnych metod obliczeniowych i opowiadanie o nich, aby w naturalny sposób ujawniały się różne strategie i uczniowie uczyli się ich wzajemnie od siebie. Pytajmy więc nie tylko: „*Ile to jest?*”, ale także jak najczęściej: „*Jak to obliczyłaś (obliczyłeś)?*”. Czasami można zrobić krok dalej, zadając pytanie: „*Dlaczego ten sposób jest dobry?*”. Nie zrażajmy się nieskładnymi odpowiedziami czy nawet ich brakiem – pytania tego typu uruchamiają dużo poważniejsze procesy myślowe niż sztampowe pytanie o wynik wykonanego działania. Uczą one wyjaśniania i uzasadniania, dotykają wprost rozumienia, a nie tylko stosowania schematów. Każda kolejna próba ucznia będzie lepsza i składniejsza od wcześniejszych – rozwijanie tych umiejętności wymaga bowiem okazji i czasu. Warto nagradzać (komentarzem, pochwałą, ...) sprytne i oryginalne strategie – przyczyni się to do większego zainteresowania ich ujawnianiem, a także poszukiwaniem.

Zachęcenie uczniów do opowiadania o swoich metodach ma jeszcze jedną, trudną do przecenienia, zaletę: dzięki temu możemy się dowiedzieć, jak uczniowie naprawdę myślą, co jest dla nich jasne i zrozumiałe, a co trudne. Im uczniowie więcej mówią, tym lepiej orientujemy się w ich rzeczywistej wiedzy, a co za tym idzie – dokładniej możemy śledzić ich rozwój. Gdy brakuje takiego „sprzężenia zwrotnego", gdy to przede wszystkim my mówimy, a dzieci słuchają i wykonują proste polecenia, możemy przeżyć spore rozczarowanie, gdy wreszcie dopuścimy je do głosu – ich wiedza czy sposób rozumowania mogą daleko odbiegać od tego, czego się spodziewaliśmy.

Tylko niektórzy uczniowie są w stanie skutecznie budować strategie, poruszając się jedynie w świecie symboli. Dużo więcej szans na to jest wówczas, gdy uczeń operuje narzędziami, gdy strategie mogą wyrosnąć z działania czy rysunku. Wielu okazji może nam dostarczyć samo życie:

Kupiłem dwa pudełka ciastek. Jedno kosztowało 4 zł 90 gr, a drugie 5 zł 85 gr. Ile za nie łącznie zapłaciłem?

Tu 5 zł bez 10 gr, a tu 6 zł bez 15 gr, razem 11 zł bez 25 gr, czyli 10 zł 75 gr.

Warto więc losowi pomagać, świadomie aranżując odpowiednie sytuacje albo wykorzystując te, które pojawią się w sposób przez nas niezaplanowany.

- *Adam i Marek grają w grę typu „wyścig". Pionek Adama znajduje się na polu 25, a pionek Marka na polu 28. O ile pól pionek Marka jest bliżej mety? W kolejnej rundzie gry każdy z nich wyrzucił po 3 oczka. Gdzie staną ich pionki? Jaka jest teraz przewaga Marka?*
- *W pierwszym stosiku jest 35 klocków, a w drugim 20. Gdzie jest więcej klocków? O ile? Z każdego stosika zabieramy po jednym klocku. Gdzie teraz jest ich więcej? O ile?*
- *Ania narysowała na kartce 18 kółek, a Jagoda 30. Która z nich narysowała ich więcej? O ile? Każda z dziewczynek dorysowała jeszcze po 2 kółka. Ile kółek ma każda z nich teraz? Która ma ich więcej? O ile?*
- *Na ławce leżą dwa stosiki klocków – w mniejszym jest 26 klocków, a w większym 37. Przekładamy 3 klocki z mniejszego stosika na większy. Co się stało z łączną*

liczbą klocków? Ile klocków będzie teraz w każdym ze stosików? A ile ich będzie razem?

– *Trzech chłopców dostało po tyle samo klocków. Każdy z nich rozłożył swoje klocki na dwie kupki i przeliczył, ile klocków jest w każdej kupce. Marek miał w mniejszej kupce 16 klocków, a w większej 28. Piotr miał 18 i 26, a Adam – 14 i 30. Któremu z nich będzie najłatwiej obliczyć, ile ma klocków? Dlaczego?*

– ...

„Okazje" symboliczne to następny, bardziej zaawansowany krok.

– *Spójrz na te działania. Czym się one różnią? A co je łączy? Uzupełnij wyniki.*

30 + 17 =	*33 + 17 =*	*20 + 26 =*	*15 + 40 =*
29 + 17 =	*33 + 18 =*	*19 + 25 =*	*16 + 39 =*
28 + 17 =	*33 + 19 =*	*18 + 24 =*	*17 + 38 =*
27 + 17 =	*33 + 20 =*	*17 + 23 =*	*18 + 37 =*
...	...	...	...
...	...	...	...

Jak będą wyglądały kolejne działania? Dlaczego?

– *Ponownie przyjrzyj się seriom działań. Co je łączy? Uzupełnij wyniki.*

30 – 17 =	*35 – 20 =*	*30 – 17 =*	*53 – 30 =*
31 – 17 =	*35 – 19 =*	*31 – 18 =*	*52 – 29 =*
32 – 17 =	*35 – 18 =*	*32 – 19 =*	*51 – 28 =*
33 – 17 =	*35 – 17 =*	*33 – 20 =*	*50 – 27 =*
...	...	...	...
...	...	...	...

Jakie będą wyniki kolejnych działań w każdej z tych serii?

– *Wszystkie te działania mają taki sam wynik. Jaki?*

21 – 7 *22 – 8* *23 – 9* *24 – 10*

Dlaczego ich wyniki są takie same?

– *52 – 47 = 5. Jakie inne liczby dwucyfrowe trzeba odjąć, aby otrzymać w wyniku 5?*

– ...

Praktyka pokazuje, że nie należy zmuszać dzieci, aby to samo obliczenie wykonywały na kilka różnych sposobów – trudno jest im wyjaśnić w zrozumiały (dla nich!) sposób sens ponownego liczenia czegoś, co już jest znane. Nie przeszkadza to jednak temu, żeby różni uczniowie pokazali swoje (różne) sposoby dojścia do wyniku.

Nie jest również dobrym pomysłem zmuszanie uczniów do zmiany stosowanej strategii liczenia, jeśli tylko strategia ta jest wystarczająco skuteczna. Zawsze natomiast warto pokazywać, że postępując w inny sposób, można było ten sam cel osiągnąć prościej i szybciej. Gdy dziecko zrozumie nową metodę, samo ją zastosuje, o ile faktycznie jest prostsza – **z jego punktu widzenia!**

Niespodziewane korzyści

Większość z tworzonych strategii ma znacznie szerszą przydatność niż na pierwszy rzut oka się wydaje. Prześledźmy to na przykładach:

64 dag + 57 dag = ? *50 + 50 + 14 + 7 (dag)* *64 + 36 + 21 (dag)* *70 + 60 – 9 (dag)* *60 + 60 + 4 – 3 (dag)* ...	***1 m 78 cm + 63 cm = ?*** *1 m 78 cm + 22 cm + 41 cm* *1 m 70 cm + 60 cm + 11 cm* *1 m 80 cm + 60 cm – 2 cm + 3 cm* *2 m + 63 cm – 22 cm* ...	***5 zł 85 gr + 3 zł 60 gr = ?*** *3 zł 60 gr + 40 gr + 5 zł 45 gr* *5 zł 40 gr + 3 zł 60 gr + 45 gr* *9 zł 60 gr – 15 gr* *10 zł – 55 gr* ...
93 cm – 67 cm = ? *93 – 63 – 4 (cm)* *3 + 23 (cm)* *96 – 70 (cm)* *97 – 67 – 4 (cm)* ...	***2 kg 30 dag – 94 dag = ?*** *6 dag + 1 kg 30 dag* *2 kg 30 dag – 30 dag – 64 dag* *2 kg 36 dag – 1 kg* ...	***7 zł 36 gr – 5 zł 88 gr = ?*** *12 gr + 1 zł 36 gr* *7 zł 36 gr – 5 zł 36 gr – 52 gr* ...
$\boldsymbol{{}^3/_4 + {}^3/_4 = ?}$ $^3/_4 + {}^1/_4 + {}^2/_4$ ... $\boldsymbol{1^1/_5 - {}^4/_5 = ?}$ $^1/_5 + {}^1/_5$ ...	***3,99 zł + 2,85 zł = ?*** *7 zł – 0,16 zł* ... ***16,30 zł – 7,89 zł = ?*** *0,11 zł + 2 zł + 6,30 zł* ...	***4,88 zł + 0,30 zł = ?*** *4,70 zł + 0,30 zł + 0,18 zł* ... ***1,12 zł – 0,87 zł = ?*** *0,13 zł + 0,12 zł* ...

Jak widać, czas poświęcony na budowanie przez dzieci strategii dodawania i odejmowania liczb naturalnych może procentować w wielu innych momentach procesu kształcenia: przy operacjach na wyrażeniach jedno- i dwumianowanych, przy dodawaniu i odejmowaniu wyrażeń dwumianowanych zapisanych dziesiętnie, a nawet przy okazji ułamków zwykłych.

Musimy tylko sami mieć tego świadomość, żeby w odpowiednim momencie ułatwić dzieciom zauważenie tych analogii albo zwrócić na nie ich uwagę.

W ten sposób uczniowie nie tylko przekonują się o użyteczności stosowanych przez siebie metod i nabierają wiary w swoje siły, ale także poznają jedno z najpotężniejszych narzędzi matematycznej twórczości – **rozumowanie przez analogię**.

Rzut oka w przyszłość

Te same strategie przydadzą się jeszcze wielokrotnie w klasach starszych:

– gdy trzeba będzie dodawać i odejmować większe liczby

5088 + 1976 = ?	1976 + 24 + 5064	5100 + 1900 – 12 + 76	...
5031 – 3848 = ?	52 + 100 + 1031	5048 – 3848 – 17	...

– gdy w centrum zainteresowania ucznia znajdą się liczby dziesiętne

4,85 + 3,67 = ?	4,85 + 3,15 + 0,52	5 + 4 – 0,15 – 0,33	...
13,12 – 8,8 = ?	0,2 + 1 + 3,12	13,32 – 9	...

– gdy operacje na ułamkach o takich samych mianownikach zaczną się komplikować

$\mathbf{4\,{}^{5}/_{7} + 3\,{}^{4}/_{7} = ?}$	$5 + 3\,{}^{2}/_{7}$	$5 + 4 - {}^{2}/_{7} - {}^{3}/_{7}$	...
$\mathbf{7\,{}^{1}/_{8} - 5\,{}^{6}/_{8} = ?}$	${}^{2}/_{8} + 1\,{}^{1}/_{8}$	$7\,{}^{1}/_{8} - 5\,{}^{1}/_{8} - {}^{5}/_{8}$	...

– a nawet w takich, spędzających często uczniom sen z powiek, sytuacjach:

$4\,{}^{1}/_{8} - 3\,{}^{8}/_{9} = {}^{1}/_{9} + {}^{1}/_{8} = ...,$

w których wprawdzie nie dostaniemy od razu wyniku, ale bardzo trudne odejmowanie zastąpimy nieporównywalnie prostszym dodawaniem.

I tylko przy okazji nasuwa się pytanie: *Do czego potrzebne są nam tradycyjne algorytmy dodawania i odejmowania pisemnego?*

STOSOWANIE ALGORYTMÓW DZIAŁAŃ PISEMNYCH

Algorytmy działań pisemnych to chyba najbardziej „stabilny” obszar tematyczny szkolnej matematyki. Od lat jest to jedno z najważniejszych matematycznych zagadnień polskiego nauczania początkowego (i klas następnych), które pochłania mnóstwo czasu i energii wszystkich najbardziej zainteresowanych: nauczycieli, uczniów, a także ich rodziców. Przez ostatnie pięćdziesiąt lat w polskiej szkole pod tym względem nie zmieniło się nic. Na ogół nie zmienił się również sposób, w jaki dzieci uczą się algorytmów działań pisemnych – dzisiaj uczniowie poznają i opanowują je w ten sam sposób, jak ich rodzice ćwierć wieku temu, a rodzice robili to tak samo jak ich rodzice, kolejnych dwadzieścia pięć lat wcześniej.

Trudno znaleźć inny fragment szkolnej edukacji, w którym tradycja byłaby bardziej namacalna i bardziej powszechnie akceptowalna.

Opanowanie każdego z czterech algorytmów działań pisemnych badane było za pomocą trzech przykładów o rosnącym stopniu trudności:

A	B	C
$1548 + 216$	$335 + 468$	$4675 + 948$
$576 - 439$	$655 - 478$	$1306 - 428$
$46 \cdot 9$	$227 \cdot 3$	$839 \cdot 8$
$336 : 6$	$3318 : 7$	$1228 : 4$

Procent poprawnie wykonanych obliczeń dla każdego z tych przykładów przedstawia diagram:

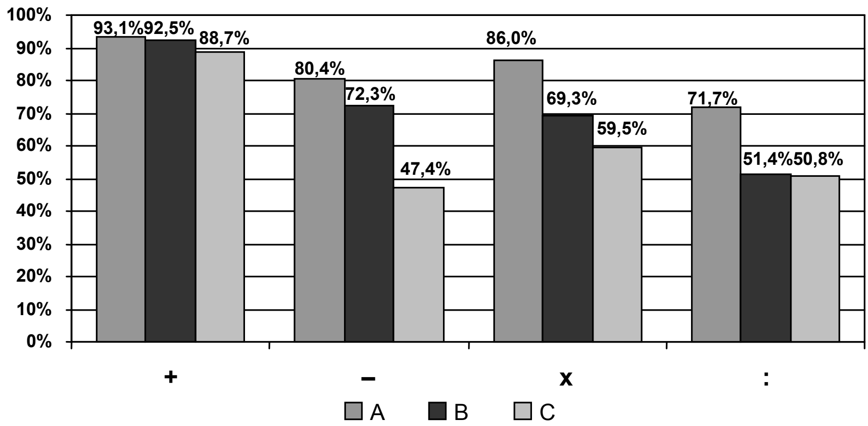


Diagram 8. Stosowanie algorytmów działań pisemnych – procent poprawnych obliczeń.

Uwagę zwraca wysoki poziom wykonania dodawania, odpowiednio: 93,1%, 92,5% oraz 88,7%. Jak widać, rosnąca liczba kolejnych „przekroczeń” (jedno, dwa obok siebie i trzy) nie miała wyraźnego wpływu na liczbę bezbłędnych obliczeń. Jest to zdecydowanie najlepiej opanowany przez uczniów algorytm. Aż 74,7% uczniów wykonało poprawnie wszystkie trzy obliczenia (por. diagram 9), a tylko 1,2%, czyli mniej więcej 30 uczniów spośród około 2500 biorących udział w badaniu, nie poradziło sobie z żadnym z trzech przykładów.

W podobny sposób dobrano przykłady dotyczące odejmowania – jedno „rozmienianie”, dwa „rozmieniania” obok siebie i trzy „rozmieniania” z zerem w odjemnej. Obliczenia te wykonało poprawnie odpowiednio: 80,4%, 72,3% oraz 47,4% uczniów. Ostatnie działanie odejmowania (przykład **C**) okazało się najtrudniejsze do wykonania ze wszystkich dwunastu obliczeń pisemnych. Odejmowanie sprawiło uczniom wyraźnie więcej trudności niż dodawanie: 35,6% uczniów poradziło sobie ze wszystkimi trzema przykładami, a 11,3% nie wykonało poprawnie żadnego z nich. Zdecydowana większość błędów wiązała się z niewłaściwie wykonywaną operacją „rozmieniania” (por. s. 54).

W przypadku mnożenia o trudności obliczenia decydowała przede wszystkim wielkość występujących w nim liczb. Kolejne przykłady zrobiło poprawnie 86,0%, 69,3% i 59,5% uczniów, a 42,1% z nich poradziło sobie ze wszystkimi trzema „słupkami”.

Stosunkowo najsłabiej wypadło dzielenie – odpowiednio 71,7%, 51,4% oraz 50,8% poprawnych obliczeń dla kolejnych przykładów. Przykład **A** to jedno z najprostszych działań dzielenia, „kwalifikujące się” do pisemnego wykonania. Także przykład **B**, o nieco większych liczbach, wymagał zastosowania algorytmu w najprostszej typowej postaci. W przykładzie **C** pojawia się zero w ilorazie, co sprawiło uczniom, zgodnie z oczekiwaniami, sporo kłopotu (por. s. 56).

Widać wyraźnie, że rozkład procentowy poprawnie wykonanych przez dzieci obliczeń jest dla dzielenia zdecydowanie bardziej wyrównany niż dla trzech pozostałych działań. Zwraca uwagę fakt, że ponad $^1/_5$ badanych uczniów nie wykonała poprawnie żadnego z trzech przykładów dzielenia pisemnego – nawet przykładu **A**, który, przy odrobinie wprawy, daje się obliczyć w pamięci.

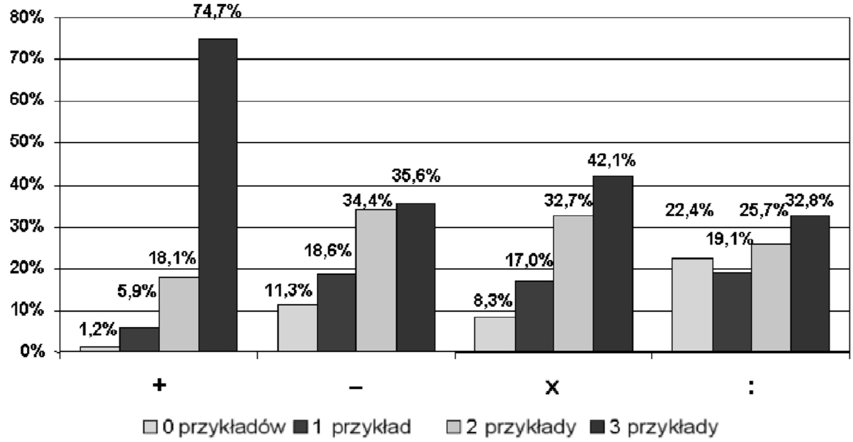
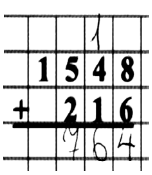
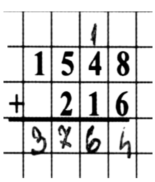
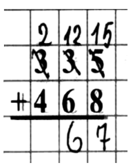


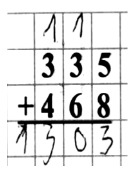
Diagram 9. Stosowanie algorytmów działań pisemnych – procent poprawnie wykonanych przykładów.

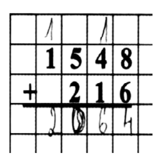
W przypadku dodawania pisemnego błędów było niewiele i w znacznej mierze wynikały one z nieuwagi uczniów, np. pominięcia ostatniej cyfry sumy (1), dwukrotnego dodania tej samej cyfry krótszego składnika (2) czy zakończonej niepowodzeniem próby wykonania odejmowania zamiast dodawania (3). Dała się zauważyć jedna, powtarzająca się kategoria błędów: w którymś momencie obliczenia uczeń przestawał dodawać i zaczynał niespodziewanie mnożyć (4, 5) – nowy algorytm zaburza algorytm poznany wcześniej.

1.


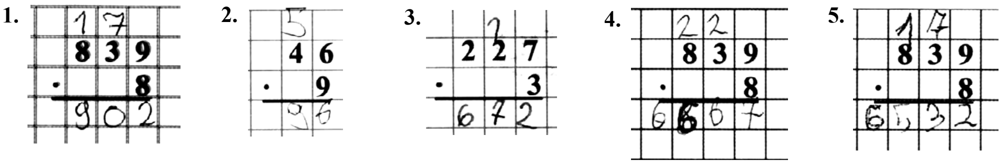
2.


3.


4.


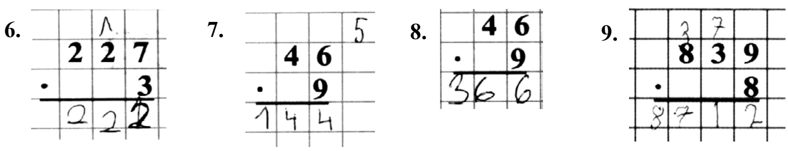
5.


Analogiczną sytuację dostrzec można w mnożeniu pisemnym – uczeń zaczyna mnożyć, po czym „przechodzi” na dodawanie (por. 1 i 2 poniżej). Jest to być może sygnał, że zapoznawanie dzieci z algorytmami różnych działań pisemnych powinno być w procesie kształcenia bardziej od siebie oddalone w czasie, niż to jest w tej chwili w przypadku większości podręczników.

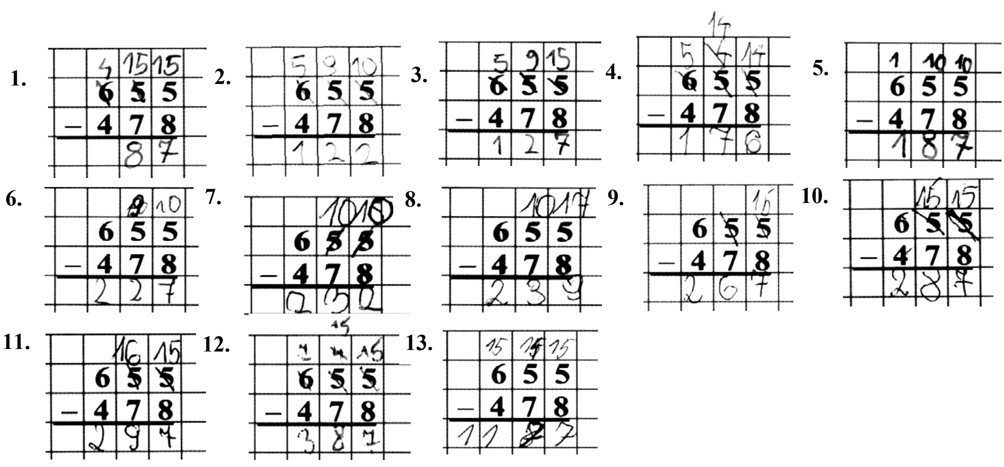


Warto zwrócić uwagę na jeszcze jedną kategorię pojawiających się błędów – uczeń wykonuje w pamięci właściwe obliczenie, po czym cyfry wyniku zamienia miejscami (3–5).

Obliczenia części uczniów pokazują, że dopiero oswajają się oni z nowym algorytmem (6–8), jednak zdecydowana większość popełnianych przez nich błędów była konsekwencją kłopotów z tabliczką mnożenia oraz zwykłego gapiostwa (9).



O tym, że odejmowanie pisemne jest trudnym działaniem wiemy wszyscy. Ale – żeby w pełni uświadomić sobie, jak bardzo trudną dla uczniów operacją jest pisemne odejmowanie, zwłaszcza zaś tzw. „rozmienianie” – trzeba mieć przed oczyma ich próby:

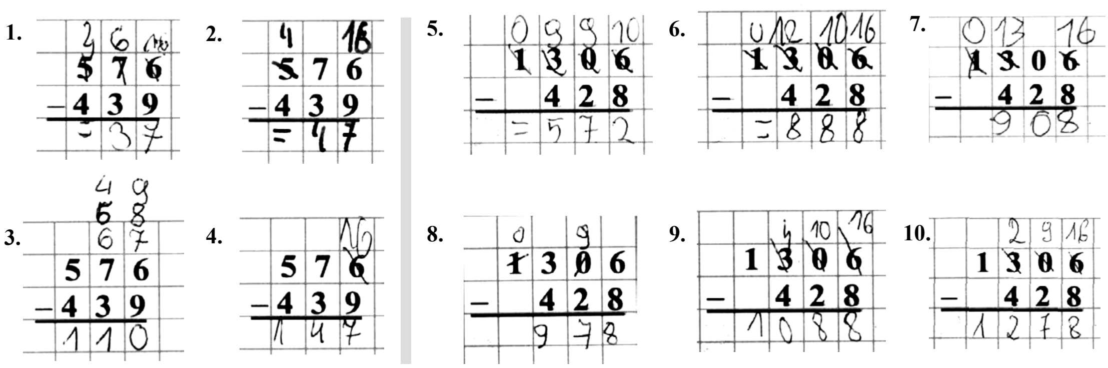


Jedno działanie – dwa „rozmieniania” obok siebie, więc raczej średnio trudne – i 13 różnych błędnych wyników, a każdy jest efektem innej pomyłki przy rozmienianiu!

Warto je uważnie przeanalizować. Źródło niektórych (np. 2, 5, 6, 7, 10 – powyżej) jest dość oczywiste, ale jak rozumowali autorzy np. obliczeń 1, 8 czy 11?

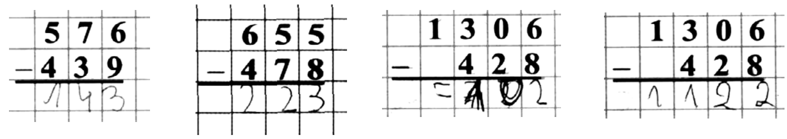
Wbrew pozorom, to bogactwo typów błędów nie jest efektem bezmyślności dzieci – raczej wprost przeciwnie: jest to efekt ich pomysłowości. Autorzy tych obliczeń nie zrozumieli procedury pisemnego odejmowania, nie opanowali jeszcze sztuki wykonywania kolejnych kroków algorytmu, zaczęli więc budować swoje własne strategie postępowania, niestety błędne, natomiast rozmaitość zastosowanych metod jest rzeczywiście zaskakująca.

Spójrzmy także na dwa pozostałe działania odejmowania:



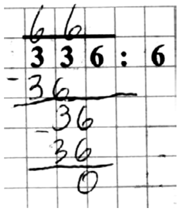
Większość typów błędów się powtarza, ale nie wszystkie. Jak np. rozumował autor obliczenia 3?

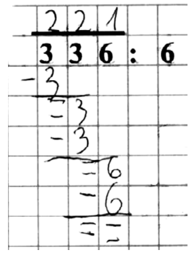
Zwraca także uwagę pewna liczba błędów, wynikających z przestawiania cyfr w odjemnej i odjemniku:

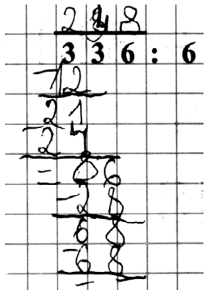


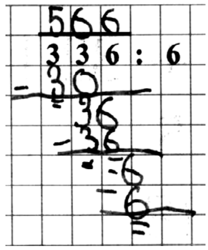
Także i one mogą być efektem ucieczki od „rozmieniania”.

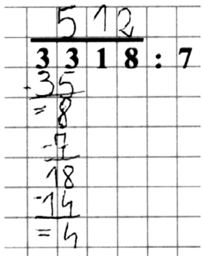
Bogactwo błędów pojawiło się także w pisemnym dzieleniu. Widać, że znaczna część uczniów zupełnie nie wie, co przez co należy podzielić czy pomnożyć (2, 3, 6, 7, 8 – poniżej), co od czego odjąć (1, 5, 7, 8) i gdzie zapisać otrzymane wyniki (1, 3, 4, 5, 6) – i to niezależnie od złożoności przykładu:

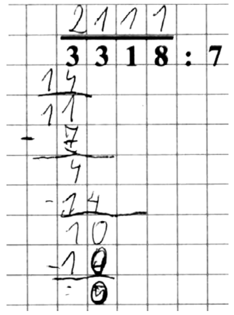
1. 

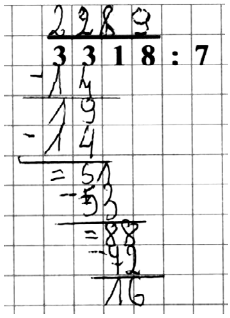
2. 

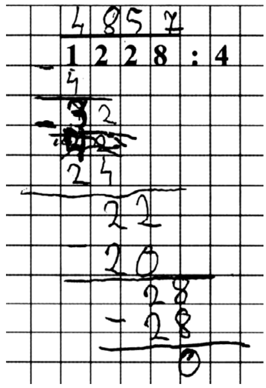
3. 

4. 

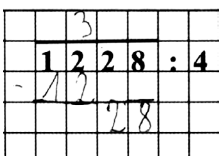
5. 

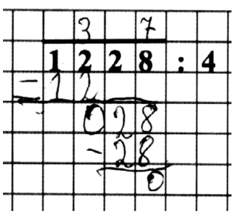
6. 

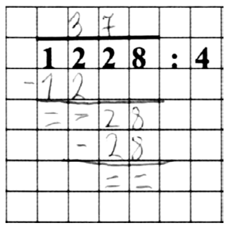
7. 

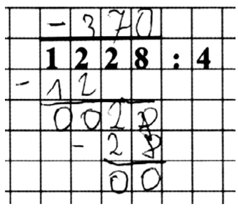
8. 

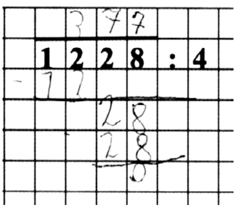
Przykład **C** (1228 : 4) pokazał dużą rozpiętość uczniowskich reakcji na obecność zera w ilorazie – od obliczeń w pełni poprawnych, przez dające się zrozumieć próby „dopasowania" zapisu do zaistniałej sytuacji (por. 1–5 – poniżej), po działania i zapisy już dość abstrakcyjne (6–8):

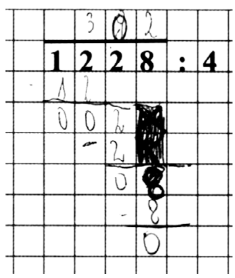
1. 

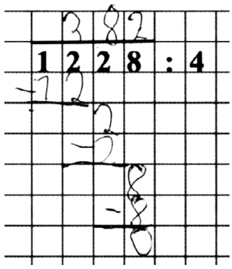
2.. 

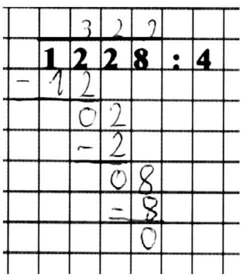
3. 

4. 

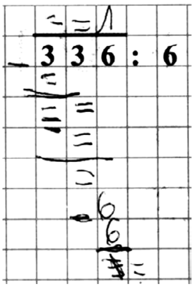
5. 

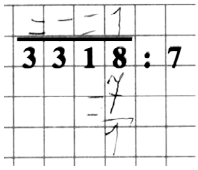
6. 

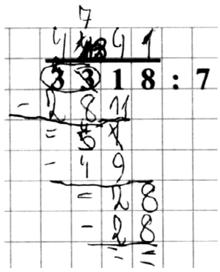
7. 

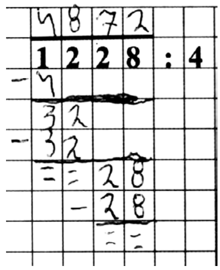
8. 

Uderza bezkrytyczność uczniów, którym nie przeszkadzają wyniki ani szokująco małe, ani też zadziwiająco duże (por. też wyżej):

1.


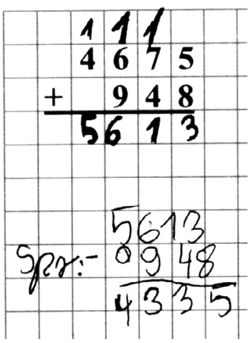
2.


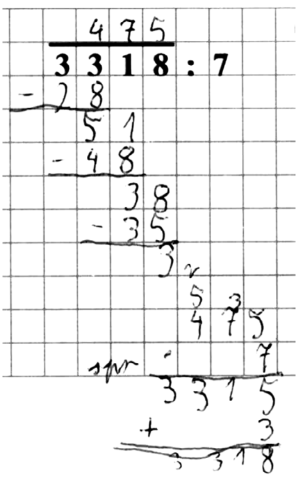
3.


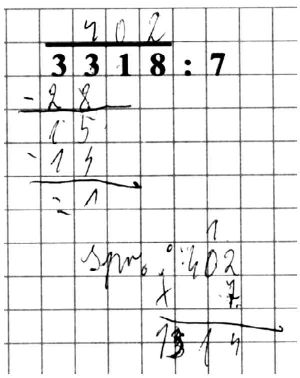
4.


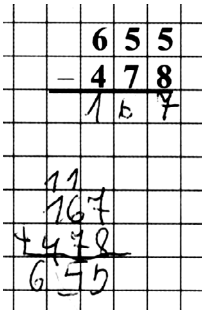
Widać, że algorytm pisemnego dzielenia jest dla znacznej części uczniów kończących klasę 3 procedurą niezrozumiałą, która nie została jeszcze wystarczająco „utrwalona” (por. s. 92).

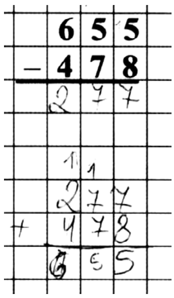
Odrębną kwestią jest sprawdzanie poprawności wykonywanych obliczeń, które – niezależnie od typu działania – pojawiało się sporadycznie i było traktowane przez uczniów z dużą beztroską:

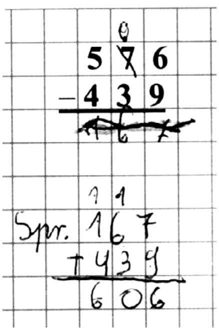
1.


2.


3.


4.


5.


6.


Wydaje się, że dla części uczniów sprawdzanie poprawności obliczenia jest co najwyżej zewnętrznym przymusem, pozbawionym głębszego sensu. Autor jednego tylko z powyższych obliczeń (6) wyciągnął wniosek z tego, że sprawdzenie dało inny wynik niż powinno, ale jego reakcja nie była zbyt konstruktywna – przekreślił wynik, zamiast podjąć próbę szukania błędu.

Być może za mało uwagi poświęcamy nie tyle samej czynności sprawdzenia, co jej sensowi, a zwłaszcza sposobom zachowania się, gdy sprawdzenie pokazuje, że pomyliliśmy się w obliczeniach. Co wtedy należy zrobić? Czy można jakoś wykorzystać wynik sprawdzenia? W rozwiązaniu 6 jest on o 30 większy od odjemnej, więc…

W badaniu przeprowadzonym w klasie 4 także wykorzystano przykłady sprawdzające umiejętność odejmowania, mnożenia i dzielenia pisemnego – identyczne co do swej struktury i poziomu trudności z przykładami z serii **C** w klasie 3 (np. 1405 – 537, 869 × 8, 1545 : 5).

Oto porównanie wyników przykładów tego samego typu z klas trzecich i czwartych:

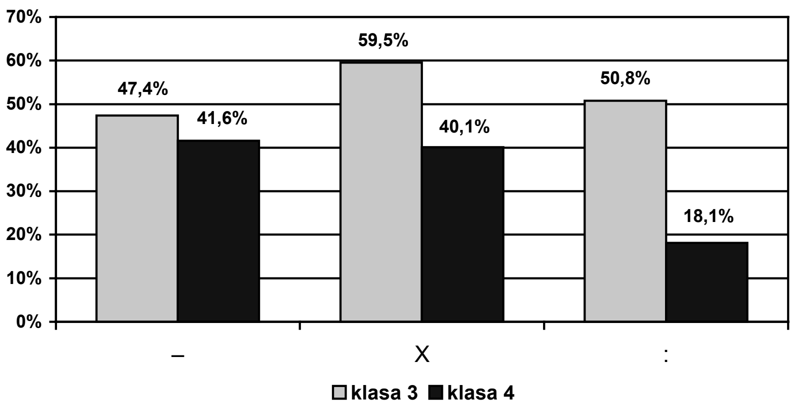


Diagram 10. Stosowanie algorytmów działań pisemnych – porównanie wyników klas trzecich i czwartych.

Przypomnijmy, że w badaniu w klasie 4 uczestniczyło ponad 400 uczniów spośród prawie 2500 uczestników badania w klasie 3 – zatem to ci sami uczniowie, starsi o kilka miesięcy. Testy w klasach czwartych przeprowadzono w drugiej połowie października, czyli dla większości (a może nawet wszystkich) używanych w naszych szkołach podręczników matematyki przed realizacją tematów dotyczących mnożenia i dzielenia pisemnego przez liczby wielocyfrowe. Można więc uznać, że zestawienie to ilustruje trwałość opanowania przez uczniów w klasie 3 umiejętności odejmowania, mnożenia i dzielenia pisemnego.

Spadek poziomu wyników jest szczególnie wyraźny w przypadku dzielenia oraz mnożenia, czyli tych algorytmów, z którymi uczniowie obcowali najkrócej, ponieważ zapoznają się z nimi na ogół w trakcie drugiego semestru klasy 3. Co ciekawsze, w przypadku dzielenia najgorzej wypadły szkoły miejskie: 12,4% poprawnych obliczeń.

Oczywiste jest, również w świetle prezentowanych wyników, że większość uczniów opanowuje algorytmy działań pisemnych w sposób całkowicie mechaniczny, bez zrozumienia sensu i istoty kolejnych składających się na nie kroków. Co więcej – ich doświadczenia i wiedza dotyczące algorytmów są oderwane od innych, być może trwalszych, obszarów wiedzy matematycznej. Efektem jest szybkie i nieuchronne zapominanie – chyba, że wiedza dzieci na ten temat będzie co pewien czas odświeżana i ponownie utrwalana, aż do wystąpienia zjawiska zwanego „przeuczeniem" i sprowadzenia działań uczniów do poziomu „odruchu".

W związku z tym nasuwają się dwa pytania:

Czy satysfakcjonującego, z punktu widzenia rachunkowej sprawności uczniów, efektu nie można osiągnąć w inny, niż stosowany od lat w polskiej szkole, sposób?

I czy w ogóle warto dziś, na początku XXI w., poświęcać tyle czasu i wspólnego wysiłku na algorytmy działań pisemnych?

Czy to musi być ten algorytm?

Próbę sformułowania odpowiedzi na pierwsze z zadanych wyżej pytań zacznijmy od algorytmu pisemnego dzielenia i od rozważenia następującej sytuacji:

Szesnastoosobowa grupa uczniów wróciła z wycieczki. Po dokonaniu wszystkich opłat okazało się, że z zebranych pieniędzy pozostało 576 złotych. Postanowiono zwrócić je uczestnikom wycieczki, każdemu po tyle samo. Po ile dostał każdy uczeń?

Co trzeba zrobić, żeby odpowiedzieć na to pytanie? Pierwsza, nasuwająca się w naturalny sposób, odpowiedź dorosłego brzmi: należy wykonać dzielenie

$$576 : 16.$$

Odruchowo dokonaliśmy matematyzacji sytuacji przedstawionej w zadaniu, narzucając pewien schemat rozwiązania. Mimo, że dzieci nie potrafią jeszcze wykonać takiego dzielenia, to z rozwiązaniem tego realistycznego zadania i tak sobie doskonale poradzą.

O co chodzi w tym zadaniu? O rozdanie 576 złotych po równo między 16 osób. Zacznijmy je więc rozdawać.

Na początku każdemu uczestnikowi wycieczki możemy dać po 10 złotych, czyli łącznie 160 złotych. Do rozdania zostało nam jeszcze 416 złotych.

To jeszcze raz po 10 złotych dla każdego, czyli znowu 160. Zostało jeszcze 256.

Kolejne 10 złotych dla każdego, 160 łącznie. Do rozdania zostało jeszcze 96 złotych.

Po 10 złotych już nie możemy, ale możemy po 5. To razem 80 złotych. Zostaje jeszcze 16.

To każdemu po złotówce i koniec rozdawania.
Każdy uczestnik wycieczki otrzymał po 36 złotych.
Dzielenie – i to przez liczbę dwucyfrową – wykonane.

$$\left.\begin{array}{r}1\\5\\10\\10\\10\end{array}\right\}\text{razem 36}$$

$$\begin{array}{r l}\hline 576 & : 16\\ -160 & \\ \hline 416 & \\ -160 & \\ \hline 256 & \\ -160 & \\ \hline 96 & \\ -80 & \\ \hline 16 & \\ -16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Algorytm to procedura, która spełnia dwa warunki:
1) składa się z powtarzalnych kroków,
2) poprawnie zastosowana – gwarantuje sukces.

Ponieważ kolejne kroki postępowania zapisywaliśmy i możemy to postępowanie z sukcesem powtórzyć dla każdego innego dzielenia, więc mamy tu do czynienia z **algorytmem dzielenia pisemnego**. Z algorytmem, który powstał w efekcie zapisywania kolejnych czynności wykonywanych przez ucznia, po to, by ułatwić znalezienie wyniku. Taka jest właśnie naturalna geneza algorytmów działań pisemnych – notowanie wykonywanych w pamięci czynności, żeby łatwiej i pewniej dojść do poszukiwanego wyniku.

Dodatkowo, dzieląc w przedstawiony wyżej sposób, robimy, mówimy i piszemy dokładnie to samo. Nie ma więc żadnych umów, tajemnic, skrótów myślowych czy słów, które znaczą co innego niż powinny – z czym mamy do czynienia w przypadku algorytmu dzielenia (i innych algorytmów również) powszechnie stosowanego w naszej szkole.

Prześledźmy tę procedurę raz jeszcze, na nieco prostszym przykładzie.

294 uczniów wybiera się siedmioma autokarami na wycieczkę. W każdym autokarze ma jechać tylu samo uczniów. Po ilu uczniów będzie w każdym autokarze?

Czyli: 294 uczniów mamy „po równo" rozmieścić w 7 autokarach. Zacznijmy więc ich sadzać.

Do każdego autokaru wchodzi po 10 uczniów, to razem 70. Zostało jeszcze 224.

To znowu po 10, czyli 70 łącznie. Jeszcze 154.

$$\left.\begin{array}{r}2\\20\\10\\10\end{array}\right\}\text{razem 42}$$

$$\begin{array}{r l}\hline 294 & : 7\\ -70 & \\ \hline 224 & \\ -70 & \\ \hline 154 & \\ -140 & \\ \hline 14 & \\ -14 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Widać, że możemy ten proces trochę przyspieszyć, tym razem do każdego autokaru wsiada po 20 uczniów, czyli razem 140.

Jeszcze po 2 i można jechać.

Wynik: w każdym autokarze będzie po 42 uczniów.

Zobaczmy, jak w inny jeszcze sposób mogło przebiegać rozumowanie ucznia w przypadku tego dzielenia:

1.

$$\left.\begin{array}{r}2\\10\\10\\10\\ \underline{10}\end{array}\right\}\text{razem } 42$$

$$\begin{array}{rl}294 & : 7\\ \underline{-70} & \\ 224 & \\ \underline{-70} & \\ 154 & \\ \underline{-70} & \\ 84 & \\ \underline{-70} & \\ 14 & \\ \underline{-14} & \\ 0 & \end{array}$$

2.

$$\left.\begin{array}{r}2\\30\\ \underline{10}\end{array}\right\}\text{razem } 42$$

$$\begin{array}{rl}294 & : 7\\ \underline{-70} & \\ 224 & \\ \underline{-210} & \\ 14 & \\ \underline{-14} & \\ 0 & \end{array}$$

3.

$$\left.\begin{array}{r}20\\20\\ \underline{2}\end{array}\right\}\text{razem } 42$$

$$\begin{array}{rl}294 & : 7\\ \underline{-14} & \\ 280 & \\ \underline{-140} & \\ 140 & \\ \underline{-140} & \\ 0 & \end{array}$$

Cztery różne sposoby wykonania tego samego dzielenia – każdy tak samo dobry.

Stosując ten algorytm, uczeń może dobierać takie operacje, które dają mu największe poczucie bezpieczeństwa – jeśli ma kłopoty z mnożeniem, może „rozdawać” po 10, 5 i 1, a i tak dojdzie do właściwego wyniku. Przy odrobinie sprytu może tak „regulować” przebieg dzielenia, aby unikać, czy chociaż zmniejszać ilość, trudnych odejmowań do wykonania.

Algorytm pisemnego dzielenia, przy którym można być sprytnym? Jak to się ma do wizerunku algorytmu jako czegoś zupełnie zwalniającego z myślenia?

Gdy uczeń nabierze wprawy, może podjąć próbę rozdania wszystkich dziesiątek od razu. Jej efekt jest chyba dość zaskakujący, zwłaszcza w zestawieniu z klasycznym algorytmem:

$$\left.\begin{array}{r}2\\ \underline{40}\end{array}\right\}\text{razem } 42$$

$$\begin{array}{rl}294 & : 7\\ \underline{-280} & \\ 14 & \\ \underline{-14} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl}\underline{42} & \\ 294 & : 7\\ \underline{-28} & \\ 14 & \\ \underline{-14} & \\ 0 & \end{array}$$

Jedynie dwie nieznaczne różnice w zapisie dzielenia i ogromna przepaść w dostępności każdej z tych procedur oraz jej „zrozumiałości”.

Najwyższa pora usunąć nieścisłość, która pojawiła się w tytule tego paragrafu – **to nie jest inny algorytm!** To ten sam, ale zupełnie inaczej pokazany dzieciom, nie od razu w swej najkrótszej, najtrudniejszej i najbardziej hermetycznej postaci, lecz w postaci, która może rozwijać się wraz z uczniem, aż – jeśli uznamy to za wskazane – do swojej wersji klasycznej.

Jak wygląda sytuacja w przypadku dzielenia np. liczby trzycyfrowej przez jednocyfrową?

888 : 6 = ?

$$\left.\begin{array}{r}3\\5\\10\\20\\10\\\underline{100}\end{array}\right\}148$$

$$\begin{array}{r}888 : 6\\\underline{-\ 600}\\288\\\underline{-\ 60}\\228\\\underline{-\ 120}\\108\\\underline{-\ 60}\\48\\\underline{-\ 30}\\18\\\underline{-\ 18}\\0\end{array}$$

Tu lepiej rozdać po 20, łatwiej będzie odjąć!

$$\left.\begin{array}{r}8\\20\\20\\\underline{100}\end{array}\right\}148$$

$$\begin{array}{r}888 : 6\\\underline{-\ 600}\\288\\\underline{-\ 120}\\168\\\underline{-\ 120}\\48\\\underline{-\ 48}\\0\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}8\\40\\\underline{100}\end{array}\right\}148$$

$$\begin{array}{r}888 : 6\\\underline{-\ 600}\\288\\\underline{-\ 240}\\48\\\underline{-\ 48}\\0\end{array}$$

Trzy poprawne obliczenia, o rosnącej zwięzłości i tempie dojścia do poszukiwanego wyniku. Powtórzmy raz jeszcze: w tej różnorodności jest siła tego algorytmu – umiejętnie wykorzystywany **pozwala on każdemu dziecku na wybór własnego bezpiecznego sposobu osiągnięcia celu**. Algorytm ten umożliwia indywidualny, ciągły rozwój ucznia i stopniowe doskonalenie stosowanych przez niego metod obliczeniowych – pozwala dziecku na uczenie się. Chroni także uczniów przed znużeniem i zniechęceniem, będącym częstym efektem żmudnego i bezmyślnego powtarzania tych samych czynności[9].

Poznawanie, także konkretnego algorytmu, **to proces**. Pamiętajmy, że algorytm może i powinien „rozwijać się" wraz z dzieckiem i że w przypadku różnych dzieci może rozwijać się w różny sposób, a także w różnym tempie.

Z pamięci na papier?

Nikomu nie sprawia trudności dodanie czy odjęcie w pamięci dwóch liczb dwucyfrowych, gdy działania te nie wymagają przekraczania progów. Kłopoty zaczynają się pojawiać, gdy rosną liczby czy komplikują się działania i podczas obliczeń trzeba „przechowywać" pewne wyniki cząstkowe w pamięci. Jak można w takiej sytuacji ułatwić sobie życie?

Wystarczy kartka papieru, na której możemy zapisywać efekty wykonywanych w pamięci operacji – rachowanie w pamięci staje się naturalnym punktem wyjścia do narodzin kolejnych algorytmów działań pisemnych.

67 + 28 = ?

Większość osób – zarówno dzieci, jak i dorosłych – wykonuje tego typu dodawanie następująco:

60 i 20 to 80; 7 i 8 to 15; 80 i 15 to 95.

Wykonywane składowe obliczenia można „dla pamięci" zapisać (zachowując ich kolejność) na kilka sposobów, w tym np. tak:

$$\begin{array}{r} 67 \\ \underline{+\,28} \\ 80 \\ \underline{+\,15} \\ 95 \end{array}$$

W ten sposób otrzymaliśmy jasny, czytelny i – co więcej – zgodny z wcześniejszymi doświadczeniami i działaniami dzieci, **algorytm dodawania pisemnego**.

W przypadku dwóch liczb o tej samej długości, czyli dwucyfrowych lub trzycyfrowych, naturalne jest wykonywanie dodawania w pamięci „od lewej do prawej", czyli

[9] Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 3, WSiP, Warszawa 1985.

najpierw dziesiątki, potem jedności lub najpierw setki, potem dziesiątki, na końcu jednostki.

Jest to zresztą rozsądna metoda – przy wszelkiego rodzaju szacowaniach decydujący wpływ na skalę wyniku ma właśnie rząd najwyższy. Wynika ona również z naturalnego kierunku czytania.

Co dzieje się, jeśli uczeń dodaje w pamięci liczby, zaczynając od strony prawej, czyli od jedności? Wówczas jego „słupek” może przyjąć taką postać:

$$\begin{array}{r} 67 \\ \underline{+\,28} \\ 15 \\ \underline{+\,80} \\ 95 \end{array}$$

i kolejna wersja algorytmu dodawania pisemnego gotowa.

Oba zapisy są w pełni równoprawne, ponieważ dodawanie jest przemienne – kolejność sumowania liczb 15 i 80 nie ma wpływu ani na wynik, ani na poziom trudności obliczenia.

Warto pamiętać, że kolejność „od prawej do lewej” staje się istotna dopiero wówczas, gdy zaczynamy wprowadzać umowy związane ze skracaniem zapisu algorytmu i gdy pojawia się owo pamiętne „jeden w pamięci”. Najlepiej byłoby, gdyby uczeń sam tej konieczności doświadczył.

Nie jest również wykluczone, że dziecko, operując woreczkami i żetonami (por. s. 18), pakując w miarę potrzeby woreczek i zapisując najpierw w tabelce, a potem w „słupku” efekty swoich poczynań, samo już doszło do typowego algorytmu pisemnego dodawania:

$$\begin{array}{r} 67 \\ \underline{+\,28} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 67 \\ \underline{+\,28} \\ 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 67 \\ \underline{+\,28} \\ 95 \end{array}$$

Mając 15 żetonów, warto z 10 z nich zrobić jeszcze jeden woreczek. Pozostaje 5 żetonów, a liczba woreczków rośnie o 1.

A jeśli uczeń dodaje w pamięci w jeszcze inny sposób? To może zaskoczy nas i zbuduje własny algorytm albo zaakceptuje któryś z przytoczonych wyżej – stanie się tak na pewno, o ile tylko pozwolą mu one szybciej i prościej, niż inne stosowane sposoby, osiągać wynik.

Przyjrzyjmy się jeszcze jednemu przykładowi.

$$378 + 564 = ?$$

$$
\begin{array}{r}
378\\
\underline{+\,564}\\
800\\
130\\
\underline{+\quad 12}\\
942
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
378\\
\underline{+\,564}\\
12\\
130\\
\underline{+\quad 800}\\
942
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\,1\;}\\
378\\
\underline{+\,564}\\
942
\end{array}
$$

Mamy tu ponownie do czynienia z trzema wersjami tego samego algorytmu. Do zrozumienia dwóch pierwszych nie są potrzebne żadne dodatkowe umowy i konwencje – na każdym kroku robi się, mówi i pisze to samo. Trzeci zapis powstaje z drugiego, dzięki innej formie zapisywania wyników cząstkowych – *zrobimy to tak, aby wynik dał się zapisać w jednej linii.* Trzy obliczenia różniące się przede wszystkim zapisem, ale w efekcie – także złożonością i poziomem wprowadzanego formalizmu.

Jeśli chcemy, żeby dzieci rozumiały wykonywane operacje i zapisywane symbole, to stwórzmy im warunki do zbudowania jednej z dłuższych wersji tego algorytmu. Kolejnym krokiem może być poszukiwanie i wspólne wprowadzanie uproszczeń – dużo łatwiej je zrozumieć, jeśli najpierw zrozumie się rzeczywisty sens wykonywanych czynności.

Przez analogię z dodawaniem?

Mnożenie w wielu elementach jest bardzo podobne do dodawania, trudno zresztą, żeby było inaczej, w końcu to „skrócone” dodawanie. Widać to np. przy okazji mnożenia w pamięci:

$$24 \times 8 = ?$$

Większość dzieci i dorosłych, licząc w pamięci zaczyna w naturalny sposób od mnożenia dużych liczb:

20 razy 8 to 160, 4 razy 8 to 32, 160 i 32 to 192.

Zdecydowanie mniejsza liczba osób odwraca tę kolejność, zaczynając od strony prawej, czyli jedności:

4 razy 8 to 32, 20 razy 8 to 160, 160 i 32 to 192.

Nie oznacza to wcale, że dzieci wykonujące w ten sposób mnożenie w pamięci, świadomie odwołują się do rozdzielności mnożenia względem dodawania. Ta nazwa jest im zupełnie obca i do niczego nie potrzebna. Ta własność tkwi w wykorzystywanych w procesie edukacyjnym sytuacjach oraz modelach i jest dla dzieci naturalną cechą mnożenia – cechą, którą poznają równocześnie z samym działaniem.

I znowu, ułatwiając sobie liczenie, zapiszmy uzyskiwane w trakcie obliczeń wyniki, zachowując kolejność wykonywanych operacji, np. w taki sposób:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{\times\ \ 8} \\ 160 \\ \underline{+\ 32} \\ 192 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 24 \\ \underline{\times\ \ 8} \\ 32 \\ \underline{+\ 160} \\ 192 \end{array}$$

Dwa naturalne i zrozumiałe dla uczniów algorytmy mnożenia pisemnego gotowe – tak, jak w przypadku dodawania (por. s. 63).

I – identycznie jak dla dodawania – zapis używany na co dzień w polskich szkołach powstaje z drugiego zapisu (z przedstawionych powyżej), dzięki innej formie zapisywania wyników cząstkowych – *zrobimy to tak, aby wszystko dało się zapisać w jednej linii:*

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3}\ \ \\ 24 \\ \underline{\times\ \ 8} \\ 192 \end{array}$$

Znowu trzy wersje tego samego algorytmu.

Z mnożeniem jest przynajmniej w jednej kwestii łatwiej niż z dodawaniem – nie ma innych powszechnie stosowanych ogólnych strategii mnożenia w pamięci, niż te dwie powyżej.

Mówimy tu o ogólnych strategiach, a nie o różnych szczególnych przypadkach, w których można sobie sprytnie ułatwić życie, np.

$37 \times 9 = 370 - 37 = 333$; $49 \times 6 = 300 - 6 = 294$ itp.

A jak będzie w przypadku większych liczb? Sprawdźmy.

$$354 \times 8 = ?$$

$$
\begin{array}{r}
354 \\
\times \quad 8 \\
\hline
2400 \\
400 \\
+ \quad 32 \\
\hline
2832
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
354 \\
\times \quad 8 \\
\hline
32 \\
400 \\
+\,2400 \\
\hline
2832
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 4\ 3\ \ } \\
354 \\
\times \quad 8 \\
\hline
2832
\end{array}
$$

Ponownie dwa pierwsze sposoby zapisu obliczeń nie sięgają po dodatkowe skróty, umowy czy symbole. Wykonując w ten sposób obliczenia, mówimy, zapisujemy i robimy dokładnie to samo:

300 razy 8 to 2400, 50 razy 8 to 400, 4 razy 8 to 32, ...

Inaczej jest w trzecim przypadku – tu wpadamy w językową pułapkę trudnych dla dziecka do zrozumienia uproszczeń. Na ogół brzmi to tak:

4 razy 8, to 32, 2, 3 dalej;

5 razy 8 to 40, i 3 to 43, 3, 4 dalej;

3 razy 8, to 24, i 4 to 28

Tylko pierwsza z tych wypowiedzi jest dosłowna – opisujemy w niej rzeczywiście to, co robimy. Każda następna jest już pewnym szyfrem, kierowanym do wtajemniczonych.

Wróćmy do obu dłuższych zapisów. Tym razem, z punktu widzenia dziecka, nie muszą one być w pełni równoprawne. Różnica ujawnia się dla większych liczb na etapie zapisywania iloczynów cząstkowych: prościej jest zapisywać je w kolejności od najmniejszego do największego, czyli tak, jak w zapisie środkowym, bo nie powstaje trudność znalezienia właściwego miejsca dla pierwszej zapisywanej cyfry.

Może warto więc, aby rozwój umiejętności mnożenia pisemnego uczniów przebiegał w trzech kolejnych krokach odpowiadających trzem powyższym wersjom algorytmu?

A może dwa algorytmy?

Powtórzmy już po raz ostatni: dobry algorytm działania pisemnego to taki, który powstaje jako **zapis** i **naturalna kontynuacja** sposobu wykonywania przez dziecko obliczeń w pamięci czy innej formy jego działania. Dzięki temu algorytm ściśle wiąże się z wcześniejszymi doświadczeniami i wiedzą ucznia, co umożliwia oraz ułatwia jego zrozumienie, a także pozwala m.in. na utrwalenie za pomocą mniejszej liczby powtórzeń.

Podobnie jak przy dodawaniu, także przy odejmowaniu pisemnym ogromnie użytecznym narzędziem mogą okazać się woreczki i żetony czy inne pomoce, pokazujące strukturę systemu dziesiętnego. Dziecko, operując woreczkami i żetonami w kontekście zabierania pewnej ich ilości (por. s. 19) oraz zapisując wykonywane kolejno czynności i ich efekty, znowu np. najpierw w tabelce, a potem w „zwykłym słupku”, może stopniowo samo dojść do typowego algorytmu pisemnego odejmowania:

$$\begin{array}{r} 67 \\ \underline{-\ 28} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 5\ 17} \\ 67 \\ \underline{-\ 28} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 5\ 17} \\ 67 \\ \underline{-\ 28} \\ 39 \end{array}$$

Gdy mamy 7 żetonów, a należy zabrać ich 8, to trzeba rozpakować jeden woreczek. Mamy wtedy przed sobą 5 woreczków i 17 żetonów – możemy już zabierać. „Rozpakowywanie woreczka” może być czynnościowym pierwowzorem operacji „rozmieniania” przy odejmowaniu pisemnym, może nadać jej realistyczny, zrozumiały dla ucznia, sens.

Jeśli zachęcaliśmy uczniów do budowania własnych strategii odejmowania w pamięci, to jest bardzo prawdopodobne, że część z nich zaczęła „odejmować przez dopełnianie”. Jeśli tak się stało, to spróbujmy zacząć zapisywać kolejne kroki tej procedury w jakiś uporządkowany i czytelny sposób, np. tak, jak w jednym z przykładów poniżej:

$$\begin{array}{rl} 67 & \\ \underline{-\ 28} & \\ 2 & \longleftarrow \text{do } 30 \\ 30 & \longleftarrow \text{do } 60 \\ \underline{+\ 7} & \longleftarrow \text{do } 67 \\ 39 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} 67 & \\ \underline{-\ 28} & \\ 2 & \longleftarrow \text{do } 30 \\ \underline{+\ 37} & \longleftarrow \text{do } 67 \\ 39 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 67 \\ \underline{-\ 28} \\ 2 \\ \underline{+\ 37} \\ 39 \end{array}$$

Badaliśmy już możliwości tej strategii (por. s. 43). Wykorzystanie jej jako podstawy do zbudowania algorytmu pisemnego odejmowania znacznie jeszcze je zwiększa:

$$\begin{array}{r l}
631 & \\
-\ 84 & \\
\hline
16 & \leftarrow \text{do } 100 \\
500 & \leftarrow \text{do } 600 \\
+\ 31 & \leftarrow \text{do } 631 \\
\hline
547 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r l}
655 & \\
-\ 478 & \\
\hline
22 & \leftarrow \text{do } 500 \\
+\ 155 & \leftarrow \text{do } 655 \\
\hline
177 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r l}
1306 & \\
-\ 428 & \\
\hline
2 & \leftarrow \text{do } 430 \\
70 & \leftarrow \text{do } 500 \\
500 & \leftarrow \text{do } 1000 \\
+\ 306 & \leftarrow \text{do } 1306 \\
\hline
878 &
\end{array}$$

Zapis „w słupku" ogromnie ułatwia wykonywanie prostych odejmowań bez „rozmieniania". W czytelny sposób porządkuje on operacje składowe. Nie ma prostszej metody wykonania odejmowania tego typu:

$$\begin{array}{r}
4859 \\
-\ 3607 \\
\hline
1252
\end{array}$$

Algorytm odejmowania przez dopełnianie bardzo dobrze funkcjonuje tam, gdzie klasyczny algorytm staje się bardzo trudny – w działaniach, w których kilka razy po kolei trzeba „rozmieniać". Skomplikowane odejmowanie zamienia on na banalnie proste dodawanie:

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\ \ 10\ 9\ 13} \\
2103 \\
-\ 1487 \\
\hline
616
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r l}
2103 & \\
-\ 1487 & \\
\hline
13 & \leftarrow \text{do } 1500 \\
500 & \leftarrow \text{do } 2000 \\
+\ \ 103 & \leftarrow \text{do } 2103 \\
\hline
616 &
\end{array}$$

Dwa algorytmy – każdy doskonale zdający egzamin w przypadku innego typu obliczeń.

Kłopot czy okazja? Na przykład do rozwijania umiejętności dobierania metody postępowania do konkretnej sytuacji, czyli do inteligentnego **stosowania posiadanej wiedzy**.

Cel czy narzędzie?

Większość nauczycieli, nie tylko klas 1–3, uważa, że algorytmy działań pisemnych są jedną z najbardziej użytecznych w życiu codziennym umiejętności, dostarczanych przez matematykę. Czy rzeczywiście? Spróbujmy odpowiedzieć na dwa pytania:

– *Kiedy ostatnio w życiu codziennym (czyli nie naucząjąc!) dzieliliśmy pisemnie np. liczbę pięciocyfrową przez trzycyfrową, albo mnożyliśmy pisemnie liczbę czterocyfrową przez trzycyfrową?*

– *Ile razy w ciągu ostatniego roku korzystaliśmy z tych umiejętności?*

Współcześnie z umiejętności tych korzysta się poza szkołą sporadycznie, ponieważ tylko z rzadka jest okazja do ich zastosowania.

Jak na ironię, najpotrzebniejszą w życiu codziennym umiejętnością rachunkową jest **szacowanie** – najczęściej nie interesuje nas dokładny wynik, lecz skala jego wielkości. Akurat na tę umiejętność w szkole nie kładzie się dużego nacisku, a szkoda, ponieważ pomogłaby np. zmniejszyć liczbę „głupich" błędów nie tylko podczas obliczeń na kalkulatorze, ale także w trakcie obliczeń pisemnych. Przed przystąpieniem do obliczeń wystarczyłoby ocenić, jakiej mniej więcej wielkości powinien być wynik:

2103 – 1487 to mniej więcej 600.

Jeśli wynik końcowy znacząco odbiega od naszych przewidywań, to trzeba poszukać przyczyny – być może zamiast odjąć liczby dodaliśmy je.

Jeśli już rzeczywiście mamy „prywatnie" wykonać jakieś obliczenia na dużych liczbach, to prawdopodobnie sięgamy po kalkulator, a jeśli nie ma go akurat pod ręką, to albo liczymy pisemnie, albo... odkładamy to na później.

– *Do czego w ogóle potrzebna jest nam umiejętność wykonywania obliczeń?*

Jest potrzebna do rozwiązywania różnych zadań czy problemów, także dnia codziennego. Naszym celem jest rozwiązanie zadania, a wykonanie obliczeń to jeden z kroków pozwalających ten cel zrealizować. Wybrana metoda wykonania obliczeń jest narzędziem, które umożliwia zrobienie tego kroku – takim samym jak linijka, miarka stolarska czy centymetr przy mierzeniu długości i szerokości pokoju, gdy chcemy kupić do niego wykładzinę.

W tej ostatniej sytuacji celem jest kupienie odpowiedniej ilości wykładziny, musimy więc zmierzyć pokój.

A podstawowym kryterium wyboru narzędzia do mierzenia jest wygoda jego użycia!

Algorytmy działań pisemnych są narzędziem, które umożliwia bezpieczne otrzymanie wyniku wykonywanych operacji podczas rozwiązywania zadania czy problemu. Dokładnie tę samą funkcję pełni (dla mniejszych liczb) liczenie w pamięci czy liczenie za pomocą kalkulatora.

Może przy obliczeniach także wybierając narzędzie warto kierować się wygodą jego użycia?

– *Czy zatem w ogóle warto zajmować się algorytmami działań pisemnych?*

Tu najczęściej padający argument brzmi tak: *warto, bo musimy być niezależni od jakiś tam urządzeń liczących*. Owszem, lepiej by było, ale rzeczywisty powód znaczenia algorytmów działań pisemnych dziś wiąże się chyba jednak z czymś innym.

Przez ostatnie dwadzieścia lat życie w sposób prawie dla nas niezauważalny przeniosło punkt ciężkości ważności algorytmów działań pisemnych ze słowa „działań" na słowo „algorytm".

W naszym codziennym życiu mało jest dziś okazji do pisemnego rachowania, ale z roku na rok rośnie liczba napotykanych przez nas algorytmów. Programowanie pralki, kuchenki mikrofalowej czy magnetowidu, dostrajanie telewizora czy zapamiętywanie w radiu wybranych stacji, wprowadzanie numerów do pamięci telefonu czy wysyłanie SMS-ów, wypłacanie pieniędzy z bankomatu czy wypełnianie zeznania podatkowego, wysłanie listu pocztą elektroniczną czy wydrukowanie dokumentu na drukarce – wszystkie te czynności mają charakter algorytmiczny. Musimy uczyć się rozumieć i stosować algorytmy, powinniśmy również opanować sztukę ich tworzenia i modyfikowania. W szkole nie mamy do tego zbyt wielu okazji. Jedną z najlepszych są właśnie algorytmy działań pisemnych.

Jeśli stwarzamy warunki do wspólnego budowania różnych strategii liczenia w pamięci, to naturalną kontynuacją jest zapisywanie tych obliczeń w uporządkowany sposób – i tak **dzieci mogą konstruować własne algorytmy działań pisemnych**. Badania i praktyka pokazują, że jest to pod każdym względem efektywniejsze od prezentowania ich przez nauczyciela. Dzieci bowiem nie tylko budują w ten sposób swoją wiedzę o algorytmach, ale także przekonują się o użyteczności języka symbolicznego, współtworzą użyteczne narzędzia matematyczne – uczą się modelować i matematyzować. Przyczynia się to również do rozwoju ich umiejętności uczenia się.

Od pewnego czasu na świecie dużo mówi się o alfabetyzmie matematycznym uczniów (por. s. 141), czyli ich zdolności do stosowania posiadanej wiedzy i umiejętności w różnych sytuacjach, w tym także o charakterze życiowym. Badania pokazują, że polskie dzieci nie wypadają tu dobrze, a ich zaradność matematyczna na każdym etapie kształcenia jest znikoma.

Można ją rozwijać nawet przy okazji tak mało efektownych rzeczy, jak algorytmy działań pisemnych. W tym celu trzeba jednak **konsekwentnie** stwarzać uczniom warunki do zaangażowania intelektualnego, do aktywności poznawczej związanej z konstruowaniem swojej wiedzy i świadomym stosowaniem posiadanych umiejętności.

ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ TEKSTOWYCH

Umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych jest jedną z podstawowych i najważniejszych umiejętności pojawiających się w procesie matematycznego kształcenia, zwłaszcza w szkole podstawowej. Inne rozwijane przez tych sześć lat umiejętności: liczenia w pamięci oraz pisemnie, dokonywania pomiarów i operowania wyrażeniami dwumianowanymi, operowania liczbami dziesiętnymi czy rozwiązywania równań mają charakter usługowy właśnie w stosunku do rozwiązywania zadań tekstowych. Są one narzędziami, których opanowanie ułatwia, czy wręcz umożliwia, sprawne i inteligentne radzenie sobie z różnorodnymi zadaniami, stawianymi przed nami także przez nasze codzienne życie.

W trakcie badania uczniowie rozwiązywali sześć zadań tekstowych o zróżnicowanym stopniu trudności i wzajemnie dopełniającej się strukturze:

A	Karol i Ela zbierali kasztany w parku. Karol zebrał ich 37, a Ela o 6 więcej. Ile kasztanów zebrała Ela?
B	Jola narysowała szlaczek złożony z gwiazdek, kółek i trójkątów. Gwiazdek narysowała 50. Kółek było o 9 więcej, a trójkątów o 16 mniej niż gwiazdek. Ile trójkątów narysowała Jola?
C	W kinie są dwie sale. W pierwszej jest 156 miejsc, a w drugiej o 24 miejsca mniej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?
D	W małym opakowaniu są 4 jaja, w średnim 8, a w dużym 12. Ile jest łącznie jaj w czterech średnich i czterech dużych opakowaniach?
E	Ania w ciągu 15 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu półtorej godziny?
F	Za 4 czekolady i 4 batony trzeba zapłacić 28 złotych. 3 takie same czekolady i 4 takie same batony kosztują łącznie 23 zł. Ile kosztuje czekolada, a ile baton?

Zadanie **A** to typowe zadanie proste (jednodziałaniowe), dotyczące porównywania różnicowego. Jest to jedna z najprostszych i najbardziej podstawowych kategorii zadań, z jaką stykają się uczniowie podczas I etapu kształcenia, a dla uczniów klasy trzeciej być może nawet najprostsza. Z całą pewnością w procesie kształcenia każdy uczeń rozwiązywał wiele zadań o dokładnie takiej strukturze, różniących się co najwyżej zakresem występujących w nich liczb.

Zadanie **B** to zadanie proste z nadmiarem danych – jedna z informacji podanych w zadaniu jest niepotrzebna do jego rozwiązania. Po jej pominięciu zadanie staje się identyczne z zadaniem **A**. Podobnie jak poprzednio, w celu jego rozwiązania trzeba wykonać jedną prostą operację arytmetyczną.

Te dwa zadania miały pomóc ustalić, na ile wprowadzenie dodatkowej informacji do zadania zaburzy uczniom proces rozwiązywania.

Zadanie **C** to z kolei najbardziej typowe dla klas 1–3 zadanie złożone, również nawiązujące do porównywania różnicowego. Także i ten typ zadań na pewno był wielokrotnie rozwiązywany przez uczniów w trakcie nauki. Pojawia się on także w większości „testów kompetencji" wykorzystywanych w I etapie kształcenia.

Jego uzupełnienie to zadanie **D**, które jest zadaniem złożonym z nadmiarem danych – także i tu jedna z danych nie jest potrzebna do znalezienia odpowiedzi na postawione pytanie.

Zadanie **E** jest zadaniem złożonym, w którym „ukryte" są informacje potrzebne do jego rozwiązania. Można je rozwiązać na wiele sposobów, wykorzystując dość różnorodne narzędzia arytmetyczne. Tego typu zadania, dotyczące „proporcjonalności", rzadziej pojawiają się w procesie rozwijania umiejętności matematycznych w klasach 1–3, a szkoda, bo są doskonałą okazją do stosowania przez uczniów posiadanej wiedzy.

Zadanie **F** jest strukturalnie trudniejsze – reprezentuje typ zadań, który w polskiej szkole tradycyjnie rozwiązywany jest za pomocą układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, czyli aktualnie na poziomie gimnazjum. Tymczasem daje się ono rozwiązać zupełnie elementarnymi narzędziami, posiadanymi przez każdego ucznia klasy 3. Kontekst sytuacyjny zadania i dane zostały tak dobrane, aby można je było rozwiązać praktycznie w pamięci. Tego typu zadania nie pojawiają się w klasach 1–3 – zadanie to bada więc, **jak uczniowie poradzą sobie w sytuacji dla nich nietypowej.**

W procesie sprawdzania zadań przyjęto zasadę, że o poprawności rozwiązania decyduje jedynie zastosowanie przez ucznia dowolnej poprawnej metody postępowania. Rozwiązania z usterkami rachunkowymi były zatem w zbiorczym zestawieniu uznawane za poprawne.

Poniższy diagram prezentuje procent poprawnych rozwiązań dla każdego z tych zadań:

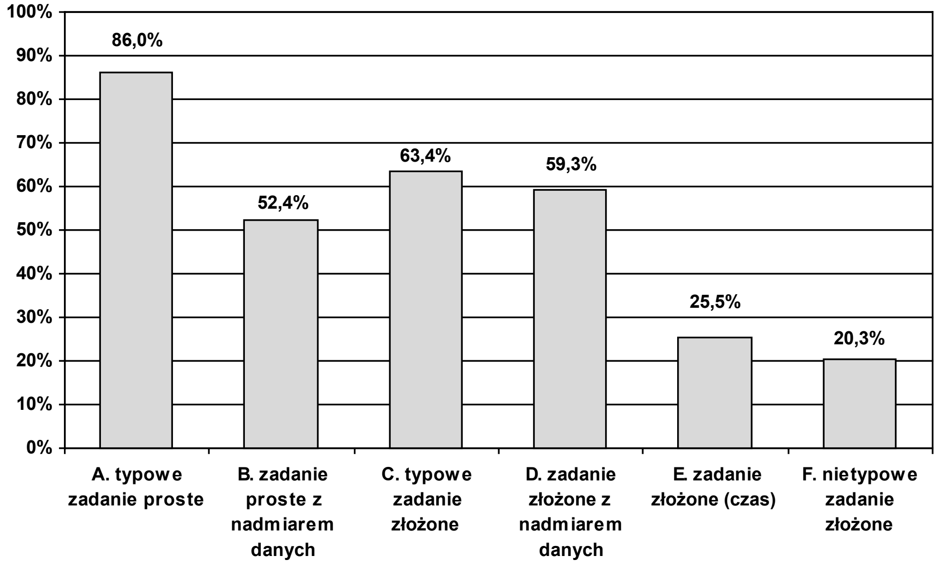


Diagram 11. Rozwiązywanie zadań tekstowych – procent poprawnych rozwiązań.

Zadanie **A** (typowe zadanie proste) rozwiązało poprawnie 86,0% dzieci, w tym 2,5% z błędami rachunkowymi. Oznacza to, że 14,0% uczniów nie poradziło sobie z jednym z najprostszych możliwych zadań tekstowych. Dużo czy mało?

Zadanie **B** (zadanie proste z nadmiarem danych) wypadło zdecydowanie gorzej – rozwiązało je poprawnie 52,4% uczniów (w tym błędy rachunkowe: 4,0%), czyli niewiele ponad połowa dzieci. Zbędna informacja podana w tym zadaniu pogorszyła jego wynik w porównaniu z zadaniem **A** aż o 33,6%.

W zadaniu **C** (typowym zadaniu złożonym) 63,4% uczniów zastosowało dobrą metodę postępowania, w tym 5,0% z usterkami rachunkowymi.

Z zadaniem **D** poradziło sobie 59,3% dzieci (7,0% z błędami rachunkowymi). Zwraca uwagę niewielka różnica poziomów poprawnych rozwiązań zadań złożonych **C** i **D** – tylko 4,1%. Jak widać, wprowadzenie zbędnej informacji w zadaniu złożonym sprawiło znacznie mniej zamieszania niż analogiczny zabieg dla zadań prostych.

Dwa pozostałe zadania wypadły już zdecydowanie gorzej. Zadanie **E** rozwiązało poprawnie jedynie 25,5% uczniów, czyli mniej więcej ¼ uczestników badania. Z zadaniem **F** poradziło sobie 20,3% dzieci, czyli mniej więcej co piąty uczeń. Aż 11,5% uczniów nie podjęło nawet próby rozwiązania zadania **F**. Błędy rachunkowe w tych zadaniach wyniosły poniżej jednego procenta.

Poniższy diagram przedstawia rozkład liczby poprawnie rozwiązanych przez ucznia zadań tekstowych:

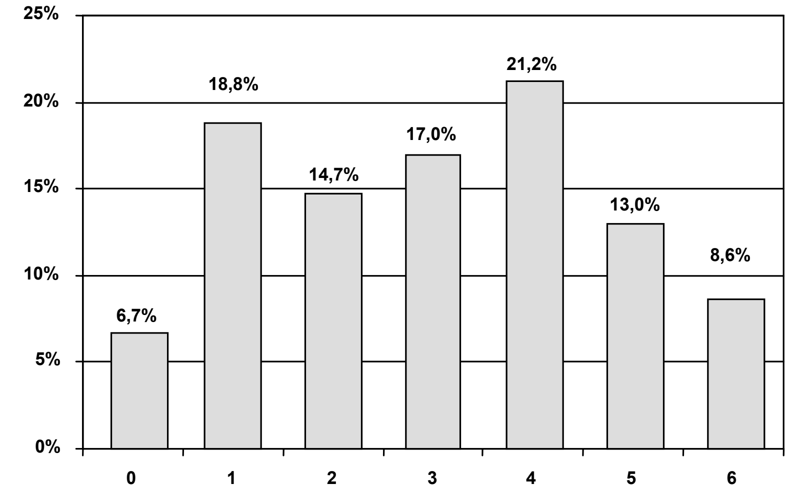


Diagram 12. Rozwiązywanie zadań tekstowych – procent poprawnie rozwiązanych zadań.

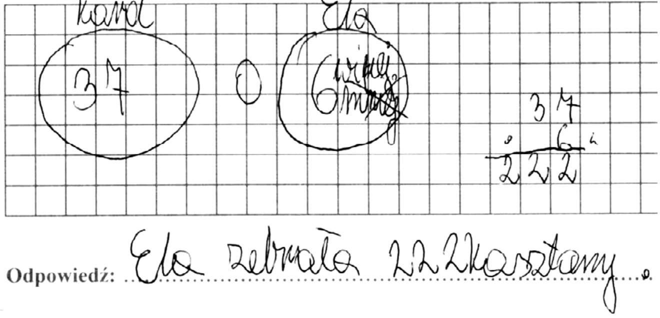
Wszystkie zadania rozwiązało poprawnie 8,6% uczniów. Prawie tyle samo dzieci, bo 6,7%, nie zrobiło dobrze żadnego z nich. Najczęściej uczniowie rozwiązywali cztery zadania (21,2%) albo tylko jedno (18,8%).

Przyjrzyjmy się bardziej i mniej typowym rozwiązaniom uczniów, zaczynając od zadania **A**:

A	Karol i Ela zbierali kasztany w parku. Karol zebrał ich 37, a Ela o 6 więcej. Ile kasztanów zebrała Ela?

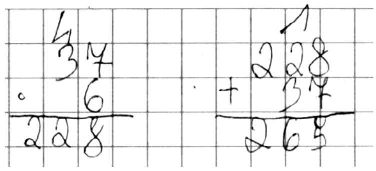
W przypadku tego zadania, zgodnie z oczekiwaniami, najczęściej popełnianym błędem (8,8% wszystkich uczniów) było pomylenie porównywania różnicowego z ilorazowym, i w efekcie pomnożenie podanych w zadaniu liczb, zamiast ich dodania (1, 2). Nie przeszkodziło w tym nawet samodzielne, poprawne zakodowanie treści zadania (1), które powinno sugerować dobre jej zrozumienie.

1.

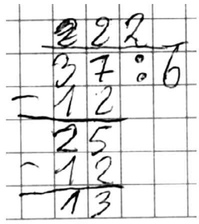


2.

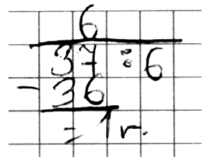
3.



4.



5.

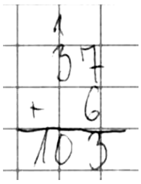


Inne błędy, np. wykonanie kilku kolejnych operacji, najczęściej mnożenia i dodawania (3), czy podzielenie podanych w zadaniu liczb (4, 5), pojawiały się rzadziej.

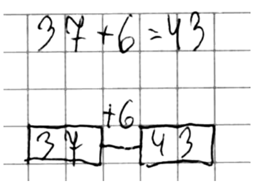
Czym mógł kierować się uczeń, który wykonał poprawnie dzielenie z resztą i podał w odpowiedzi, że Ela zebrała 6 kasztanów i reszty 1?

W rozwiązaniach nawet tego typowego zadania zaczęły pojawiać się różne „indywidualne” notacje: niektóre nieszczęśliwe (6), niektóre absolutnie neutralne (7), a niektóre rzeczywiście użyteczne (8) i w efekcie konsekwentnie przez autora stosowane także przy okazji innych zadań (9).

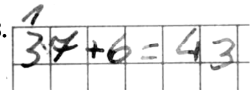
6.



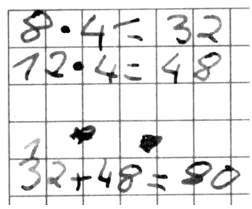
7.



8.

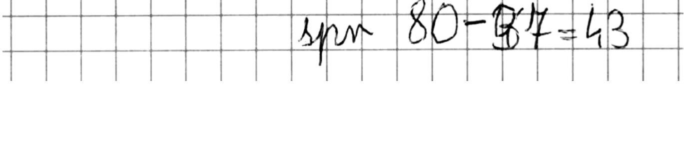


9.

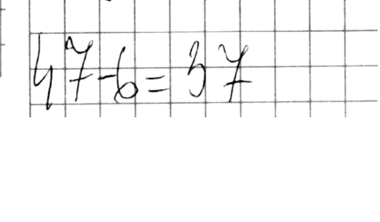


Niektórzy uczniowie podejmowali (chyba) próbę „sprawdzenia” swojego rozwiązania. Nie upewniali się jednak, czy otrzymany wynik spełnia warunki zadania – na czym powinno polegać takie sprawdzenie, ale ograniczali się do sprawdzenia poprawności wykonanego obliczenia (10, 11). Zresztą i tak często traktowali tę czynność w sposób czysto „formalny” – sprawdzenie musi potwierdzić to, co sprawdza i już (11). To samo zjawisko wystąpiło także przy obliczeniach pisemnych (por. s. 57).

10.



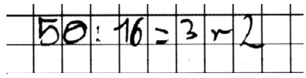
11.



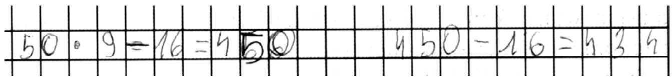
B Jola narysowała szlaczek złożony z gwiazdek, kółek i trójkątów. Gwiazdek narysowała 50. Kółek było o 9 więcej, a trójkątów o 16 mniej niż gwiazdek. Ile trójkątów narysowała Jola?

Wprowadzenie do zadania **B** dodatkowej informacji nie tylko znacznie pogorszyło jego wyniki, ale także zwiększyło różnorodność popełnianych przez uczniów błędów:

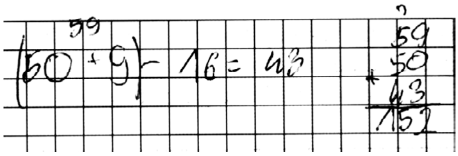
1.



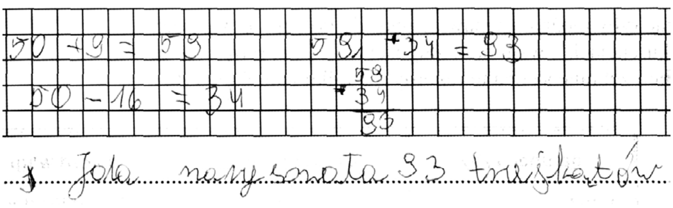
2.



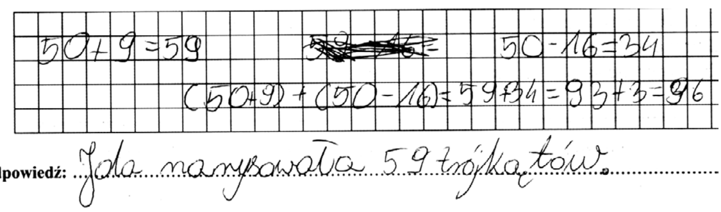
3.



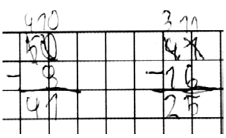
4.



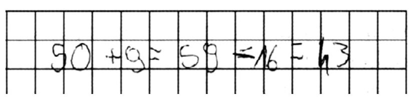
5.



6.



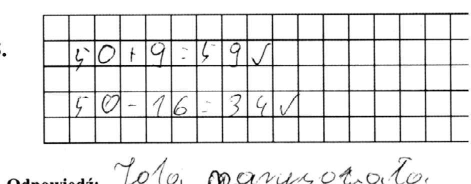
7.



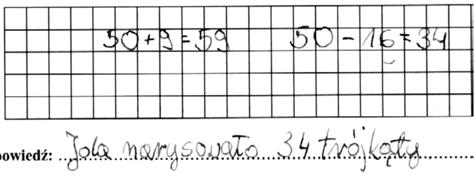
Znów nasuwa się pytanie o tok rozumowania autorów niektórych z tych rozwiązań. Najbardziej popularną „metodą" rozwiązania okazało się obliczenie: 50 + 9 – 16 = 43. Tak właśnie postąpiła ponad ¼ uczniów (28,2%).

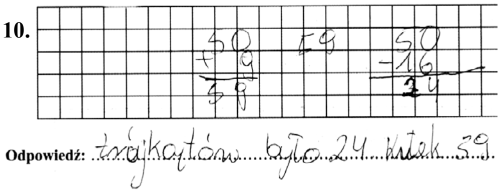
Część dzieci nie potrafiła zdecydować się, który z otrzymanych wyników jest tym właściwym, więc całkowicie lub częściowo (8) rezygnowała z podania odpowiedzi.

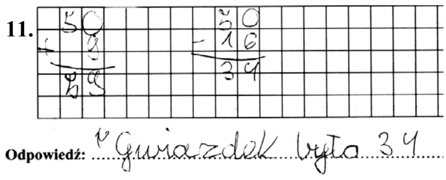
8.



Inni – i była to całkiem liczna grupa uczniów – także wykonywali więcej obliczeń niż potrzeba, ale podawana odpowiedź rozstrzygała na ich korzyść wątpliwości co do poprawności rozwiązania (9–11):

9.


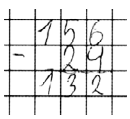
10.


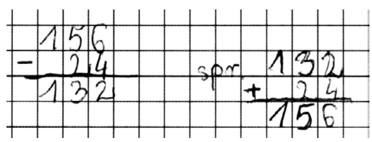
11.


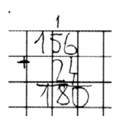
C

W kinie są dwie sale. W pierwszej jest 156 miejsc, a w drugiej o 24 miejsca mniej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

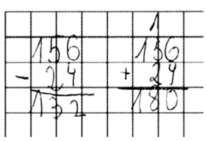
Większość błędów w przypadku tego bardzo typowego zadania złożonego wynikała z potraktowania go jak zadania prostego, do rozwiązania którego wystarczy jedno obliczenie. Co czwarty uczeń (25,7%) swoje rozwiązanie ograniczył do wykonania odejmowania: 156 – 24, czyli do znalezienia liczby miejsc w drugiej sali, najczęściej odpowiednie obliczenie wykonując pisemnie (1). Podobnie jak w innych zadaniach, także i tu uczniowie niekiedy sprawdzali poprawność wykonanych obliczeń (2), nie mając pewnie świadomości, że ze sprawdzeniem, czy metoda rozwiązania jest sensowna nie ma to nic wspólnego. Niektórzy w miejsce odejmowania wstawiali dodawanie (3).

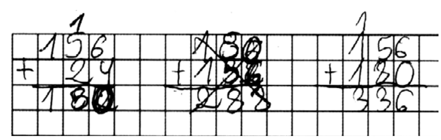
1.


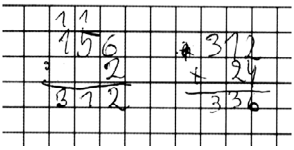
2.


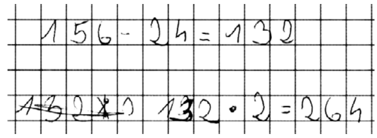
3.


Jak na typowe, i na pewno starannie przećwiczone w procesie kształcenia zadanie, lista kategorii błędów popełnianych przez uczniów jest dość krótka. Część z nich to efekt błędnego ustalenia, w której sali jest mniej, a w której więcej miejsc (5, 6).

4.


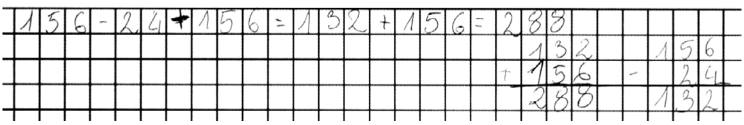
5.


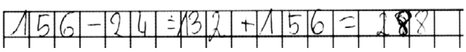
6. 

7. 

Niektóre błędy (6, 7) są być może efektem podjęcia próby sprytnego rozwiązania zadania. Gdyby w rozwiązaniu 6 uczeń pomnożył i odjął, otrzymałby bardzo oryginalne rozwiązanie. W rozwiązaniu 7 trzeba by na koniec dodać jeszcze 24.

Poprawne rozwiązania również są mało urozmaicone. Zwraca uwagę to, że uczniowie bardzo często sięgają po algorytmy działań pisemnych – i to nawet w takiej sytuacji jak ta, gdy ani w dodawaniu, ani w odejmowaniu nie ma żadnego przekraczania progów (8). Jak zawsze, część rozwiązań, zwłaszcza tych, w których uczniowie wykonują obliczenia w pamięci, zawiera typowe „skróty myślowe” (9).

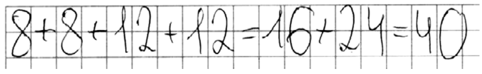
8. 

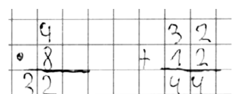
9. 

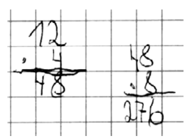
D

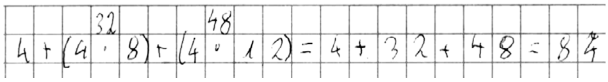
> W małym opakowaniu są 4 jaja, w średnim 8, a w dużym 12. Ile jest łącznie jaj w czterech średnich i czterech dużych opakowaniach?

I znowu, podobnie jak przy zadaniach prostych, wprowadzenie zbędnej informacji ogromnie wzbogaca liczbę różnych typów rozumowań dzieci – zwłaszcza tych błędnych. Uczniowie dodają, mnożą, nawet odejmują, otrzymując sporą rozpiętość wyników: od 0 do 276.

1. 

2. 

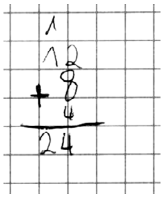
3. 

4. 

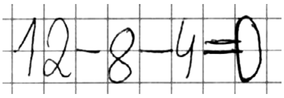
W niektórych z tych rozwiązań jest „ślad” racjonalizmu: w 1 uczeń wziął połowę opakowań, w 2 cztery średnie i jedno duże, w 3 też początek obliczeń jest dobry, a w 4 dziecko niepotrzebnie zwiększyło wynik o 4.

W innych (np. 5, 6, 7) autorzy żonglują liczbami podanymi w zadaniu w oderwaniu od treści zadania i w niektórych przypadkach (np. 6) bez śladu krytycyzmu.

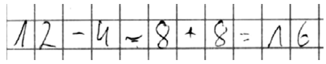
5.



6.



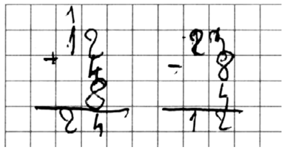
7.



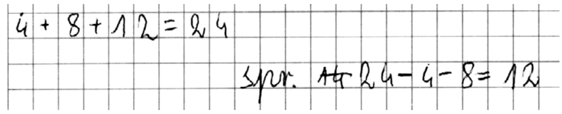
Wśród błędnych rozwiązań dominują obliczenia typu 2 oraz 5 – łącznie rozumowało w ten sposób ponad 21% uczniów, czyli tego typu błąd popełniał mniej więcej co piąty uczeń.

Ponownie pojawiają się próby sprawdzeń i, tak jak poprzednio, nie chronią one uczniów przed błędnymi rozwiązaniami zadania (8, 9):

8.

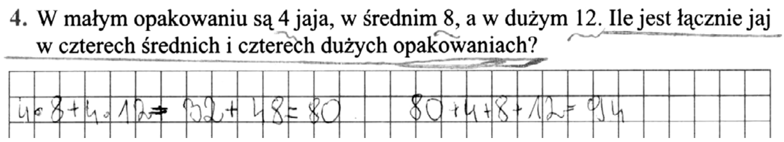


9.

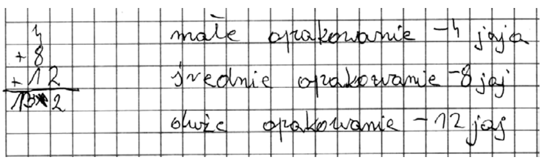


W niektórych rozwiązaniach można znaleźć próby stosowania ogólniejszych strategii postępowania: podkreślania danych w zadaniu (10) czy wypisania danych (11), ale – jak widać – nie przynoszą one spodziewanego skutku. Zwracają uwagę powtarzające się błędy, wynikające ze złego zastosowania algorytmu pisemnego dodawania (11, 12). W tym drugim przypadku może to być efekt „zaburzającego" działania algorytmu mnożenia: 8 i 12 dodane w pamięci to 20, natomiast pisemnie to 100.

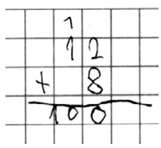
10.



11.

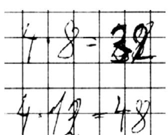


12.

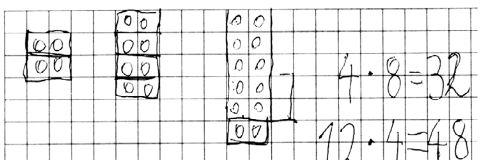


Część uczniów (6,2%) nie mogła się zdecydować, co zrobić z obliczonymi liczbami jajek w średnich i dużych opakowaniach:

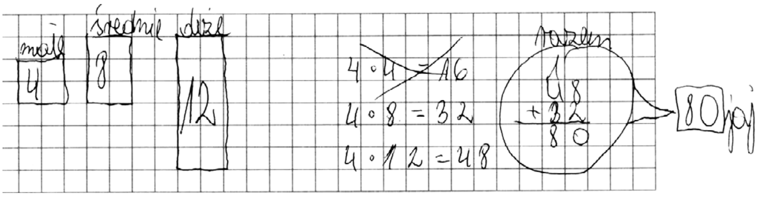
13.

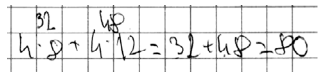


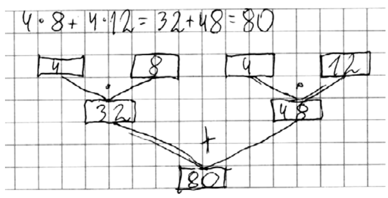
14.

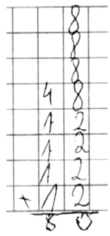


Wśród poprawnych rozwiązań dominowała wersja z trzema kolejnymi obliczeniami (1), sporadycznie tylko uzupełniona, np. rysunkiem. Nieco rzadziej pojawiał się zapis rozwiązania w jednym obliczeniu (2, 3), także bardzo rzadko wzbogacony jakimś elementem. Inne rozwiązania, np. takie, jak 4, zdarzały się pojedynczo.

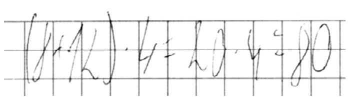
1.


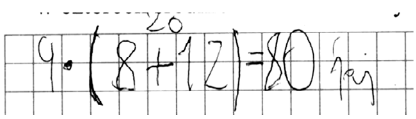
2.


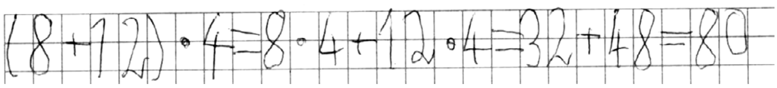
3.


4.


Tylko 0,5% uczniów, czyli 13 spośród prawie 2500, zauważyło, że obliczenia w zadaniu można sobie uprościć, zapisując je jako (8 + 12) × 4, ale dwóch z nich skorzystało z rozdzielności mnożenia względem dodawania i ponownie utrudniło sobie życie (por. 7):

5.


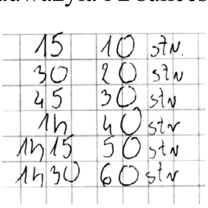
6.


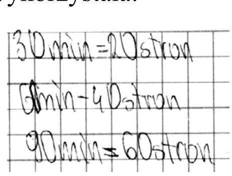
7.


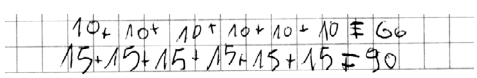
E

Ania w ciągu 15 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu półtorej godziny?

To, na pozór groźnie wyglądające, zadanie daje się rozwiązać za pomocą elementarnych środków – część uczniów to zauważyła i z sukcesem wykorzystała:

1.


2.


3.


4.

30 = 20 st

$\begin{array}{r} 30 \\ \times\ 3 \\ \hline 90 \end{array}$

30 · 3 = 90 = 60 st

5.

MINUTY KSIĄŻKI

15 min · 2 = 30 min 10 str · 2 = 20

20 · 3 = 60 30 min · 3 = 1 godz 30 min

Odpowiedź: W ciągu 1 godz. 30 min. przeczyta 60 stron książki

Jak widać, wystarczy tylko rozsądnie skorzystać z podanych w zadaniu danych, a rozwiązanie „samo wyjdzie" i to z pomocą prostego dodawania (1–3) czy prostego mnożenia (4, 5).

Niekiedy tylko początek rozwiązania był zapisywany – reszta obliczeń odbywała się w pamięci:

6. 15 - 30 - 45 - 60 - 75 - 90

7. 1 godz i pół godziny = 90 min 90 min : 15 = 6

8. 90 min - 15 - 15 - 15 - 15 - 15 - 15 = 0

9.

90
15 6
15, 30, 45, 60, 75, 90,

Na szczęście, na końcu zawsze była podawana właściwa konkluzja:

Odpowiedź: Ania w ciągu 90 min przeczyta 60 stron

Jak zawsze, dzieci tworzyły swoje lokalne, „dynamiczne" notacje, niekiedy dość skomplikowane (np. 11):

9. 90 : 15 = 15 : 30 + 15 : 30 + 15 : 30 = 2 + 2 + 2 = 6 · 10 = 60

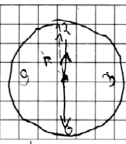
10. 10 + 10 + 10 = 30 + 10 = 40 + 10 + 10 = 60

11. 1^{30} : 0^{15} = 6 · 10 = 60 st

Były też oczywiście rozwiązania bardziej konwencjonalne, w których całość rozumowania zapisano symbolicznie:

12. 1 i pół godz = 90 min   90 min : 15 min = 6
10 · 6 = 60

13. 15 · kwadrans   1.30 6 kwadransów
60 : 4 kwadransy
10
· 6
60

14. 
6 · 15 min = 1 godzina i pół
6 · 10 = 60

Odpowiedź: W ciągu półtorej godz Ania przeczyta 60 stron

15. 60 : 15 = 4   30 : 15 = 2
6 · 10 = 60

16. (90 : 15) · 10 = 60

W 21,5% wszystkich rozwiązań podane w zadaniu wielkości: *15 minut, 10 stron* były (w kolejności częstości wystąpień): mnożone (1), dodawane (2, 3), odejmowane (4) albo dzielone (5). Uczniom nie przeszkadzało to, że do minut dodają strony albo mnożą minuty i strony przez siebie – i tak wynik podawany w odpowiedzi zawsze dotyczył stron.

1. 15 · 10 = 150

2. 15 minut + 10 = 25 minut

3. 15 + 10 = 25

4. 15 − 10 = 5   15 − 10 = 5

5. 15 : 10 = 1,5

Mniej więcej co piąty uczeń skupił się nie na treści zadania, lecz na podanych w nim w jawny sposób dwóch liczbach i próbował dopasować czy „trafić” we właściwe działanie. Ta „strategia” jest, jak widać, dość rozpowszechniona.

Niektórzy uczniowie starali się uwzględnić w swoim rozwiązaniu czas, przez jaki Ania miała czytać książkę, czyli półtorej godziny (rzadziej pół godziny). Półtorej godziny to czasami 130 minut (11, 12), a w kilku przypadkach 150 minut – przez analogię z innymi jednostkami.

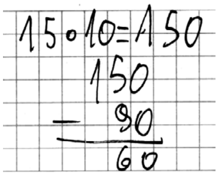
6. ~~90 = 90 · 10 =~~
90 + 10 = 100

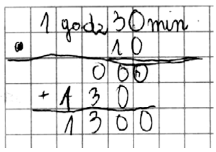
7. 90 m − 15 m = 75

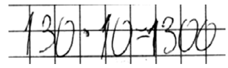
8. 1 godz + 30 min + 15 min = 110

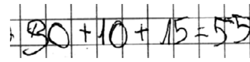
Odpowiedź: Ania przeczyta 110 stron

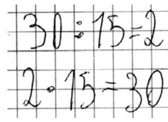
9. 90 · 10 = 900

10. 

11. 

12. 

13. 

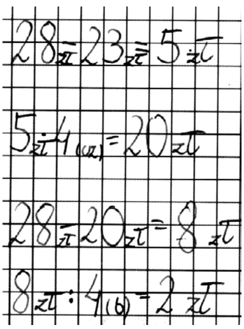
14. 

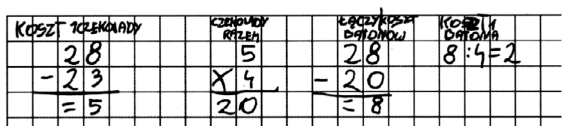
Także i wśród rozwiązań tego typu widać wyraźne przykłady wspomnianej wyżej „strategii”: z dodawania lub odejmowania minut wychodzą strony (7, 8), do stron dodaje się minuty (6, 13) itd. Tego typu rozumowania są kolejnym przykładem pojawienia się *zdegenerowanego formalizmu* (por. s. 30) już na I etapie kształcenia.

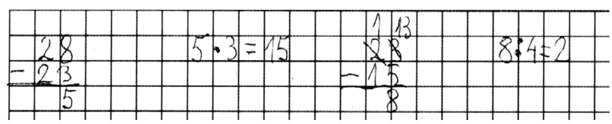
F

Za 4 czekolady i 4 batony trzeba zapłacić 28 złotych. 3 takie same czekolady i 4 takie same batony kosztują łącznie 23 zł. Ile kosztuje czekolada, a ile baton?

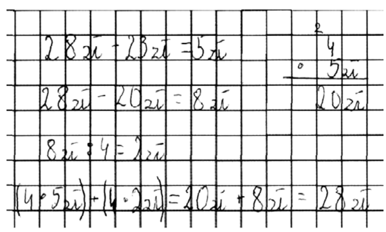
Większość poprawnych rozwiązań tego zadania była efektem porównania obu zakupów: za drugim razem kupiono o jedną czekoladę mniej. Reszta to prosta konsekwencja tej obserwacji:

1. 

2. 

3. 

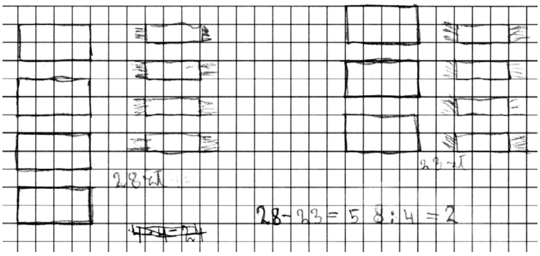
Cenę batonu można obliczyć zarówno korzystając z pierwszych zakupów (1, 2), jak i z drugich (3). W ten sposób rozumowało łącznie 14,3% uczniów.

4. 

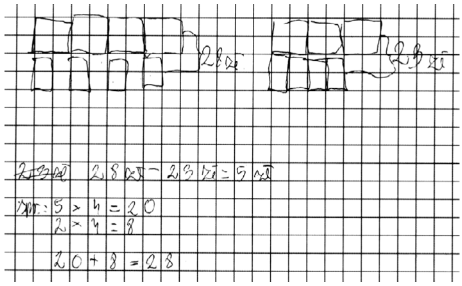
Warto zwrócić uwagę na rozwiązanie 4 – jego autor sprawdza otrzymane wyniki z jednym z warunków zadania. Wprawdzie z tym samym, z którego korzystał wcześniej, ale i tak jest to duży krok w stronę rzeczywistego sprawdzenia poprawności rozwiązania zadania tekstowego.

Niektórzy uczniowie zaczęli od zrobienia rysunku, i to wystarczyło, żeby szybko dojść do rozwiązania:

5.

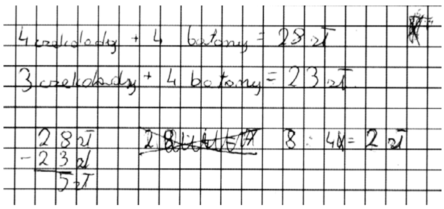


6.

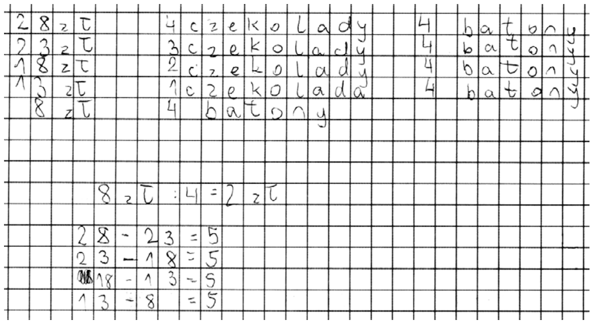


Ciekawych rozwiązań było zresztą więcej:

7.



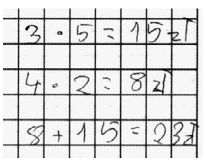
8.



Autor rozwiązania 7 ułożył, po czym rozwiązał, prawdziwy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi: *czekolada* i *baton*. Bardzo oryginalnie rozumował inny uczeń (8), który po prostu „eliminował” z zakupów kolejne czekolady.

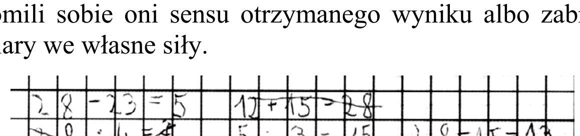
Niekiedy zadanie było rozwiązywane w pamięci, a na teście, poza poprawną odpowiedzią, pojawiało się tylko sprawdzenie.

9.

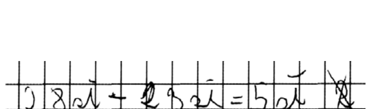


Znaczna część uczniów (31,7%) rozpoczęła proces rozwiązywania obiecująco: ustalając cenę jednej czekolady lub zestawu czekolada i baton, a czasem nawet obu tych rzeczy (2), po czym nie posunęła się dalej. Być może nie uświadomili sobie oni sensu otrzymanego wyniku albo zabrakło wiary we własne siły.

1.

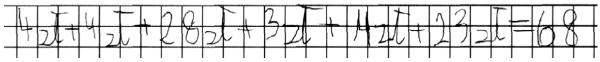


2.

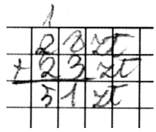


Inni (3–9) wykonywali różne działania na liczbach z zadania, dodając je wszystkie (3), albo tylko niektóre z nich (4, 5), a także mnożąc (6), dzieląc z resztą (7) czy łącząc różne działania (8, 9):

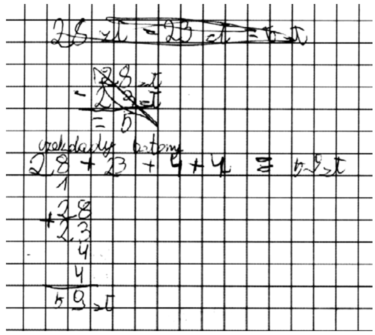
3.



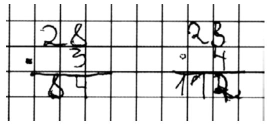
4.



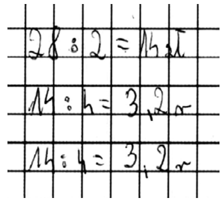
5.



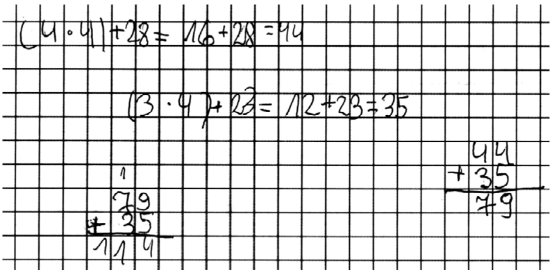
6.



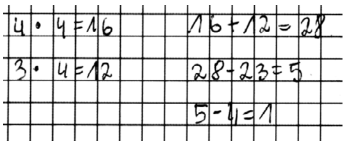
7.



8.



9.



Być może liczyli na łut szczęścia albo nie odbiegało to od ich działań przy rozwiązywaniu zadań tekstowych na co dzień. Obecność tej „strategii” widać w rozwiązaniach wszystkich zadań tekstowych wykorzystanych w badaniach.

Pora na kilka szkodliwych stereotypów

1) *Należy dążyć do tego, aby uczeń jak najwcześniej zaczął rozwiązywać zadania tekstowe, zapisując i wykonując odpowiednie obliczenie.*

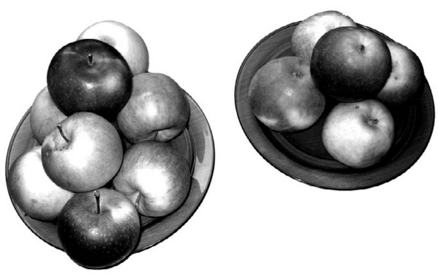
Zadanie tekstowe to historyjka zakończona jednym lub kilkoma pytaniami. Im jest ona bliższa doświadczeniom dziecka, im ściślej nawiązuje do jego intuicji i stosowanego na co dzień języka, czyli – im jest bardziej realistyczna z punktu widzenia ucznia, tym znalezienie odpowiedzi na postawione pytanie jest prostsze.

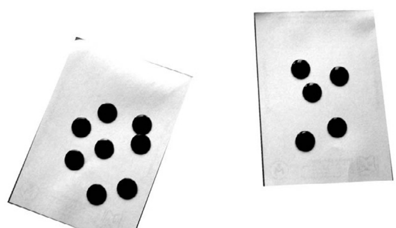
Doświadczenia dziecka rozpoczynającego naukę szkolną bazują przede wszystkim na jego działaniach, w mniejszym stopniu na reprezentacji ikonicznej, a zupełnie sporadycznie mają charakter symboliczny. Dlatego też zadanie tekstowe, zwłaszcza realistyczne, uruchamia przede wszystkim działania ucznia – najbardziej naturalnym sposobem jego rozwiązania jest odtworzenie sytuacji z zadania.

Przyjmijmy, że uczeń ma rozwiązać na przykład następujące zadanie:

Na stole stoją dwa talerze. Na jednym leży 8 jabłek, a na drugim 5. Ile jest łącznie jabłek na tych talerzach?

Najbardziej naturalnym sposobem znalezienia odpowiedzi na to pytanie jest ustawienie na stole dwóch talerzy, ułożenie na nich odpowiedniej liczby jabłek i przeliczenie, ile ich jest łącznie. Taką metodę rozwiązania zadania tekstowego nazwijmy **metodą naturalną**. Jej zasadniczą wadą jest to, że wymaga bogatego „ekwipunku”.

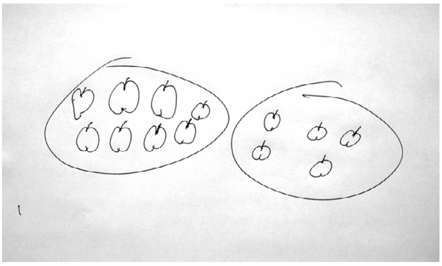


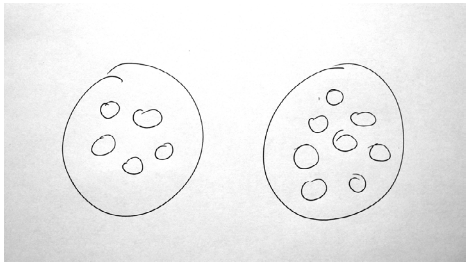


Jeżeli nie dysponujemy ani talerzami, ani jabłkami, możemy dokonać symulacji sytuacji opisanej w zadaniu: kasztany, żetony lub inne przedmioty zastąpią jabłka, natomiast kartki papieru lub cokolwiek innego – talerze. Układamy, przeliczamy i rozwiązujemy zadanie, stosując **metodę symulacji**.

Te dwie metody: *naturalna* i *symulacji* pozwalają dzieciom na samodzielne rozwiązanie zadania na poziomie reprezentacji enaktywnej – przypomnijmy: najprostszej z punktu widzenia komunikowania się dziecka z otaczającym światem.

Tego typu zadanie daje się także szybko i wygodnie rozwiązać za pomocą, bardziej lub mniej realistycznego, **rysunku**, czyli na poziomie reprezentacji ikonicznej:





W miarę nabierania przez uczniów wprawy rysunki mogą stawać się coraz bardziej umowne, i – w efekcie – nabierają cech symbolu (por. s. 86). Dzięki temu dziecko samodzielnie „oswaja" język symboliczny.

Najtrudniejszą metodą rozwiązania zadania tekstowego jest **rozwiązanie symboliczne**, w którym trzeba dokonać **matematyzacji opisanej w zadaniu sytuacji**, czyli trzeba wyrazić ją za pomocą pewnego obliczenia. W przypadku zadania przytoczonego wyżej – za pomocą dodawania $8 + 5 = 13$.

Jest to, powtórzmy, zdecydowanie najtrudniejszy i najbardziej formalny sposób rozwiązania zadania, wymagający od ucznia największej dojrzałości i najbardziej zaawansowanej wiedzy. Jego zaletą, i jest to ogólna zaleta języka symbolicznego, jest tempo otrzymania rozwiązania. Stosując symbole szybko otrzymujemy wynik, chyba że … same symbole pojawiły się za szybko.

Rozwiązania: „przez działanie" (enaktywne) oraz „przez rysunek" (ikoniczne) wynikają w naturalny sposób z treści zadania oraz doświadczeń dziecka. Rozwiązanie „przez obliczenie" (symboliczne) wymaga umiejętności dokonania matematyzacji sytuacji opisanej w zadaniu – wymaga zastąpienia czynności lub stanu opisanego w zadaniu odpowiednim działaniem lub serią działań. **Matematyzowanie** to jedna z najważniejszych, ale i najtrudniejszych, umiejętności matematycznych, rozwijanych w procesie kształcenia. Stopniowo ją doskonaląc musimy dbać o to, żeby dziecko rozumiało, co i dlaczego robi; w przeciwnym przypadku możemy niespodziewanie stanąć twarzą w twarz z kilkakrotnie już wspominanym zjawiskiem zdegenerowanego formalizmu.

Najlepszą metodą budowania takiego rozumienia jest pokazywanie rozwiązania symbolicznego równolegle z rozwiązaniami enaktywnymi i ikonicznymi – te prostsze wyjaśniają wówczas te trudniejsze, nadają sens symbolom i operacjom arytmetycznym. Pozwólmy więc uczniom tak długo, jak będzie im to potrzebne, rozwiązywać zadania „przez działanie" czy „przez rysunek", a gdy znana jest już odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie, zastanówmy się wspólnie, jak inaczej – szybciej – można było ją otrzymać. Niech operacje arytmetyczne wynikają w świadomości dzieci z sytuacji dla nich realistycznych, których są matematyzacją. **Niech sens** – jak zawsze – **poprzedza symbole.**

Warto zwrócić uwagę na jeszcze jedną, na pozór oczywistą, rzecz, ale przez tę oczywistość często zapominaną. Rozwiązanie przytoczonego wcześniej zadania jest dla większości dzieci dużo łatwiejsze niż wykonanie samego dodawania 8 + 5. Dlaczego?

Zadanie nadaje konkretny sens występującym w nim liczbom (ilości jabłek) oraz operacji, którą należy wykonać. Co ciekawsze, w tym zadaniu – tak długo, jak dziecko może działać i rysować – nie ma kłopotu z przekraczaniem progu dziesiątkowego, bo ten ostatni pojawia się tylko na poziomie symbolicznym. Uczeń może nawet sam zacząć budować sobie jakieś użyteczne strategie związane z przekraczaniem progu, np. przełożyć dwa jabłka z talerza na talerz.

Liczby występujące w oderwanym od kontekstu dodawaniu 8 + 5 nie mają dla dziecka żadnego konkretnego sensu. Jeśli uczeń ma już opanowaną procedurę dodawania na poziomie symbolicznym, to wykona jej odpowiednie kroki, jeśli jeszcze nie, to – żeby zrobić cokolwiek – musi nadać liczbom i działaniu jakiś zrozumiały dla siebie sens, np. ułożyć na własny użytek zadanie o jabłkach na talerzach.

Realistyczne zadania tekstowe mogą uczyć liczyć i tworzyć warunki do budowania przez dzieci własnych strategii obliczeniowych. Oprócz tego, pełnią ważną funkcję motywującą – dostarczają przyjemności płynącej z tego, że dało się pokonać pewną trudność, a także podnoszą samoocenę. Wszystko to jednak pod jednym warunkiem – że dziecko ma możliwość poszukiwania oraz wyboru metody jego rozwiązania.

Nie marnujmy tych możliwości, zbyt wcześnie zmuszając dzieci do operowania symbolami na każdym kroku. Symbole u dzieci w tym wieku na ogół nie budują zrozumienia, jedynie uruchamiają zapamiętane procedury.

2) *Podstawową pomocą przy rozwiązywaniu zadań tekstowych jest staranne wypisanie danych i szukanych.*

Początki heurystyki, czyli nauki o metodach (twórczego) rozwiązywania problemów sięgają Starożytnej Grecji, a wśród jej „rodziców” można wymienić m.in. Sokratesa – twórcę i propagatora tzw. metody położniczej, w której, dzięki stawianiu pytań pobudzających myślenie ucznia, prowadzimy go do samodzielnego „urodzenia” rozwiązania.

Do powstania współczesnej wersji heurystyki w znacznej mierze przyczynił się wybitny amerykański matematyk George Polya, którego dwie książki: *Jak to rozwiązać?* oraz *Odkrycie matematyczne* zostały przetłumaczone na język polski. Obie te prace poświęcone są właśnie sztuce rozwiązywania problemów (i to nie tylko matematycznych!). Wśród formułowanych w nich rad i wskazówek znajduje się również ta, zwracająca uwagę na potrzebę uważnego analizowania(!) danych i szukanych. W najbardziej ogólnej wersji rady G. Polyi, dotyczące procesu rozwiązywania zadań, brzmią następująco[10]:

1. Staraj się zrozumieć zadanie.
2. Znajdź związek między danymi i niewiadomymi. Ułóż plan rozwiązania.
3. Wykonaj swój plan.
4. Przestudiuj otrzymane rozwiązanie.

Być może efektem książek G. Polyi jest istniejący od lat w naszej szkole zwyczaj wypisywania danych i szukanych w procesie rozwiązywania zadania tekstowego. Heurystyczna wskazówka stała się obowiązkowym etapem procedury i zadomowiła się już nawet w I etapie kształcenia. Jej zwolennicy i propagatorzy nie zwrócili jednak uwagi na dwie rzeczy:

- G. Polya zachęca nie do wypisywania danych i szukanych, lecz do poszukiwania związków między nimi;
- a swoje wskazówki stworzył dla kilkunastolatków przygotowujących się do studiów i na nich testował ich słuszność.

A co w takim razie z dziewięcio- czy dziesięciolatkami? W ich przypadku wypisanie danych i szukanych ma tylko jedną zaletę:

- zwraca uwagę na informacje podane w zadaniu i sformułowane w nim pytanie;

oraz kilka ogromnie istotnych wad, zwłaszcza z punktu widzenia dzieci mniej formalnie myślących:

---

[10] G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa 1993.

- buduje „tamę” między treścią zadania a tworzonym rozwiązaniem, zachęcając, czy wręcz zmuszając uczniów do manipulowania – często przypadkowego – wypisanymi danymi;
- kieruje dziecko w stronę rozwiązania symbolicznego, opartego na operacjach arytmetycznych, ograniczając – czy wręcz zmniejszając do zera – szanse na inny sposób rozwiązania zadania (np. rysunkowy);
- uczniów, którzy nie są jeszcze gotowi w ten sposób radzić sobie ze złożonym zadaniem, zachęca w efekcie do tworzenia różnych „strategii obronnych”.

Jeśli chcemy zwrócić uwagę dzieci na dane umieszczone w zadaniu, zachęćmy je do kilkakrotnego przeczytania jego treści, do podkreślenia w nim ołówkiem ważnych informacji, sformułujmy serię pytań dotyczących sytuacji opisanej w zadaniu, poprośmy dzieci, aby „po swojemu” opowiedziały o tym, o co w nim chodzi – ale **nie wpychajmy ich w kolejny, bardzo wąski i ograniczający, schemat**.

Oczywiście, każda *heurystyka*, czyli wskazówka dotycząca metod rozwiązywania zadań czy problemów, jest także pewnym schematem, lecz jej siła polega na tym, że jest to schemat bardzo ogólny, który daje się zastosować zawsze i który tworzy warunki do budowania własnych, bardziej szczegółowych, strategii prowadzących do sukcesu.

3) *Jeśli chcemy, aby uczniowie opanowali umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych, musimy przerobić z nimi dużą liczbę typowych zadań.*

Zacznijmy od słowa-klucza: „utrwalić”. Co to znaczy, że dzieci coś „utrwaliły”? Najczęściej kryje się za tym zwrotem zrobienie przez nie, z większym lub mniejszym zaangażowaniem (także intelektualnym), serii zbliżonych czy nawet bardzo podobnych przykładów lub zadań. Celem tego zabiegu jest „wdrukowanie” w świadomość dzieci pewnej mechanicznej procedury postępowania, pewnej typowej reakcji na konkretną sytuację dydaktyczną.

W przypadku zadań tekstowych można wyróżnić kilka podstawowych kategorii zadań pojawiających się w I etapie kształcenia i utrwalić metody ich rozwiązywania. Można, ale czy warto?

Jak pokazuje także praktyka, w efekcie takiego podejścia umiejętność rozwiązywania zadań „rozpadnie się” w świadomości ucznia na dwie umiejętności składowe:

- rozpoznanie typu zadania;
- przywołanie z pamięci właściwej procedury postępowania.

Takie podejście do zadań tekstowych ma swoje praktyczne zalety – daje sporą szansę, że znaczna część dzieci poradzi sobie z zadaniami „utrwalonych" typów na popularnych w naszych szkołach testach kompetencji trzecioklasisty lub na początku swojej edukacji w klasach starszych. Na początku, bo potem pojawią się nowe klasy zadań i wszystko trzeba będzie zaczynać od nowa. Trudno powiedzieć, jak duża jest wspomniana wcześniej szansa – procent poprawnych rozwiązań zadania **C** (por. s. 79), czyli najbardziej typowego zadania złożonego, nie jest przecież imponujący.

To podejście ma jednak przede wszystkim wady, ponieważ:

- wypacza i degeneruje sens umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych – jak już wspominaliśmy – najważniejszego celu edukacji matematycznej w szkole podstawowej;
- wzmacnia i utrwala jako podstawową, czy nawet jedyną, strategię intelektualną – strategię przypominania.

Sam odruch poszukiwania wzorca w pamięci nie jest niczym złym. Kłopoty pojawiają się dopiero wtedy, gdy strategia ta jest jedynym narzędziem intelektualnym, stosowanym przez ucznia. Prowadzi to bowiem szybko do tego, że uczeń jest w stanie poradzić sobie tylko(!) z tymi zadaniami, które poprawnie rozpozna (*Na co to jest? Na mnożenie czy odejmowanie?*) i do których „klucz" posiada w pamięci.

A jeśli nie rozpozna? Wtedy rezygnuje z próby sensownego rozwiązania zadania, uruchamiając jakieś „strategie zastępcze" (*Dodajmy wszystkie liczby z zadania, może to jest zadanie na dodawanie, może będzie dobrze.*).

Efekty takich działań widać analizując np. wyniki polskich piętnastolatków, biorących udział w badaniach PISA (por. s. 141) czy w innych badaniach międzynarodowych – dobre wyniki w sytuacjach typowych i bezradność (wyuczona?) wszędzie tam, gdzie sytuacja jest nowa i wymaga zastosowania posiadanej wiedzy.

Rozwiązanie serii typowych, podobnych zadań, wbrew obiegowym opiniom, nie tylko nie pomaga opanować umiejętności rozwiązywania zadań, ale wręcz uniemożliwia jej zdobycie! Zamiast rzeczywistej umiejętności, w ostatecznym rozrachunku udziałem dziecka staje się kilka schematów, znudzenie i zniechęcenie, brak wiary we własne siły oraz intelektualna bezradność[11]. Czasami także garść „obronnych strategii", których celem jest ukrycie tej bezradności:

[11] Por. np. D. Klus-Stańska, M. Nowicka, *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*, WSiP, Warszawa 2005.

– *jeśli liczby w zadaniu są mniej więcej tej samej wielkości, należy je dodać,*
– *jeśli obie są nieduże, to należy je pomnożyć,*
– *jeśli jedna jest nieco większa od drugiej, to od większej odejmujemy mniejszą,*
– ...

A chodziło nam przecież o coś zupełnie innego!

Pamiętajmy! Jeśli nie stworzymy warunków do tego, żeby dzieci budowały sobie (z naszą pomocą!) sensowne strategie postępowania, to wymyślą własne, które, gdy zabraknie we właściwym momencie informacji zwrotnej, mogą mocno nas zaskoczyć.

Przytoczmy na koniec słowa wspomnianego wcześniej G. Polyi:

Uczenie mechanicznego wykonywania typowych operacji matematycznych i niczego więcej leży niewątpliwie poniżej poziomu książki kucharskiej, gdyż przepisy kucharskie zostawiają coś dla fantazji i sądu kucharki, a przepisy matematyczne – nic[12].

Próbuj i wyciągaj wnioski

Co robi dziecko, gdy ma rozwiązać zadanie tekstowe i nie wie, w jaki sposób to zrobić? Najczęściej w takiej sytuacji zaczyna zgadywać – podobnie zresztą postępują też na ogół dorośli: *a może 14? albo 20?* ... Metoda prób i błędów jest jedną z najbardziej naturalnych metod postępowania w sytuacji, gdy nie wiemy, co trzeba zrobić.

I dobrze! Bo wprawdzie metoda ta jest mało efektywna, ale może stać się podstawą do zbudowania przez uczniów znacznie potężniejszego narzędzia, które – przez analogię – możemy nazwać **strategią prób i poprawek**. W tym celu wystarczy wspólnie zacząć zastanawiać się nad tym, co wynika z kolejnych prób i jakich nowych informacji nam dostarczają. Niekiedy wystarczy jedno dobre pytanie postawione we właściwym momencie.

1. *W zagrodzie były kury i króliki. Razem było 20 głów i 68 nóg. Ile było kur, a ile królików?*

[12] G. Polya, *op.cit.*, s. 244.

Tego typu zadania od lat pojawiają się na różnego rodzaju konkursach matematycznych. Dorosły na ich widok od razu zaczyna pisać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Czy rzeczywiście musimy strzelać z armaty do wróbla? Spróbujmy inaczej:

Wszystkich zwierząt jest 20.	*10 królików to:*	*$10 \times 4 = 40$ nóg*
To może królików jest 10?	*kur też byłoby 10:*	*$10 \times 2 = 20$ nóg*
Sprawdźmy, czy tak rzeczywiście jest:	*razem byłoby więc*	*60 nóg.*

A miało być 68. Pierwszy strzał i pudło. Nóg jest za mało. Ale co to oznacza?
Co wynika z tego, że gdy królików jest 10, to nóg łącznie jest za mało?
Czy królików powinno być więcej czy mniej niż 10?

Więcej, bo to one „dodają” nóg.	*12 królików to:*	*$12 \times 4 = 48$ nóg*
Pora na poprawkę! To może 12?	*8 kur to:*	*$8 \times 2 = 16$ nóg*
	razem więc	*64 nogi.*
Znacznie lepiej!		
Widać już, że królików było 14.	*14 królików to:*	*$14 \times 4 = 56$ nóg*
Ale sprawdźmy to na wszelki wypadek:	*6 kur to:*	*$6 \times 2 = 12$ nóg*
	razem:	*68 nóg!*
Zrobione!		

Jak widać, do rozwiązania tego zadania wystarczy umiejętność dodawania i mnożenia w niezbyt dużym zakresie liczbowym i nic więcej! Może jeszcze tylko jedna, na ogół zupełnie niedoceniania rzecz – **chęć rozwiązania zadania**, wynikająca, być może, z przekonania, że jeśli się spróbuje, to na pewno się uda. Jedną z ważniejszych rzeczy w procesie rozwijania umiejętności matematycznych uczniów jest wzmacnianie w dziecku wiary w swoje siły, w siłę posiadanej wiedzy, budowanie przekonania, że jeśli spróbuje, to powinno być dobrze.

Trzeba tylko próbować i wyciągać z tych prób wnioski! Bo jeśli dziecko nie ma odwagi próbować, to…

Nie należy mylić przedstawionej na powyższym przykładzie strategii z metodą prób i błędów. Metoda prób i błędów, w której nie ma miejsca na refleksję o wnioskach płynących z kolejnych wykonywanych prób, nie gwarantuje końcowego sukcesu. **Strategia prób i poprawek** tę gwarancję daje. Jej zbudowanie na bazie spontanicznych „strzałów” uczniów jest proste – wystarczy zacząć konsekwentnie stawiać po kolejnych próbach jedno krótkie i zrozumiałe pytanie: *Co z tej próby wynika?*

I jeszcze kilka zadań:

2. *Wybrałem pewną liczbę, dodałem do niej 16 i otrzymałem 44. Jaką liczbę wybrałem na początku?*

No to znowu spróbujmy. Zawsze warto zaczynać od czegoś „okrągłego”, co daje proste obliczenia i szybką orientację w treści zadania.

Może 10:	*10 + 16 = 26 – pudło, o wiele za mało. Czyli – ta liczba jest większa!*
Może 20:	*20 + 16 = 36 – lepiej, ale ciągle za mało. Jeszcze większa.*
30?	*30 + 16 = 46 – tym razem troszkę za duża. O 2!*
Zatem 28:	*28 + 16 = 44. Dobrze!*

A teraz, gdy już wiemy, jaka to była liczba, możemy się wspólnie zastanowić, czy można było znaleźć ją szybciej.

3. *W pudełku było 26 klocków. Janek zabrał część z nich. W pudełku zostało tylko 8 klocków. Ile klocków zabrał Janek?*

Może wziął 10 klocków?	*26 – 10 = 16 – pudło.*
Wziął więcej czy mniej niż 10?	
Sprawdźmy, co by było, gdyby wziął 16:	*26 – 16 = 10 – bliżej.*
Czyli wziął jeszcze więcej – 18?	*26 – 18 = 8.*

W zadaniu są podane dwie liczby, jedna większa od drugiej, więc pewnie trzeba je odjąć (por. s. 94). Kłopot w tym, że z treści zadania wynika odejmowanie 26 – ? = 8, a nie 26 – 8 = ?. Ilu uczniów rzeczywiście rozumie, dlaczego to drugie odejmowanie daje rozwiązanie?

Może ich procent będzie większy, gdy najpierw rozwiążą to zadanie, stosując strategię prób i poprawek, a potem zastanowią się nad szybszą drogą do celu. Przy okazji mają szansę odkryć ważną, i wcale nie taką prostą jak się wydaje, własność odejmowania: im większą liczbę odejmujemy, tym wynik jest mniejszy.

4. *Ojciec i syn mają razem 60 lat. Ojciec jest trzy razy starszy od syna. Ile lat ma każdy z nich?*

Ile lat może mieć syn? Może 10: to ojciec ma $3 \times 10 = 30$ lat,
a razem mają 40 – za mało.
Czyli syn musi być starszy. 15?
$3 \times 15 = 45$, $45 + 15 = 60$, zrobione!

Ponownie, zamiast układu równań czy jednego równania, kilka prostych operacji.

Strategia prób i poprawek ma wiele zalet, przede wszystkim:

- daje się z sukcesem zastosować do ogromnej liczby zadań różnych typów,
- najczęściej wymaga zastosowania bardzo prostych narzędzi matematycznych,
- doskonali sprawność rachunkową dzieci i pozwala im poznawać własności działań,
- nawet gdy nie prowadzi do sukcesu, to pozwala lepiej zrozumieć treść rozwiązywanego zadania, co może umożliwić dziecku sięgnięcie po inną metodę.

I jeszcze jedna, bardzo istotna zaleta – **uczy sprawdzać poprawność rozwiązania zadania**. Bo sprawdzenie to nie polega na kontroli poprawności wykonywanych obliczeń, ale na ustaleniu, czy otrzymany wynik spełnia warunki zadania, czy pasuje do przedstawionej w nim sytuacji.

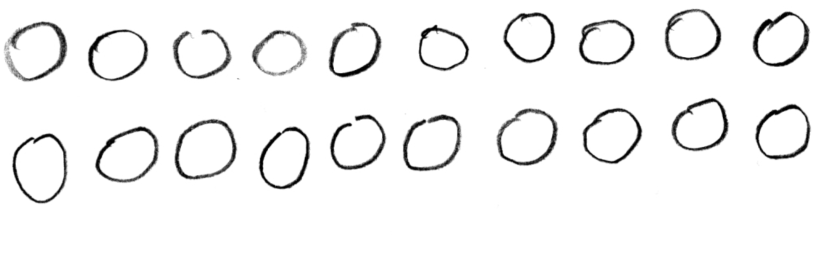
Czasami wystarczy rysunek, więc rysuj!

O potrzebie rysowania podczas rozwiązywania zadań tekstowych wspominaliśmy już wcześniej, w kontekście różnych typów reprezentacji, tworzonych przez dziecko. „Rysowanie zadania” jest także jedną z najpotężniejszych strategii służących ich rozwiązywaniu na każdym szczeblu edukacji, nie tylko w klasach 1–3.

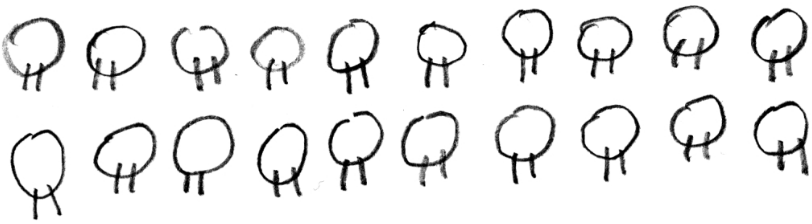
Niekiedy zrobienie rysunku niespodziewanie przynosi rozwiązanie. Tak jest na przykład w przypadku zadania, od którego rozpoczęliśmy:

1. *W zagrodzie były kury i króliki. Razem było 20 głów i 68 nóg. Ile było kur, a ile królików?*

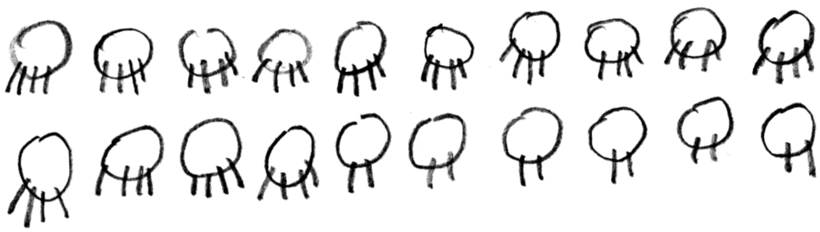
Było 20 głów, narysujmy je:



Do każdej głowy „doczepmy" po dwie nogi:



Tak wyglądałaby sytuacja, gdyby były to same kury. „Użyliśmy" już 40 nóg. Zostało nam jeszcze 28 nóg „bez przydziału", więc dorysujmy je parami, zamieniając w ten sposób niektóre kury na króliki.



Zadanie narysowane. Teraz wystarczy przeliczyć:

14 królików i 6 kur.

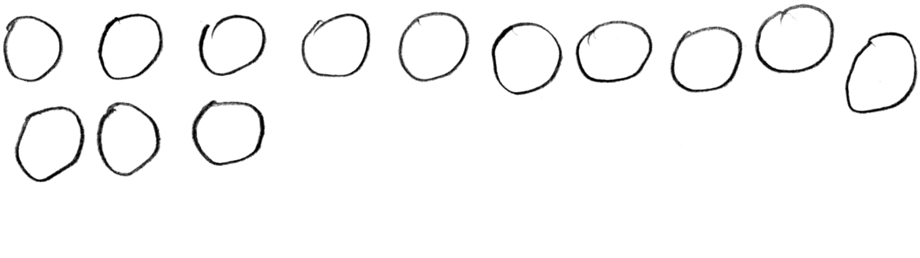
Warto sprawdzić, czy czegoś nie pominęliśmy:
$14 + 6 = 20$, $14 \times 4 + 6 \times 2 = 68$. Dobrze!

Analogicznie postępujemy w przypadku innych, podobnych strukturalnie zadań, których wcale nie trzeba rozwiązywać za pomocą układu równań – wystarczy dobry rysunek:

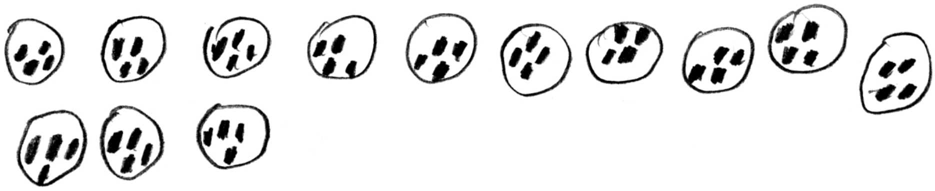
5. *Ania karmiła w schronisku psy i koty. Każdy pies dostał 6 kawałków mięsa, a każdy kot 4 kawałki. Ile było psów, a ile kotów, jeśli łącznie było ich 13, a Ania dała im 68 kawałków mięsa?*

Spróbujmy narysować to, o czym opowiada historyjka z zadania:

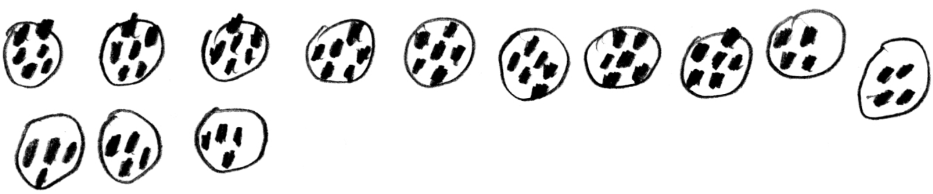
Było 13 zwierząt, każde z nich miało pewnie swoją miseczkę, narysujmy więc 13 miseczek:



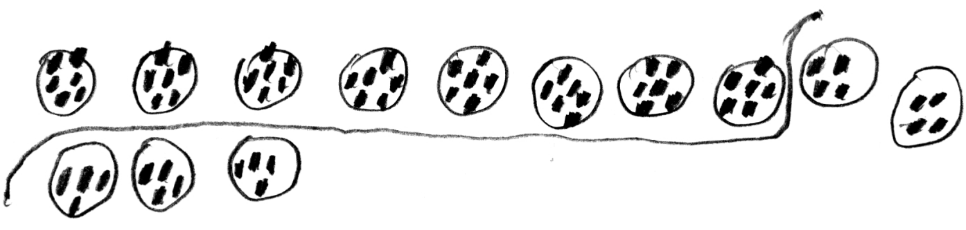
Do każdej miseczki wkładamy po 4 kawałki mięsa, czyli tyle, ile dostaje kot:



To razem 40 i 12, czyli 52 kawałki. To zostało ich jeszcze 16 do rozłożenia. To są te dodatkowe kawałki dla psów, rozłóżmy więc je po dwa do kolejnych miseczek, aż razem będzie ich 16: 2, 4, 6, ..., 16.



To są miski psów, a to miski kotów:



Czyli w schronisku było 8 psów i 5 kotów.

Sprawdźmy, czy gdzieś się nie pomyliliśmy:
8 + 5 = 13 – liczba zwierząt się zgadza;
8 × 6 = 48, 5 × 4 = 20, 48 + 20 = 68 – liczba kawałków mięsa też.

Ale przecież uczeń nie zapisał żadnego obliczenia – może powiedzieć zwolennik obowiązku stosowania symboliki matematycznej „na co dzień".

A czy musiał? Może lepiej, że nie zapisał? Może dzięki temu każdy uczeń przekona się, że rozwiązywanie nawet na pozór tak trudnych zadań jest w zasięgu jego możliwości?

Kolejne zadanie podobne jest do zadania **F** z testu (por. s. 73), choć odrobinę trudniejsze:

6. *Za 6 filiżanek i 6 talerzyków pani Irena zapłaciła 42 złote. Następnego dnia pani Irena dokupiła jeszcze 2 filiżanki i 6 talerzyków z tego samego zestawu. Tym razem zapłaciła 26 zł. Ile kosztowała filiżanka, a ile talerzyk?*

Narysujmy te zakupy:

Na razie nic nowego, po prostu treść zadania przedstawiona na rysunku. Rysunek przemawia jednak dużo mocniej i pozwala zobaczyć to, co w zapisie umyka, np.:

– *Za którym razem pani Irena kupiła więcej naczyń? O ile więcej? Ile więcej za nie zapłaciła? ...*

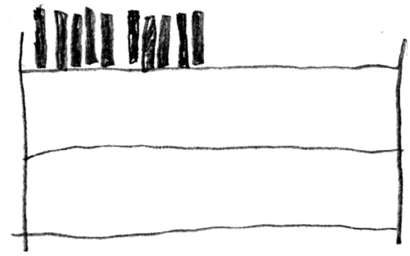
– *Za pierwszym razem pani Irena kupiła 6 kompletów: filiżanka + talerzyk. Ile kosztuje jeden taki komplet? ...*

Informacja o cenie kompletu może być wykorzystana w różny sposób, także do poszukiwania ceny filiżanki i talerzyka z pomocą strategii prób i poprawek: *jeśli komplet kosztuje 7 złotych, to może...*

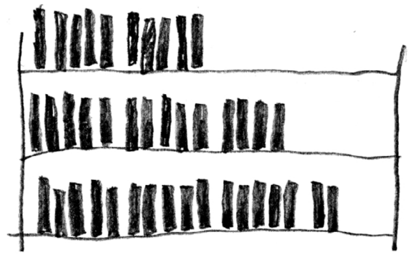
Czasami nie daje się od razu zrobić właściwego rysunku, ale daje się go dopasować do warunków zadania właśnie z pomocą prób i poprawek – te dwie strategie wzajemnie bardzo się wzmacniają:

7. *Dorota trzyma swoje książki na regale o trzech półkach. Najmniej książek ma na górnej półce. Na środkowej ma ich o 4 więcej, a na dolnej o 7 więcej niż na górnej. Łącznie ma 47 książek. Ile książek stoi na każdej z półek?*

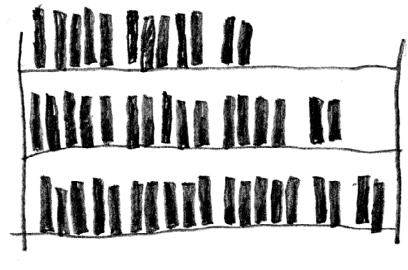
Ile książek może stać na najwyższej półce? Może 10? Zróbmy odpowiedni rysunek:



Na górnej 10, to na środkowej 14, a na dolnej 17, razem 41. Za mało.



To dorysujmy kolejne książki, po jednej na półce, tak, aby było dobrze: 42, 43, 44, ...



Na górnej jest 12 książek, na środkowej 16 (czyli o 4 więcej), na dolnej 19, czyli o 7 więcej niż na górnej, razem 47 książek. Wszystko się zgadza.

Przy rozwiązywaniu wielu zadań – zarówno łatwiejszych, jak i trudniejszych – rysunek może ogromnie pomóc: może dać rozwiązanie „na tacy”, może pozwolić odkryć drogę prowadzącą do rozwiązania, a w najgorszym razie pozwolić lepiej zrozumieć, o co w zadaniu chodzi. Bez zrozumienia treści zadania wszelkie próby jego sensownego rozwiązania są z góry skazane na niepowodzenie.

Zrób tabelkę

Jedna z przytoczonych wcześniej (s. 91) rad G. Polyi, dotyczących sztuki rozwiązywania zadań tekstowych mówi o potrzebie szukania związku między danymi i niewiadomymi. Spróbujmy poszukać tego związku w sposób bardziej niż dotychczas uporządkowany:

7’. *Dorota trzyma swoje książki na regale o trzech półkach. Najmniej książek ma na górnej półce. Na środkowej ma ich o 7 więcej, a na dolnej o 18 więcej niż na górnej. Łącznie ma 73 książki. Ile książek stoi na górnej półce?*

Zacznijmy od strategii prób i poprawek oraz „ustawienia” 10 książek na górnej półce, ale zbierane informacje zapiszmy w tabelce, np. takiej:

Górna półka	*Środkowa półka*	*Dolna półka*	*Razem*
10	*17*	*28*	*55*

Razem 55, czyli za mało. Zobaczmy, co i jak będzie się zmieniać, jeśli będziemy dostawiać na każdą półkę po jednej książce:

Górna półka	*Środkowa półka*	*Dolna półka*	*Razem*
10	*17*	*28*	*55*
11	*18*	*29*	*58*
12	*19*	*30*	*61*
13	*20*	*31*	*64*
14	*21*	*32*	*67*

Jeszcze dwa wiersze i koniec: na górnej półce stoi 16 książek.

Najtrudniejszą czynnością jest zbudowanie tabelki. Potem już tylko wykorzystywanie prostych zależności: tu rośnie o 1, tu o 1, tu o 1, a tu o 3.

Wypełnianie tabelki można też zacząć od „samego początku”:

8. *Janek, Tomek, Piotr i Karol zbierają modele samochodów. Tomek ma o 7 modeli więcej niż Janek, Karol ma o 18 modeli więcej niż Tomek, a Piotr o 3 więcej niż Karol. Razem mają 88 modeli. Ile modeli ma każdy z nich?*

Który z chłopców ma najmniej modeli? Janek.

Warto budowanie tabeli i jej wypełnianie zacząć więc od Janka.

Janek	***Tomek***	***Karol***	***Piotr***	***Razem***
1	*8*	*26*	*29*	*64*
2	*9*	*27*	*30*	*68*
3	*10*	*28*	*31*	*72*
4	*11*	*29*	*32*	*76*
5	*12*	*30*	*33*	*80*
6	*13*	*31*	*34*	*84*
7	*14*	*32*	*35*	*88*

Sprawdźmy jeszcze, czy liczby z ostatniego wiersza tabeli spełniają warunki z zadania:

Tomek o 7 więcej od Janka;
Karol o 18 więcej od Tomka;
Piotr o 3 więcej od Karola;
razem 88. Wszystko tak, jak trzeba.

9. *Janek, Tomek i Karol zbierają modele samochodów. Tomek ma dwa razy więcej modeli niż Janek, a Karol ma trzy razy więcej modeli niż Tomek. Razem mają 135 modeli. Ile modeli ma każdy z nich?*

Zacznijmy od 10 modeli u Janka:

Janek	***Tomek***	***Karol***	***Razem***
10	*20*	*60*	*90*
11	*22*	*66*	*99*
12	*24*	*72*	*108*
			117
			126
15	*30*	*90*	*135*

Tu o 1 więcej, tu o 2, tu o 6, a tu o 9.

Acha, dalej będą kolejno: 117, 126, 135.

Nie musimy wypełnić całej tabelki, żeby wiedzieć, jakie jest rozwiązanie.

Spójrzmy jeszcze raz na dwa ostatnie zadania. Zadanie 8 dotyczy porównywania różnicowego, zadanie 9 – ilorazowego. Może takie doświadczenia z wypełnianiem tabelek pomogą niektórym uczniom uświadomić sobie różnicę między jednym a drugim?

Te dwie, związane ze sobą, strategie: **Próbuj i wyciągaj wnioski** oraz **Zrób tabelkę** pozwalają dziecku na rozwiązanie wielu zróżnicowanych zadań – wystarczy umieć liczyć. Trzeba także zrobić dwie rzeczy, które podczas rozwiązywania zadań tekstowych są być może najistotniejsze: trzeba zrozumieć zadanie i trzeba podjąć próbę jego rozwiązania – o to drugie zdecydowanie łatwiej, gdy uczeń wie, od czego może zacząć. Bardzo często zrozumienie zadania jest konsekwencją przeprowadzonych prób: strzelając i sprawdzając swoje strzały czy wypełniając tabelkę, uczeń bada sytuację opisaną w zadaniu, bada związki istniejące między występującymi w zadaniu wielkościami i zaczyna dostrzegać, o co w nim tak naprawdę chodzi.

Przytoczone strategie to też pewne schematy postępowania. Jednak ich siłą, w odróżnieniu od innych schematycznych metod, z którymi zapoznają się uczniowie, jest uniwersalność ich zastosowania – mogą przydać się dosłownie wszędzie!

Rozwiązywanie tego samego zadania kilkoma różnymi metodami ma wiele walorów kształcących. Zwraca między innymi uwagę na to, że różne drogi mogą prowadzić do tego samego celu, że przy rozwiązywaniu zadań możliwe i poprawne są różne sposoby myślenia oraz postępowania. Każda z metod może ujawnić inną własność badanej sytuacji, może pokazać inne związki między występującymi w zadaniu obiektami. Zachęcajmy więc uczniów, aby prezentowali swoje rozwiązania, opowiadali o stosowanych metodach, o pytaniach, dzięki którym wpadli na taki czy inny pomysł. Szybko okaże się, że pomysły te są różnorodne i rzeczywiście zaskakujące. I pamiętajmy – **zawsze najlepsza jest ta metoda rozwiązania, którą uczeń samodzielnie wymyśli!**

Co wynika z tego tekstu?

Przeczytajmy uważnie ten tekst:

Biała szkoła

Ośrodek znajduje się w odległości 10 minut pieszo od centrum Zakopanego. Z jego okien roztacza się widok na przepiękną panoramę Tatr.

Ośrodek oferuje smaczne domowe jedzenie – pełne dzienne wyżywienie w cenie 24 złotych (śniadanie 6 zł; obiad 12 zł; kolacja 6 zł).

Do wyboru pokoje różnej wielkości:

typ pokoju	liczba pokoi	cena za nocleg od jednej osoby
dwuosobowy	6	25 zł
trzyosobowy	4	20 zł
czteroosobowy	4	18 zł
pięcioosobowy	3	15 zł
sześcioosobowy	3	13 zł

Istnieje możliwość organizacji ogniska i kuligów (sanie dla 6 osób: 71 zł).

– *Czego możemy się dowiedzieć z tej oferty o ośrodku?*

– *Na jakie pytania możemy odpowiedzieć, korzystając z podanych informacji?*

– *Zróbmy listę tych pytań. Poszukajmy na nie wspólnie odpowiedzi.*

Czy wymyślając pytania i – w efekcie – układając zadania tekstowe, uczniowie wymyślą, żeby dodawać liczbę pokoi do ceny noclegu albo mnożyć cenę obiadu przez koszt wynajęcia sań (por. s. 84)? Jeśli nawet to się zdarzy, to bardzo szybko sobie uświadomią, że tego typu operacja nie ma żadnego praktycznego (i matematycznego także) sensu.

Oferta ta jest na tyle bogata, że stwarza uczniom naprawdę wiele możliwości:

– od stwierdzenia, ile kosztuje nocleg jednej osoby w pokoju dwuosobowym i na przykład o ile jest droższy od noclegu w pokoju trzyosobowym,

– po rozważania o tym, jak może ulokować się wycieczka złożona z 8 dziewcząt i 7 chłopców, aby koszt pobytu był jak najniższy.

Dzięki temu każdy uczeń może w niej „znaleźć” coś na swoją miarę.

Rozwijanie umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych to złożony proces, bo i sam proces rozwiązania zadania obejmuje wiele etapów – zrozumienie sytuacji opisanej w zadaniu, przeanalizowanie podanych w nim informacji i zbadanie ich przydatności, ułożenie planu rozwiązania itd. Tego typu „kruszenie" krótszych i dłuższych (choć zawsze bogatych!) tekstów[13] może być skutecznym narzędziem na drodze do mistrzostwa, nie tylko w rozwiązywaniu zadań, ale także w rozwiązywaniu problemów. A – niejako przy okazji – uczeń ma okazję poznać kolejną ważną strategię poszukiwania rozwiązań problemów i zadań tekstowych – znaną od kilku tysięcy lat pod nazwą **syntezy**.

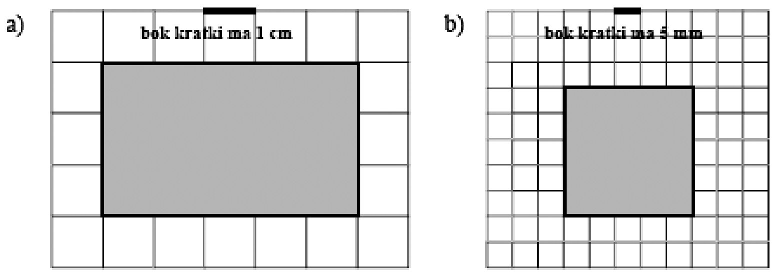
[13] Por. A. Kaufmann, M. Fustier, A. Drevet, *Inwentyka*, WNT, Warszawa 1975.

OBLICZANIE OBWODU PROSTOKĄTA

W klasach 1–3 polskiej szkoły elementy geometrii pojawiają się w bardzo ograniczonym zakresie, co jest konsekwencją nie tylko zdominowania tego etapu kształcenia przez umiejętności obliczeniowe, ale także wynikiem pewnej tradycji edukacyjnej, opartej na dość dedukcyjnym i formalnym spojrzeniu na pojęcia oraz umiejętności geometryczne.

To jeden z powodów, dla których w badaniu pojawiło się tylko jedno zadanie o charakterze geometrycznym, czy raczej arytmetyczno-geometrycznym:

3. Oblicz obwody narysowanych prostokątów.



Jak widać, umiejętność obliczania obwodu prostokąta badana była w dwóch sytuacjach:

– gdy prostokąt narysowany jest na kratce o boku 1 cm (z tego typu przykładami uczniowie powinni wielokrotnie zetknąć się w procesie kształcenia)

oraz

– gdy nazwa „prostokąt" została użyta w stosunku do kwadratu narysowanego na kratce o boku 5 mm.

Z przykładem **a** poradziła sobie nieco ponad połowa dzieci, z przykładem **b** tylko około $^1/_3$:

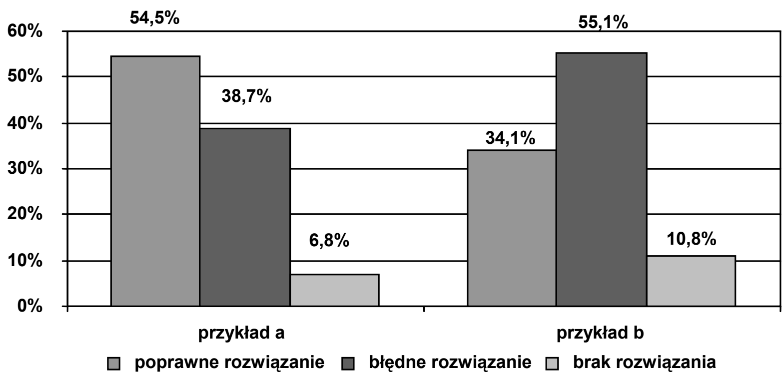
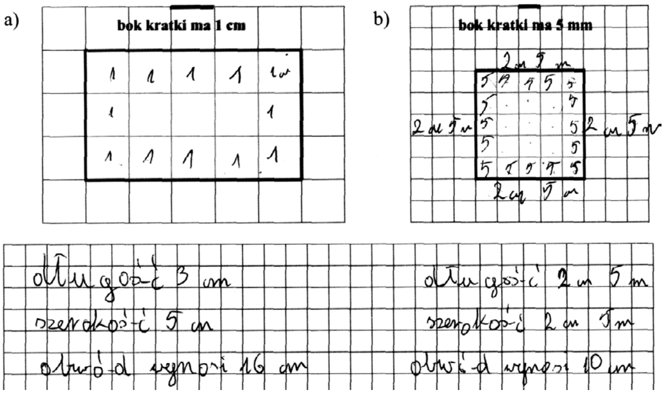


Diagram 13. Obliczanie obwodu prostokąta – rozkład rozwiązań.

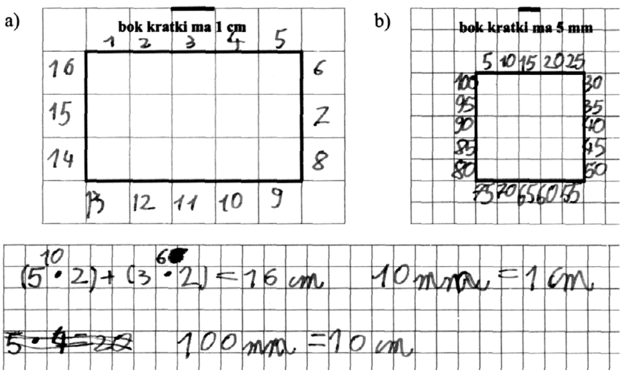
Uderza duża różnorodność metod zastosowanych przez uczniów, co prawdopodobnie oznacza, że część z nich nie miała zbyt wielu okazji do liczenia obwodu.

Rozwiązania 1–5 pokazują istotę samego pojęcia: dzięki umieszczeniu prostokątów na kratce można obwód policzyć „na palcach”, przeliczając odpowiednie odcinki kratki, albo od razu sumując ich długości.

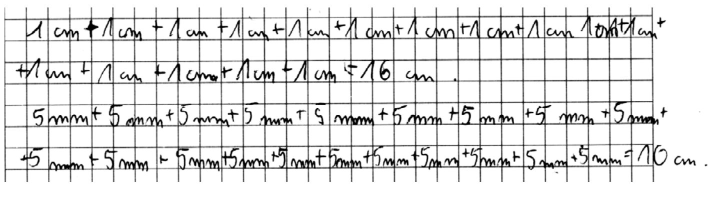
1.



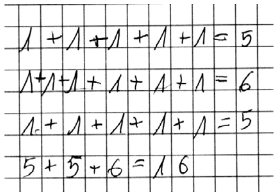
2.



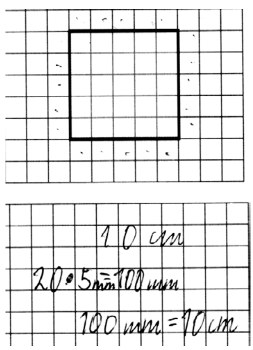
3.



4.



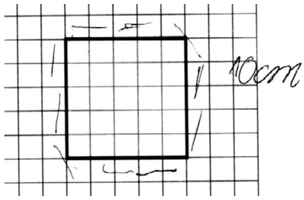
5.



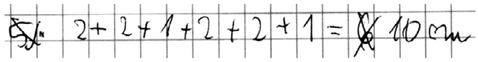
Rozwiązanie zadania wymaga zatem – co widać – elementarnych czynności. Część uczniów, zapewne na wszelki wypadek, uzupełniła swoje rozumowanie o dodatkowe obliczenia (2, 5).

Wprowadzenie kratki o boku 5 mm pozwoliło niektórym uczniom na zademonstrowanie swojego matematycznego sprytu:

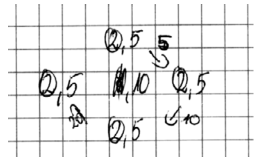
6.



7.

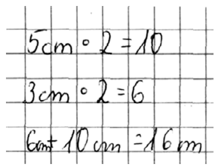


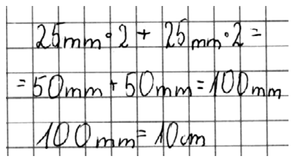
8.

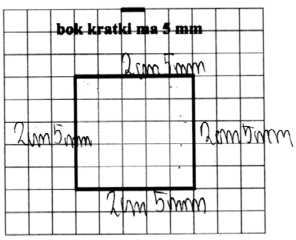


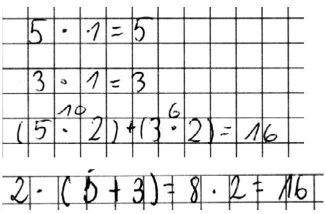
Autorzy rozwiązań 6 i 7 zastosowali najprawdopodobniej tę samą metodę postępowania: *połączmy odcinki tak, aby otrzymać pełne centymetry*, choć zapisali ją w zupełnie różny sposób. Także i trzecie rozwiązanie (8) charakteryzuje się oryginalnym sposobem zapisu.

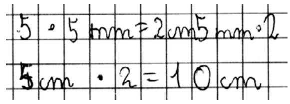
Inne poprawne rozwiązania wyglądały już bardziej konwencjonalnie, także ze względu na typ pojawiających się w nich usterek:

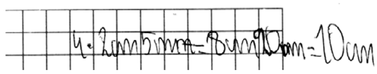


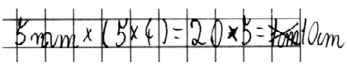


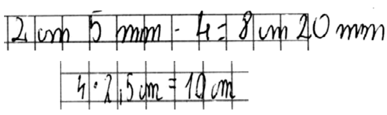




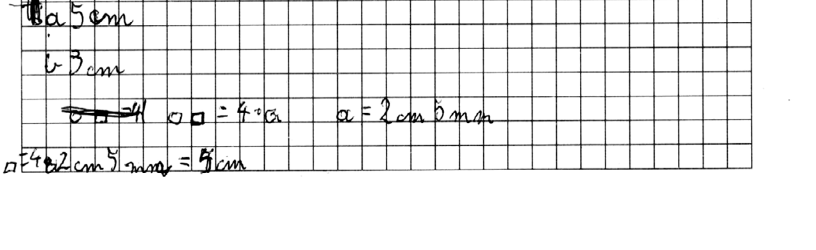


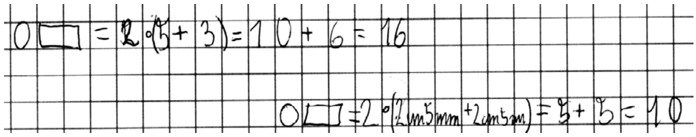


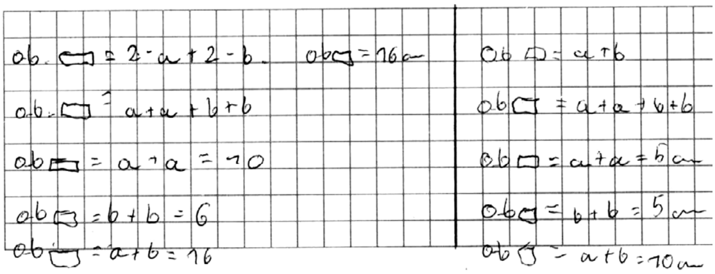




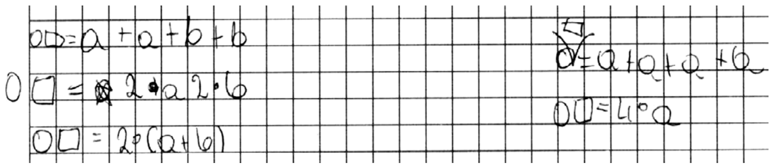
W obliczeniach pojawiły się także próby sięgnięcia po wzory i symbole literowe:

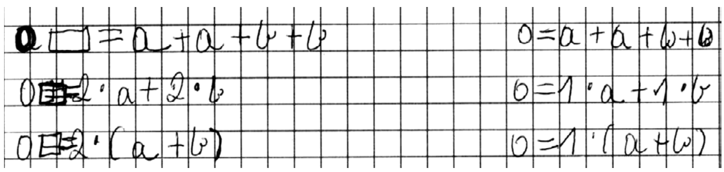






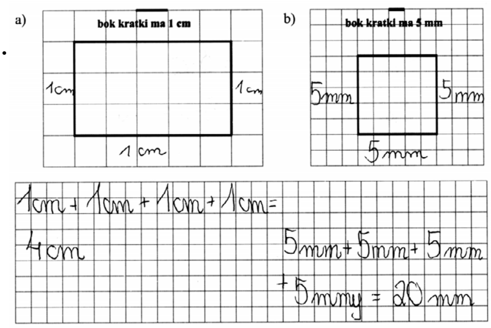
choć dość często kończyły się one jedynie na żonglerce symbolami:





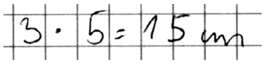
Wśród rozwiązań tego zadania trudno jest wskazać jakieś typowe kategorie błędów. Część błędnych rozwiązań była konsekwencją niezrozumienia treści zadania, np. uczniowie odnosili dane dotyczące boku kratki do prostokąta, którego obwód mieli obliczyć (1, 2). Niewielka część dzieci – 5,0% dla przykładu **a** oraz 4,2% dla przykładu **b** – pomyliła pojęcia obwodu i pola (3).

1.

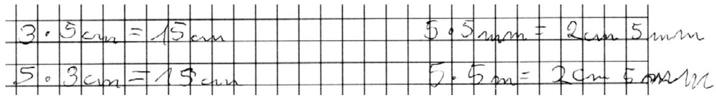


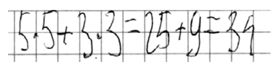
2.

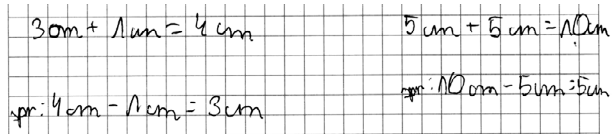
3.

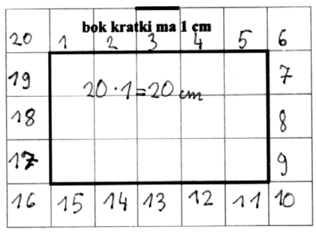


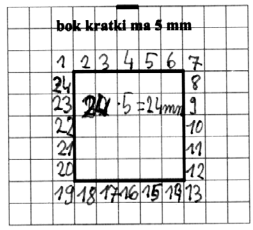
Większość błędów wyrażała się w dość przypadkowych obliczeniach (4–6) i najprawdopodobniej była efektem niezrozumienia pojęcia obwodu (por. też 7):

4. 

5. 

6. 

7. a) 

b) 

Podobnie, jak w innych zadaniach, także i tu pojawiły się przykłady pozornego sprawdzania poprawności rozwiązania (6).

Trudna czy łatwa?

Dlaczego w polskim nauczaniu początkowym tradycyjnie jest tak mało elementów geometrii?

O jednej z możliwych przyczyn takiego stanu rzeczy już wspominaliśmy – w świadomości bardzo wielu osób (matematyków, nauczycieli ...) proces uczenia się geometrii powinien zaczynać się od punktu, prostej i płaszczyzny. W kolejnych „odsłonach” punkt powinien trafić na prostą, dzieląc ją na dwie półproste, a dwie półproste o wspólnym początku powinny z płaszczyzny wyciąć kąt (ściślej mówiąc: podzielić ją na dwa kąty). Przy takim podejściu w dość krótkim czasie dziecko zapoznawane jest z najważniejszymi (z aksjomatycznego, nie praktycznego, punktu widzenia), ale równocześnie najtrudniejszymi, pojęciami geometrycznymi – najtrudniejszymi, bo pozbawionymi m.in. dobrych, wizualnych modeli, pozwalających dziecku na rozpoczęcie procesu budowania swoich geometrycznych intuicji. Wymienione pojęcia są także nieobecne we wcześniejszych doświadczeniach dziecka – brak ich śladu w jego wiedzy nieformalnej i używanym języku. Czeka się więc, aż dziecko będzie „gotowe” uczyć się o nich.

To, do czego ludzkość dochodziła przez kilka tysięcy lat, i to idąc w dokładnie odwrotnym kierunku, prezentuje się dzieciom szybko i bez głębszej refleksji nad skutecznością takiego podejścia. Wspominany już Hans Freudenthal, jeden z najwybitniejszych dydaktyków matematyki XX w., tego typu działania zwykł nazywać **inwersją antydydaktyczną**:

- *inwersją*, bo proces rozwoju idei jest odwracany i „stawiany na głowie",
- *antydydaktyczną*, bo przynosi to dużo gorsze efekty niż te, które byłyby możliwe, gdyby zabiegu tego nie stosować.

Jednym z ulubionych „geometrycznych" ćwiczeń autorów różnych materiałów edukacyjnych, także dla I etapu kształcenia, jest rozróżnianie narysowanych prostych od odcinków. Kłopot polega na tym, że tych dwóch typów obiektów nie da się rozróżnić na podstawie rysunku – stąd potrzeba wprowadzenia dwóch dodatkowych małych kresek kończących odcinek. I już wiadomo, co uczeń ma zrobić: sprawdzić, gdzie są „wąsy", a gdzie ich nie ma – kreska z „wąsami" to odcinek, kreska bez nich – prosta. W efekcie, zamiast z geometrią mamy do czynienia z dość bezmyślnym rozpoznawaniem kodu. (Przy okazji: czy te dwie kreski to też odcinki? Jeśli tak, to powinny mieć „wąsy" na końcu, jeśli nie, to przedstawiają, zgodnie z przyjętą konwencją … proste.)

Uczeń bardzo często ma również zaznaczać, które z par prostych narysowanych na gładkim papierze są równoległe, a które prostopadłe. Ale na jakiej podstawie ma to stwierdzić? Jakie narzędzie pozwala zrobić to z całą pewnością? Kłopot polega na tym, że **nie ma takiego narzędzia**. Uczeń nie jest w stanie stwierdzić, używając np. ekierki czy dokonując pomiaru, czy dwie przecinające się proste tworzą 90°, czy tylko 89,999°. A jeśli tworzą ten drugi kąt, to czy jeszcze są prostopadłe, czy już nie?

Jak uczeń ma ustalić, czy narysowany na gładkim papierze czworokąt jest rzeczywiście prostokątem? Jak ma ustalić coś, co nie jest możliwe do ustalenia?

Przykładów tego typu „geometrycznych" zadań i sytuacji można wymieniać więcej. Nasuwa się pytanie – co mają one wspólnego z geometrią i rozumowaniami geometrycznymi? Odpowiedź jest niestety dość oczywista.

Geometria może być, z punktu widzenia jej nauczania i uczenia się, dość paradoksalnie, **dyscypliną albo bardzo trudną albo łatwą**:

- Może stać się trudna, gdyż jej obiekty – zwłaszcza, gdy patrzy się na nie jako na nieskończone zbiory punktów – są abstrakcyjne i złożone. Co więcej, jak wspominaliśmy już, najtrudniejsze w swej naturze są te z nich, które leżą u podstaw dedukcyjnego systemu wiedzy, zwanego geometrią.
- Może stać się dla uczniów łatwa i interesująca, gdyż może być wizualna, intuicyjna i zrozumiała.

W otaczającym nas świecie można znaleźć wiele atrakcyjnych kształcących modeli różnych obiektów geometrycznych. Przez obcowanie z tymi modelami, wykonywanie z ich pomocą różnych eksperymentów, badanie ich własności, uczniowie mogą budować swoje intuicje geometryczne, wiedzę i rozumienie.

Przede wszystkim dobre modele

Obiekty geometryczne, w materialnym sensie tego słowa, nie istnieją. Naturę tych obiektów poznajemy, obcując z ich różnymi modelami, które w mniej lub bardziej niedoskonały sposób oddają ich cechy oraz własności. Efekt procesu kształcenia zależy w znacznej mierze od tego, czy w jego trakcie zostaną dobrane takie modele, które pozwolą zdobyć dobre intuicje i wykształcić właściwe wyobrażenia o reprezentowanym przez siebie obiekcie. Od ich różnorodności i siły oddziaływania, a także sposobu ich wykorzystania zależy, czy w świadomości ucznia zostanie wyabstrahowane z nich to, co dla danego pojęcia i dla całej geometrii jest istotne, czy też powstanie wyobrażenie, które daleko odbiega od naszych oczekiwań.

Poznawanie geometrii powinno rozpoczynać się więc od tych obiektów, które są **dostępne poznaniu dziecka** i których własności może ono, obcując z modelami, **samodzielnie obserwować i badać**.

Wokół nas bardzo łatwo znaleźć dobre modele dla figur przestrzennych, czyli brył: większość budynków i opakowań ma kształt prostopadłościanu, drewniane sześcienne klocki wciąż można znaleźć w większości dziecięcych pokojów, w typowym pokoju przeciwległe ściany są do siebie (zgodnie z planem) równoległe, podobnie podłoga i sufit. Ba, nawet trudne pojęcie kąta znajduje swój model (a nawet kilka) w każdej klasie szkolnej.

Może warto więc pomyśleć o tym, żeby – nieco wbrew tradycji – sięgnąć w klasach 1–3 po różne, także dość nietypowe, „przestrzenne” okazje dydaktyczne:

- *Dlaczego kulka położona na półce stacza się z niej? Kiedy się stoczy, a kiedy nie? Od czego to zależy?*
- *Dlaczego stół o czterech nogach często się kiwa? Dlaczego tak się dzieje?*
- *Czy stół o trzech nogach też będzie się kiwać?*

- *Dlaczego regałów często nie daje się ustawić przy ścianie albo obok siebie, choć przed ich zmontowaniem taki właśnie mieliśmy zamiar? I skąd się wzięły szpary między nimi?*
- *Dlaczego komódki o kwadratowym blacie na ogół nie daje się ustawić w rogu pokoju?*
- *Do czego służą przyrządy, zwane pionem i poziomnicą?*
- *Dlaczego często na podłodze układa się kwadratowe płytki? Jakie innego kształtu płytki można tak ułożyć, aby pokryły podłogę?*
- ...

Podobno matematyka (geometria) rozwija wyobraźnię przestrzenną. Może to robić, ale tylko pod jednym warunkiem – że dzieci będą działały w przestrzeni, a nie na tablicy czy na kartce papieru.

Matematyczne eksperymenty?

Co dziecko musi zrobić, żeby znaleźć odpowiedź na przykład na pierwsze z postawionych wyżej pytań? Najłatwiej jest wziąć kulkę lub piłeczkę i sprawdzić, w jakiej sytuacji się stoczy, a w jakiej nie. Innymi słowy – najprościej i najlepiej jest poeksperymentować.

Z punktu widzenia procesu kształcenia warto przyjąć, że geometria (i cała matematyka także) jest nauką empiryczną – czyli taką, w której wykonuje się różnego rodzaju eksperymenty i wyciąga z nich wnioski. W taki właśnie sposób, dzięki wykonywaniu różnorodnych eksperymentów z otaczającą rzeczywistością, dziecko buduje swoje wyobrażenia o świecie. Zatem nic nowego.

Piłeczka, **pion**, **poziomnica** – to nie jedyne narzędzia ułatwiające realizację geometrycznych eksperymentów.

Bardzo użytecznym narzędziem może okazać się zwykła **kartka w kratkę**. Papier w kratkę wyznacza rytm, który – i na tym polega „geometryczna" różnica między papierem w kratkę i gładkim – pozwala rozstrzygać wszelkie spory dotyczące na przykład prostopadłości i równoległości narysowanych na nim odcinków. Dziecko może samodzielnie to stwierdzić, może, odwołując się do tego właśnie rytmu, zbudować odpowiednie wyjaśnienie, sformułować geometryczną argumentację. Wiele możliwości stwarza podłoga wyłożona kwadratowymi płytkami. Wystarczy kawałek sznurka lub gumy i można zacząć budować oraz badać różnorodne wielokąty. Posadzki zbudowane, czy budowane przez dzieci, z płytek innego kształtu (trójkątnych, sześciokątnych…) stwarzają kolejne geometryczne „okazje”.

Doświadczenia z **lusterkiem** pozwalają na zdobywanie intuicji dotyczących jednego z najważniejszych pojęć geometrycznych – pojęcia odbicia lustrzanego (symetrii). Budowanie za pomocą lusterka lub dwóch lusterek różnych figur z narysowanego kształtu, czy rysowanie „w lusterku”, to kolejne bogate klasy możliwych geometrycznych eksperymentów.

Garść **patyczków** jednakowej długości pozwala na układanie różnorodnych figur i badanie na przykład ich obwodu. Gdy patyczki są różnej długości, uczeń może zainteresować się tym, z których trzech patyczków uda się ułożyć trójkąt, a z których nie.

Jednymi z częściej używanych typów modeli wielokątów są modele wycięte z kartki papieru. W każdym sklepie papierniczym znaleźć można bloczki kartek różnego kształtu. Potrzebne są jeszcze tylko **nożyczki**, aby uczeń zaczął zgłębiać kolejne tajniki figur...

Gdy już zbierzemy wiele „zabawek” i narzędzi, a także nabierzemy wprawy w posługiwaniu się nimi, to możemy zacząć projektowanie nowego osiedla, zrobić makietę szkoły czy uruchomić inny **geometryczny projekt**.

Geometria rozumiana jako nauka eksperymentalna i empiryczna stwarza uczniom okazję do prób i doświadczeń, do samodzielnego poszukiwania i budowania, do wyciągania wniosków z obserwacji, do formułowania hipotez i ich świadomego weryfikowania – czyli **do myślenia!** Umożliwiając uczniom badanie brył i figur przez manipulowanie, stwarzamy dobre podstawy do bardziej formalnych rozumowań w klasach starszych. Dzięki takiemu podejściu kształtują oni swoją intuicję geometryczną, wzbogacają wyobraźnię, a więc współtworzą własną wiedzę o obiektach geometrycznych i ich wzajemnych powiązaniach. Tak zdobyta wiedza ma dla nich głęboki sens, gdyż jest wynikiem ich własnej aktywności. Dzieci przeżywają różne sytuacje, widzą je na „własne oczy”, co sprawia, że lepiej je rozumieją i w nie wierzą, bo same ich doświadczyły.

DOSTRZEGANIE I STOSOWANIE PRAWIDŁOWOŚCI

Wybitny polski matematyk, Hugo Steinhaus, sformułował kiedyś takie, częściowo tylko żartobliwe, twierdzenie:

Niezależnie od tego, co będziesz robić w przyszłości, po matematyce będziesz robić to lepiej.

Matematyka może uczyć bardzo wielu rzeczy o uniwersalnej przydatności: dostrzegania prawidłowości, dostrzegania i badania związków (np. typu przyczyna–skutek), wnioskowania, argumentowania, przekonywania… Od lat zwraca się uwagę na jej walory kształcące i akcentuje, żeby nie tylko uczyć matematyki, ale przede wszystkim – i to zwłaszcza na niższych poziomach edukacji! – uczyć przez matematykę czy dzięki matematyce.

W testach, których wyniki prezentujemy, znalazło się kilka zadań, których celem było między innymi zbadanie, czy uczniowie klasy 3 potrafią dostrzegać prawidłowości i wykorzystywać je. Oto jedno z nich:

3. Rysunek pokazuje początek szlaczka złożonego aż z 96 figurek ułożonych zgodnie z pewną zasadą. Przyjrzyj się uważnie rysunkowi i odgadnij, jaka to zasada.

a) Jaka figurka jest w tym szlaczku na:

- dwunastym miejscu? ....
- dwudziestym miejscu? ....
- czterdziestym czwartym miejscu? ....

b) Czy jest jakaś szybka metoda znalezienia odpowiedzi na takie pytania? Jaka?

c) Na którym miejscu w tym szlaczku jest:

- piąty z kolei krzyż? ....
- szóste z kolei kółko? ....
- szósty z kolei kwadrat? ....

d) Zaprojektuj i narysuj podobny szlaczek, korzystając z 4 różnych figurek.

Szlaczek, którego 18 początkowych figur znajduje się na rysunku, ma dość typowy charakter – zbudowany jest z pięciu powtarzających się w regularny sposób figur, wyraźnie różniących się kolorem i kształtem. Zadaniem ucznia było kolejno:

– odkrycie reguły rządzącej ułożeniem figur i wykorzystanie jej do określenia, które figury są w tym szlaczku odpowiednio na 12, 20 i 44 miejscu (podpunkt a);
– opisanie sposobu, w jaki można ustalić, która figura jest na miejscu o podanym numerze (podpunkt b);
– określenie, na którym miejscu w tej „kolejce" figur znajdują się określone figury, np. piąty krzyżyk – jest to odwrotna sytuacja do tej z podpunktu a (podpunkt c);
– wreszcie – narysowanie analogicznego szlaczka złożonego z innej ilości powtarzających się figur (podpunkt d).

Figurę znajdującą się w tym szlaczku na 12 miejscu właściwie wskazało 89,4% uczniów – w tym celu wystarczyło przeliczyć początkowe figury. Pozostałe dwa pytania z podpunktu **a** dotyczyły już figur, których nie było na rysunku – poprawnej odpowiedzi na nie udzieliło odpowiednio 41,9% i 34,1% uczniów (por. diagram 14).

Pytania z podpunktu **c** tego zadania dotyczyły tego samego szlaczka i dokładnie tej samej prawidłowości, ale były sformułowane inaczej. I inny był procent poprawnych rozwiązań – wyniósł on dla kolejnych pytań odpowiednio: 20,6%, 13,0% oraz 12,9%.

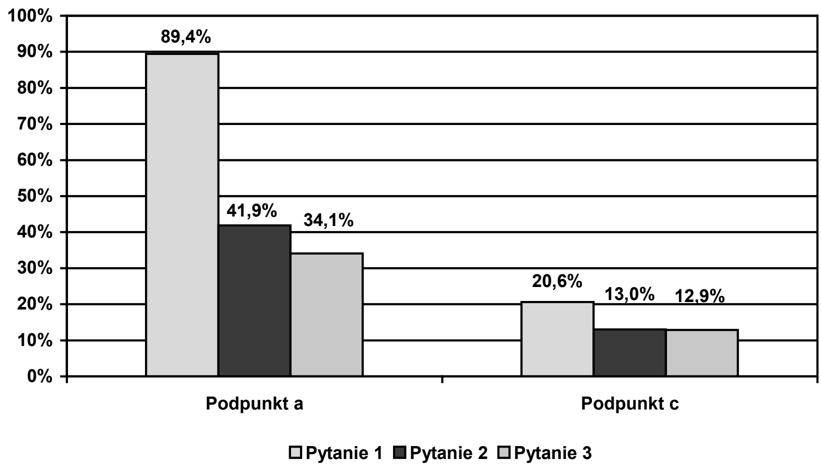


Diagram 14. Prawidłowość przedstawiona za pomocą rysunku – procent poprawnych rozwiązań (podpunkty a i c).

Mniej więcej połowa uczniów albo nie udzieliła w podpunkcie **a** żadnej odpowiedzi, albo tylko ustaliła, która figura znajduje się w tym szlaczku na dwunastym miejscu (por. diagram 15). Tylko co czwarty uczeń odpowiedział poprawnie na wszystkie pytania z podpunktu **a**.

W podpunkcie **c** aż 76,7% uczniów, czyli ponad ¾ uczestników badań, nie podało ani jednej poprawnej odpowiedzi, a tylko 8,6% dzieci dobrze odpowiedziało na wszystkie trzy pytania.

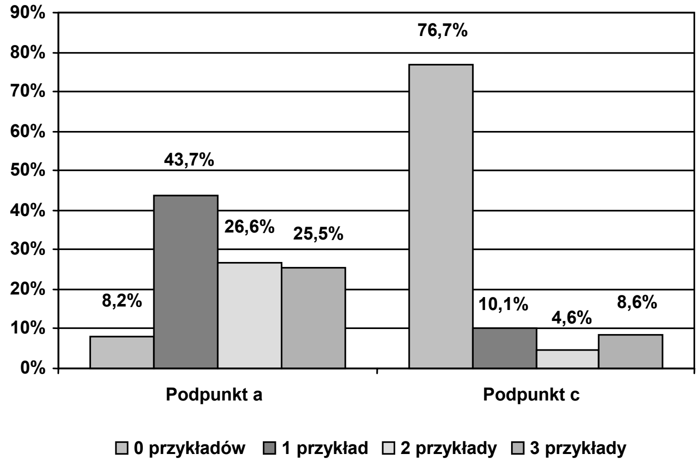


Diagram 15. Prawidłowość przedstawiona za pomocą rysunku – procent poprawnie udzielonych odpowiedzi.

Jeszcze mniej, bo jedynie 8,1% uczniów potrafiło w czytelny i zrozumiały sposób sformułować odkrytą regułę (podpunkt b), natomiast aż 30,9% dzieci ominęło tę część zadania.

Stosunkowo najlepiej wypadł ostatni podpunkt zadania: z narysowaniem podobnego szlaczka z czterema powtarzającymi się kolejno figurami poradziło sobie 56,6% uczestników badania. Najbardziej typowe błędy polegały na wykorzystaniu innej liczby figur niż podana w poleceniu albo ograniczeniu się do narysowania tylko jednego zestawu wybranych figur.

Spójrzmy na wybrane rozwiązania uczniów.

Być może najprostszym sposobem „rozgryzienia” tego zadania, było umiejętne i uważne(!) ponumerowanie kolejnych figur (1, 2, 3).

1.

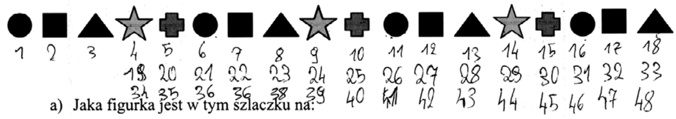
a) Jaka figurka jest w tym szlaczku na:

- dwunastym miejscu? kwadrat
- dwudziestym miejscu? krzyżyk......
- czterdziestym czwartym miejscu? gwiazdka

b) Czy jest jakaś szybka metoda znalezienia odpowiedzi na takie pytania? Jaka?

~~Że~~ Że jak jest jakiś wzorek to dodajemy do niego następny wzorek.

2.



a) Jaka figurka jest w tym szlaczku na:

- dwunastym miejscu? ....kwadrat........
- dwudziestym miejscu? ....krzyżyk..........
- czterdziestym czwartym miejscu? ....gwiazdka.......

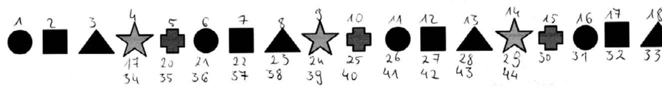
b) Czy jest jakaś szybka metoda znalezienia odpowiedzi na takie pytania? Jaka?

~~Moim zdaniem najszybsza metoda to przepisywanie w kolejności.~~
Dodaje się te same liczby

c) Na którym miejscu w tym szlaczku jest:

- piąty z kolei krzyż? ....~~25~~ 25.......
- szóste z kolei kółko? ....~~30~~ ~~26~~ 26.
- szósty z kolei kwadrat? ....~~30~~ 27..

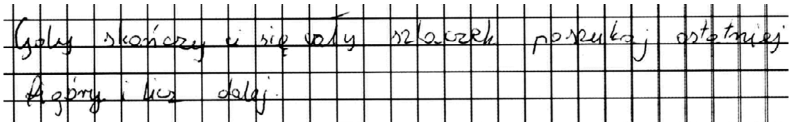
3.

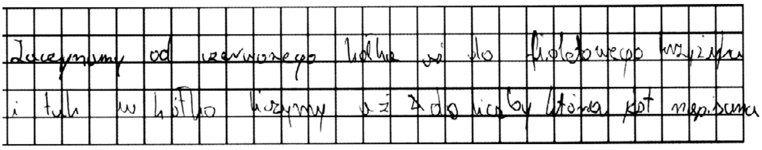


W opisie metody uczniowie często odwoływali się do takiego właśnie „liczenia w kółko", i to na dwa różne sposoby – z pominięciem początku widocznej części szlaczka (4–6) albo jego końca (7):

4. liczenie wzorku od początku do ostatniej figury a następnie liczenie od czwartej figury.

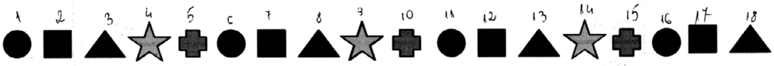
5. Trzeba liczyć aż do końca, a po ~~końcu~~ kiedy dotrzemy do ostatniej figury trzeba zacząć liczyć od pierwszej gwiazdki.

6. 

7. 

Ale równocześnie, postępując w ten właśnie sposób, można było łatwo się „oszukać”:

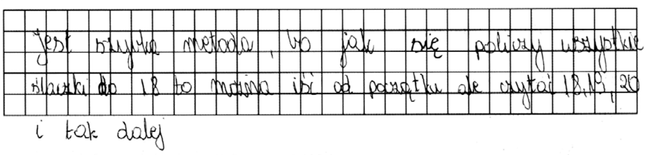
Gdy sposób numerowania był błędny, musiało to oczywiście znaleźć także odbicie w opisie samej metody, choć samo „przełożenie” na opis jest całkiem czytelne:

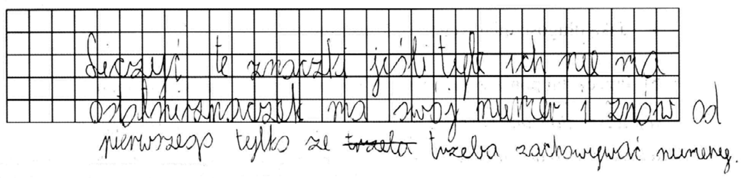


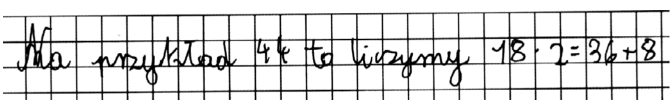
a) Jaka figurka jest w tym szlaczku na:

- ➢ dwunastym miejscu? ...kwadrat.........
- ➢ dwudziestym miejscu? ...kwadrat........
- ➢ czterdziestym czwartym miejscu? ...trójkąt..........

b) Czy jest jakaś szybka metoda znalezienia odpowiedzi na takie pytania? Jaka?

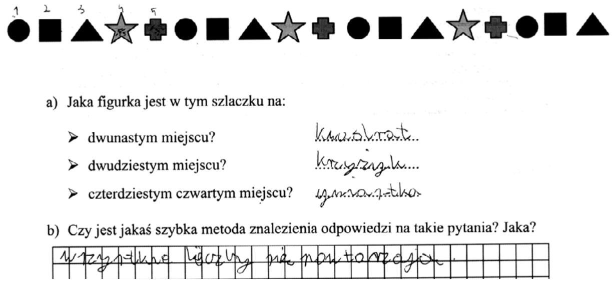






Analizując szlaczek, część uczniów (4,8%) zwróciła uwagę na fakt, że figury powtarzają się co pięć miejsc, więc wystarczy skupić się na pierwszej piątce (8) i przeliczyć ją odpowiednią liczbę razy albo „patrzeć” na szlaczek piątkami (9–11). Także i przy takim rozumowaniu dorysowanie kolejnych figur najwyraźniej zwiększa poczucie bezpieczeństwa (11, 12).

8.

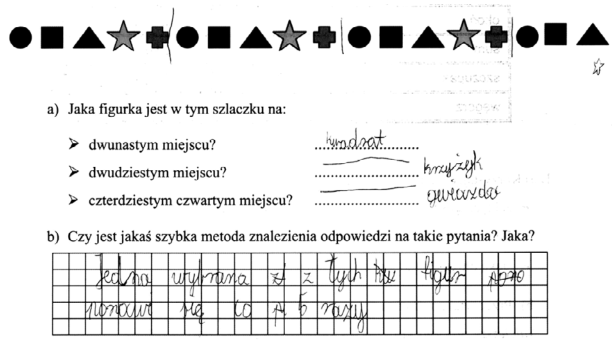

1 2 3 4 5

a) Jaka figurka jest w tym szlaczku na:
- dwunastym miejscu? kwadrat
- dwudziestym miejscu? krzyżyk
- czterdziestym czwartym miejscu? gwiazdka

b) Czy jest jakaś szybka metoda znalezienia odpowiedzi na takie pytania? Jaka?

Wszystkie liczby się powtarzają.

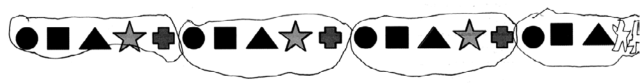
9.


a) Jaka figurka jest w tym szlaczku na:
- dwunastym miejscu? kwadrat
- dwudziestym miejscu? krzyżyk
- czterdziestym czwartym miejscu? gwiazda

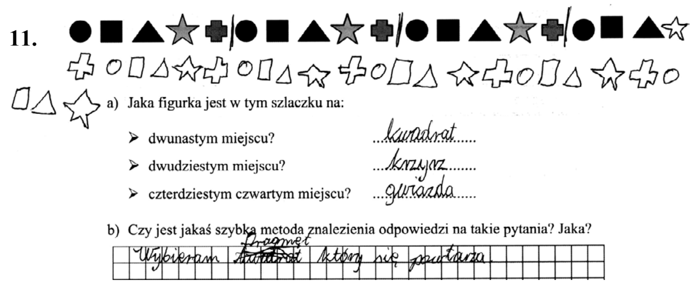
b) Czy jest jakaś szybka metoda znalezienia odpowiedzi na takie pytania? Jaka?

Jedna wybrana z tych figur potem powtarza się co 4 5 razy

10.



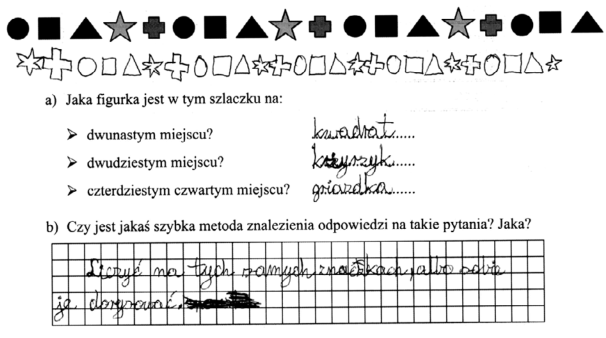
11.


a) Jaka figurka jest w tym szlaczku na:
- dwunastym miejscu? kwadrat
- dwudziestym miejscu? krzyrz
- czterdziestym czwartym miejscu? gwiazda

b) Czy jest jakaś szybka metoda znalezienia odpowiedzi na takie pytania? Jaka?

Wybieram ~~kwadrat~~ przedmiot który się powtarza

12.


a) Jaka figurka jest w tym szlaczku na:
- dwunastym miejscu? kwadrat
- dwudziestym miejscu? krzyżyk
- czterdziestym czwartym miejscu? gwiazdka

b) Czy jest jakaś szybka metoda znalezienia odpowiedzi na takie pytania? Jaka?

Liczyć na tych samych znaczkach albo sobie je dorysować.

Ładne i bardzo różnorodne językowo i matematycznie odbicie znajduje to „powtarzanie się co pięć miejsc" w opisach metody postępowania (podpunkt b). Od sformułowań dość nieprecyzyjnych (1, 2), przez znacznie bardziej jednoznaczne (3–5), po próby wykorzystania liczb i działań (6, 7) oraz bardzo dojrzałe matematycznie sformułowanie ogólnej reguły (8).

1. Jeśli mamy kwadrat, kółko, trójkąt, gwiazdka, krzyżyk to 5 figur więc liczymy co pięć

2. Każda figura rusza się co pięć figur

3. Trzeba liczyć nie cały szlaczek tylko liczyć pierwsze pięć figur ponieważ inne się powtarzają X

4. Na przykład szukamy czterdziestego pierwszego szlaczka to można zrobić tak od koła do krzyżyka i liczyć od nowa aż do wyznaczonej liczby

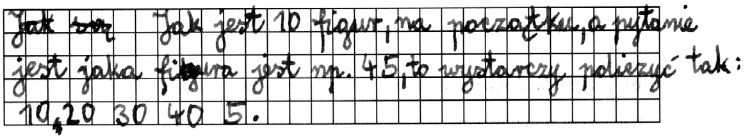
5. Liczyć od piątej figury i wyjdzie na przykład 8 8 figura a 8 8 figura to trójkąt

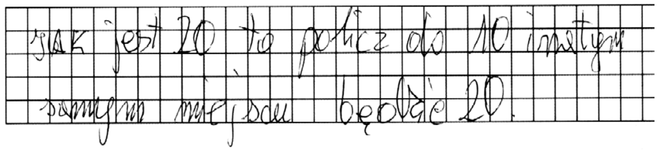
6. ~~Osa na przykład 1 to kwadraty~~ na przykład kółka 1+5+5+ =11 ~~trójkąty~~ kwadrat 2+5+5=12

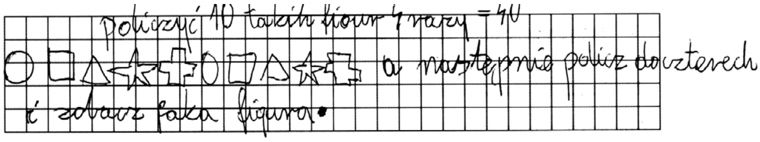
7.
5+5+5+5=20   5+5+5+5+5+5+5+5
5+5+2=12   +5+5+4=44

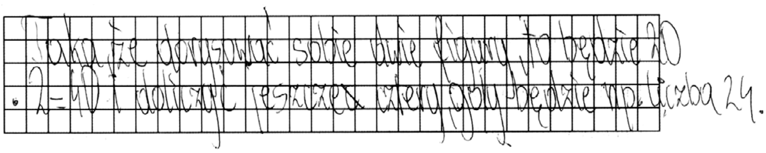
8. Metoda polega na tym, że liczbę która jest w pytaniu należy podzielić przez liczbę kształtów w szlaczku (w tym szlaczku jest ich 5). Jeśli dzieli się bez reszty, to to ostatni kształt w układzie 5-cio kształtowym. Jeśli dzieli się z resztą (np. 3) to ta liczba reszty wskazuje, która to z kolei figura w tym układzie

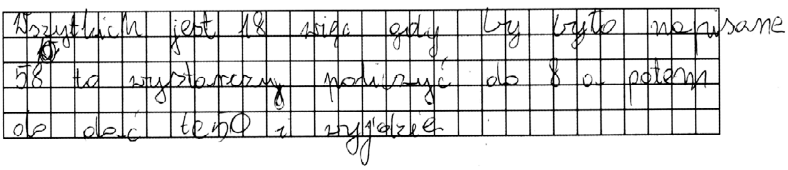
Niektórzy uczniowie widzieli w szlaczku powtarzające się dziesiątki czy nawet dwudziestki znaczków:


~~Jak sor~~ Jak jest 10 figur, na początku, a pytanie jest jaka figura jest np. 45, to wystarczy policzyć tak: 10, 20 30 40 5.

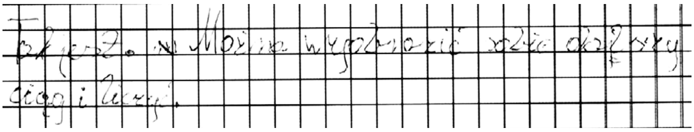

Jak jest 20 to policz do 10 i na tym samym miejscu będzie 20.

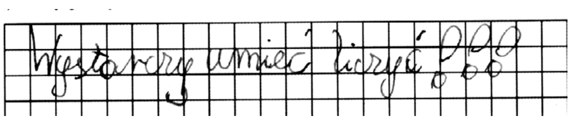

policzyć 10 takich figur 4 razy = 40
a następnie policz do czterech i zobacz jaka figura.

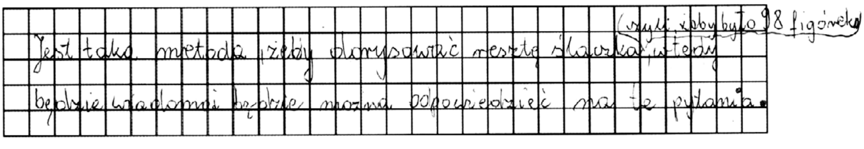

Tak że dorysować sobie dwie figury to będzie 20 · 2 = 40 i doliczyć jeszcze cztery gdy będzie np. liczba 24.


Wszystkich jest 18 więc gdy by było napisane 58 to wystarczy policzyć do 8 a potem od dać tego i wyjdzie

Pojawiały się także opisy metod zdecydowanie mniej skutecznych:


Tak jest. Można wypisować cały ciąg i liczyć.

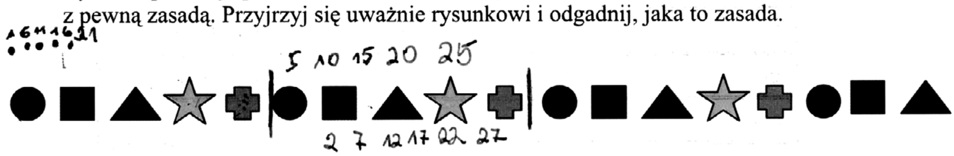

Wystarczy umieć liczyć


Jest taka metoda żeby dorysować resztę szlaczka (czyli żeby było 98 figurek), wtedy będzie wiadomo i będzie można odpowiedzieć na te pytania.

Jak widać, bogactwo metod i opisów jest duże. Zwraca uwagę, że dzieci chętnie sięgają w swoich wyjaśnieniach po przykłady, ilustrujące jakąś ogólną prawidłowość czy metodę. Taki paradygmatyczny, czyli przedstawiający pewną ogólną zasadę, przykład jest dla nich prawdopodobnie wygodnym narzędziem do pokazywania, wyjaśniania i przekonywania. Odwoływanie się do takich właśnie przykładów może być dobrą metodą argumentowania na tym etapie kształcenia. Warto o tym pamiętać.

Podpunkt **c** zadania wymagał od uczniów nieco innego rozumowania niż podpunkt **a**, czyli zwrócenia uwagi na miejsca kolejnych kółek, kwadratów itd.:

3. Rysunek pokazuje początek szlaczka złożonego aż z 96 figurek ułożonych zgodnie z pewną zasadą. Przyjrzyj się uważnie rysunkowi i odgadnij, jaka to zasada.



Zależy co to za figura z koła. Np. koło jest pierwsze to potem będzie 6, 11, 16 itd.

c) Na którym miejscu w tym szlaczku jest:

- piąty z kolei krzyż? ~~(1, 25) 5, 10, 15~~ 25
- szóste z kolei kółko? ~~1, 6, 11, 16~~ ~~30~~ 26
- szósty z kolei kwadrat? ~~2, 7, 12, 17~~ 27

- piąty z kolei krzyż? 25 : 5 5
- szóste z kolei kółko? 30 / 1/5 26
- szósty z kolei kwadrat? 27 : 7 . (

W części przypadków skończyło się tylko na próbach:

- piąty z kolei krzyż? 5, 10, 15,
- szóste z kolei kółko? 12, 18,
- szósty z kolei kwadrat? 2, 7, 12, 17

- piąty z kolei krzyż? ~~[illegible]~~, 5, 10, 15,
- szóste z kolei kółko? 1, 6, 11, 16
- szósty z kolei kwadrat? 2, 7, 12, 17

Niewielka grupa uczniów nie mogła sobie wyobrazić, że szlaczek ciągnie się dalej:

a) **Jaka figurka jest w tym szlaczku na:**

- ➢ dwunastym miejscu? ...kwadrat.
- ➢ dwudziestym miejscu? ...nie...............
- ➢ czterdziestym czwartym miejscu? .nie...............

Nie ma dwudziestego ani czterdziestego czwartego miejsca.

A niektórzy uczestnicy testu chyba uruchomili swoje osobiste „strategie”:

a) **Jaka figurka jest w tym szlaczku na:**

- ➢ dwunastym miejscu? ...12cm...............
- ➢ dwudziestym miejscu? ....20cm...........
- ➢ czterdziestym czwartym miejscu? .....44cm...........

c) **Na którym miejscu w tym szlaczku jest:**

- ➢ piąty z kolei krzyż? ....tak.....
- ➢ szóste z kolei kółko? ......tak.....
- ➢ szósty z kolei kwadrat? .....Nie.......

Druga z wykorzystanych w teście prawidłowości była przedstawiona za pomocą zapisu symbolicznego i dotyczyła sekwencji działań:

5. Przyjrzyj się uważnie tym obliczeniom. Odgadnij, jak wyglądają dwa kolejne działania i ich wyniki. Zapisz je.

$1 \cdot 1 = 1$

$11 \cdot 11 = 121$

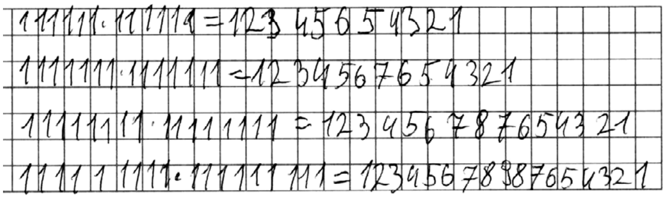
$111 \cdot 111 = 12321$

$1111 \cdot 1111 = 1234321$

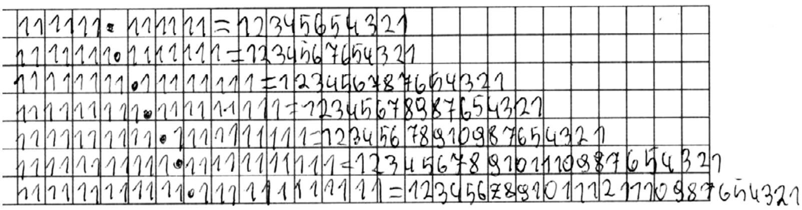
$11111 \cdot 11111 = 123454321$

Mniej niż ¼ uczniów (23,5%) poprawnie odczytała układ działań oraz cyfr w iloczynach i dopisała dwie kolejne równości, a niektórzy nawet dużo więcej:

1.



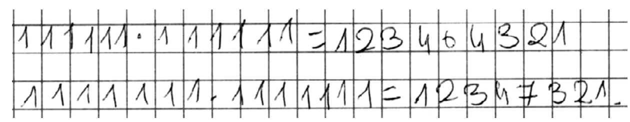
2.



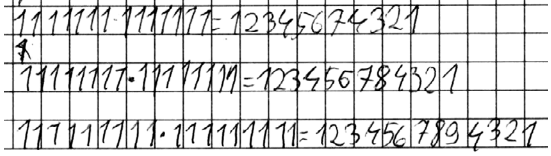
Autor rozwiązania 1 „zatrzymał się” we właściwym miejscu – od następnego działania zauważona prawidłowość zmienia swoją postać, z rzędu do rzędu zaczynają „wędrować” jedynki. Trzy końcowe równości z rozwiązania 2 są więc matematycznie niepoprawne (co nie miało wpływu na zaliczenie tego rozwiązania), choć uczeń bardzo konsekwentnie i – ze swojego punktu widzenia – racjonalnie stosuje zauważoną prawidłowość.

Nie poradziło sobie z tym zadaniem 76,5% uczniów, choć niektórym z nich zabrakło naprawdę niewiele:

3.

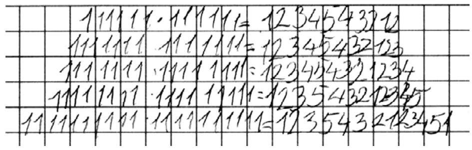


4.

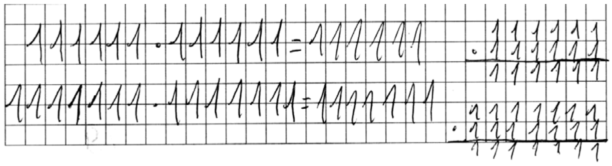


Inni tworzyli swoje własne reguły i konsekwentnie się ich trzymali:

5.

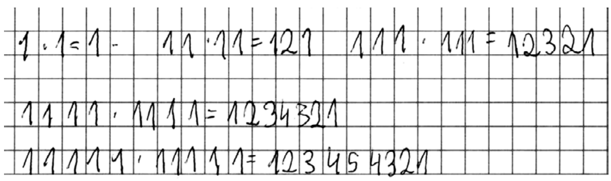


6.



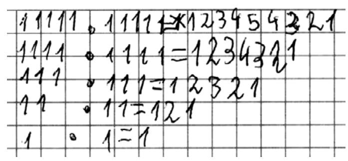
10,6% uczniów zastosowało tę samą „strategię obronną” – zamiast dopisać nowe, powtórzyło kilka spośród równości podanych już w zadaniu. Jeden z uczniów przy tej okazji wykazał się całkiem niezłym wyczuciem symetrii (por. 8).

7.



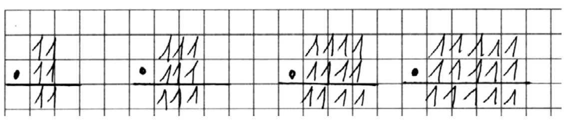
8.

1 · 1 = 1
11 · 11 = 121
111 · 111 = 12321
1111 · 1111 = 1234321
11111 · 11111 = 123454321



9.

1 · 1 = 1
11 · 11 = ~~121~~ 11
111 · 111 = ~~12321~~ 111
1111 · 1111 = ~~1234321~~ 1111
11111 · 11111 = ~~123454321~~ 11111



Aż 9,9% uczniów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania.

Badaniem takich „rytmów", jak w pierwszym z przytoczonych wyżej zadań dzieci mogą zajmować się z powodzeniem już w przedszkolu[14]. Mogą, praktyka to jednoznacznie potwierdza. I warto, aby to robiły!

Od lat naukowcy, a i praktycy także, zadają sobie pytanie: *dlaczego tak się dzieje, że niektóre dzieci odnoszą sukcesy w uczeniu się matematyki, a dla innych jest to wręcz „droga przez mękę"?*

Przecież:

Każdy normalny uczeń jest zdolny do poprawnego rozumowania matematycznego, jeżeli odwołamy się do jego aktywności i jeżeli uda się nam usunąć zaburzenia emocjonalne, które często wywołują uczucie niższości na lekcjach z tej właśnie dziedziny wiedzy.[15]

Z tą opinią J. Piageta, wybitnego szwajcarskiego psychologa, trudno polemizować.

No właśnie: jeżeli będziemy się odwoływać do aktywności (intelektualnej!) dzieci. Powtarzaliśmy to już wielokrotnie. Jest to zabieg, którzy przekłada się także na obniżenie poziomu powstających zaburzeń emocjonalnych – znacznie efektywniej jest zapobiegać ich powstawaniu niż borykać się z nimi, gdy już zaistnieją.

Potwierdzają to jednoznacznie prowadzone w ostatnich latach badania, dzięki którym formułuje się coraz więcej praktycznych wniosków oraz dydaktycznych sugestii dotyczących procesu rozwijania umiejętności matematycznych dzieci. Badania te pokazują[16], że jedną z zasadniczych cech różniących dzieci, które odnoszą sukcesy ucząc się matematyki od tych, które mają z nią kłopoty, jest sposób podejścia do „matematycznej materii" pojawiającej się w procesie kształcenia.

Ci pierwsi uczniowie spontanicznie poszukują związków i zależności, zestawiają nowe obiekty i sytuacje z wcześniejszymi, zwracają uwagę na to, co się powtarza i na uderzające różnice – nastawieni są na **dostrzeganie i badanie regularności**. W naturalny (dla siebie!) sposób zauważone reguły czy związki wykorzystują w kolejnych etapach swojej działalności, w radzeniu sobie z trudnościami, w argumentowaniu, w wyjaśnianiu. Widzą i rozumieją, że różne rzeczy się ze sobą wiążą i są sobie wzajemnie „potrzebne".

[14] Por. E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *Dziecięca matematyka*, WSiP, Warszawa 1997.
[15] J. Piaget, *Dokąd zmierza edukacja*, Warszawa 1977, s. 87.
[16] Gray, E., Tall. D.: Duality, *Ambiguity and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic, Journal forResearch in Mathematics Education*, Vol. 25, No. 2 (Mar., 1994), pp. 16–140.

Ci drudzy – każdy obiekt, działanie, zjawisko, sytuację traktują odrębnie i w izolacji od innych. Zawsze więc uczą się „od nowa”. Ich matematyka składa się z odrębnych, nie związanych ze sobą cegiełek, między którymi nie ma żadnego „spoiwa”. Gmach budowany w ten sposób zawali się przy najmniejszym podmuchu wiatru.

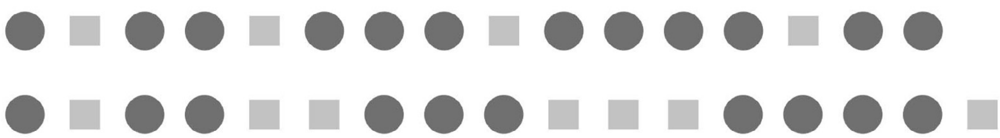
Co z tych obserwacji wynika dla praktyki?

Przede wszystkim to, że na każdym kroku warto zachęcać dzieci do poszukiwania regularności i związków między wykorzystywanymi obiektami (liczbami, figurami) do rozwijania umiejętności **dostrzegania, formułowania i wykorzystywania prawidłowości**, **bo są to umiejętności, które przekładają się bezpośrednio na matematyczny rozwój dziecka.**

Te umiejętności można i należy(!) rozwijać. Warto robić to systematycznie, zachęcając przy tym uczniów do wymyślania i prezentowania zagadek.

Można do tego wykorzystywać różnorodne sekwencje figur czy liczb – zaczynając od takich, w których powtarza się dwa, pięć albo dziesięć kształtów (pozwalają one generować stosunkowo proste reguły) i stopniowo przechodząc do sytuacji trudniejszych:

czy nawet znacznie trudniejszych :



o ile tylko dzieci polubią tego typu wyzwania.

Podobne okazje możemy dzieciom stwarzać na każdym kroku[17], nawet tam, gdzie na pozór zupełnie nie ma na nie miejsca:

1. *Wpisz wyniki. Co łączy działania w każdej serii?*
   A czym się one różnią?
   Dopisz następne pasujące obliczenia.

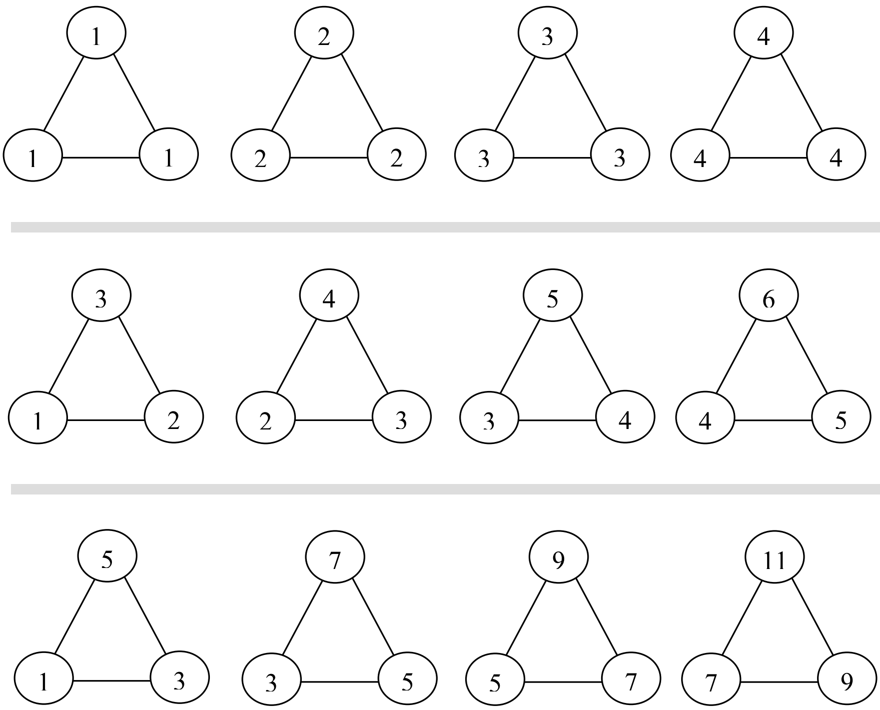
16 + 12 =	16 + 12 =	16 + 12 =	16 + 12 =	16 + 12 =
15 + 12 =	16 + 13 =	17 + 13 =	15 + 13 =	15 + 11 =
14 + 12 =	16 + 14 =	18 + 14 =	14 + 14 =	14 + 10 =
13 + 12 =	16 + 15 =	19 + 15 =	13 + 15 =	13 + 9 =
12 + 12 =	16 + 16 =	20 + 16 =	12 + 16 =	12 + 8 =
…	…	…	…	…

[17] Por także: D. Klus-Stańska, A. Kalinowska, *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*, Wydawnictwo Akademickie „Żak”, Warszawa 2004.

2. *A co łączy te działania? Dopisz następne.*

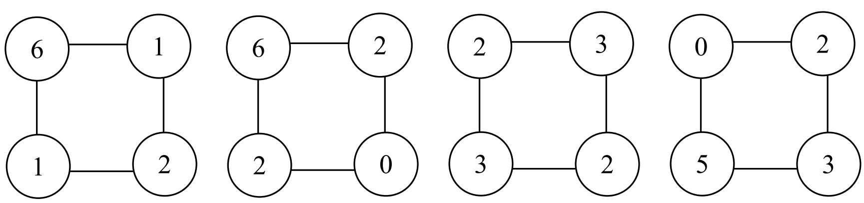
26 – 12 =	26 – 12 =	26 – 12 =	26 – 12 =	26 – 12 =
27 – 12 =	25 – 12 =	26 – 11 =	27 – 13 =	25 – 11 =
28 – 12 =	24 – 12 =	26 – 10 =	28 – 14 =	24 – 10 =
29 – 12 =	23 – 12 =	26 – 9 =	29 – 15 =	23 – 9 =
30 – 12 =	22 – 12 =	26 – 8 =	30 – 16 =	22 – 8 =
…	…	…	…	…

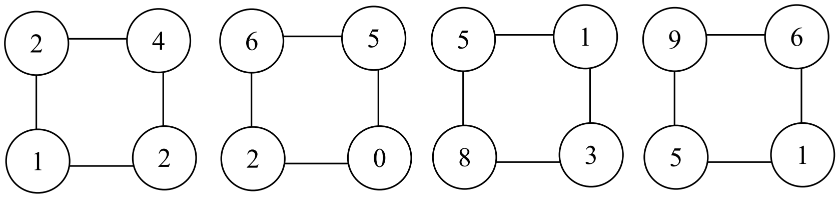
3. *Dodaj liczby z kółek. Wynik zapisz wewnątrz trójkąta. Co łączy te rysunki? A co się w nich zmienia? Jaki rysunek powinien być następny? Zrób go.*



Wymyśl własną zagadkę.

4. *Te kwadraty są wypełnione zgodnie z pewną zasadą. Jaka to może być zasada? Dorysuj kilka pasujących kwadratów.*





Wymyśl własną zagadkę.

5. *Wykonaj działania. Jak powinien wyglądać następny przykład? Zapisz go.*

36 + 24	36 + 34	36 + 44	36 + 54
38 + 62	39 + 52	40 + 42	41 + 32

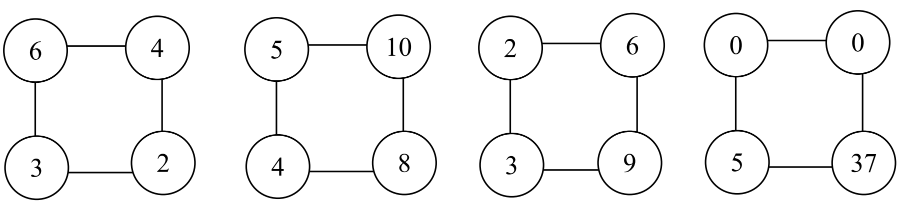
Wymyśl własną zagadkę.

6. *Wykonaj działania. Jak powinien wyglądać następny przykład? Zapisz go.*

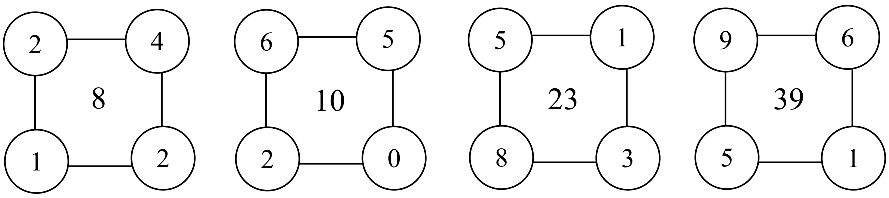
106 – 24	106 – 34	106 – 44	106 – 54
106 – 24	105 – 24	104 – 24	103 – 24

Wymyśl własną zagadkę.

7. *Te kwadraty są wypełnione zgodnie z pewną zasadą. Jaka to może być zasada?*
Dorysuj kilka pasujących kwadratów.

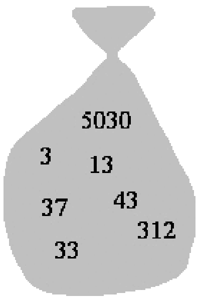


8. *Jak powstaje liczba w kwadracie? Dorysuj kilka pasujących kwadratów.*



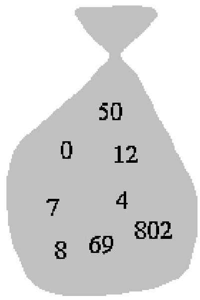
Wymyśl własną zagadkę. Daj ją kolegom do rozwiązania.

9. *Liczby zostały podzielone na dwie grupy, w zależności od tego, czy spełniają pewien warunek, czy też nie. Gdzie należy „wrzucić” podane niżej liczby? Dlaczego?*



5, 35, 53, 104,

2008, 3000



10. *Wykonaj obliczenia i porównaj ich wyniki. Czy podobnie będzie dla innych takich par działań? Sprawdź to. Spróbuj wyjaśnić, dlaczego tak się dzieje.*

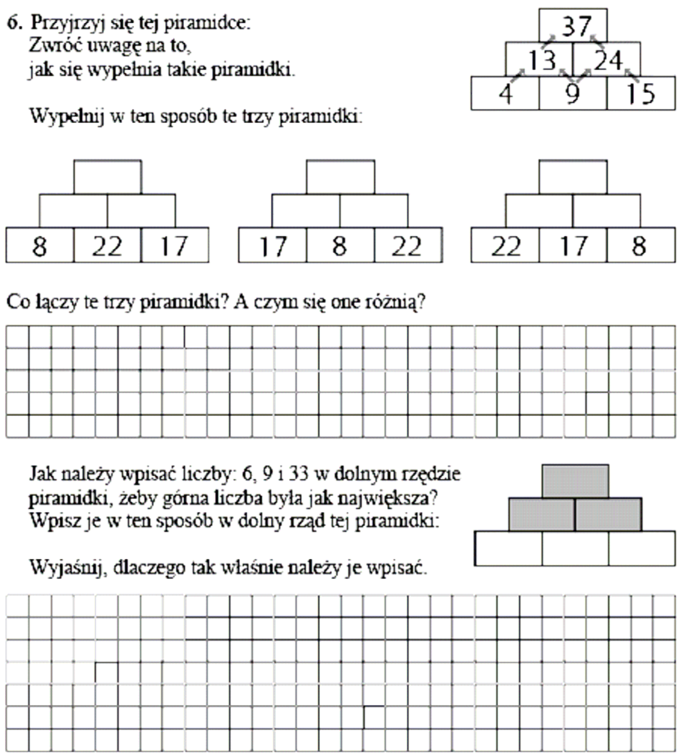
$9 \times 9 =$	$8 \times 8 =$	$7 \times 7 =$
$10 \times 8 =$	$9 \times 7 =$	$8 \times 6 =$

W ten sposób niepostrzeżenie, zaczynając od szukania prostych prawidłowości i robiąc tylko jeden niewielki krok, weszliśmy w świat **matematycznych problemów**.

ROZWIĄZYWANIE PROBLEMÓW

Problem to zadanie, którego metody rozwiązania nie znamy, ale dysponujemy wiedzą wystarczającą do tego, aby metodę tę samodzielnie zbudować. Rozwiązując problem mamy okazję coś odkryć, zauważyć coś dla siebie nowego – **wyjść poza dostarczone informacje**. W efekcie, problem to zadanie na rzeczywiste zastosowanie posiadanej wiedzy i sprawdzenie poziomu jej użyteczności.

Podczas badania uczniowie rozwiązywali następujący problem:


6. Przyjrzyj się tej piramidce:
Zwróć uwagę na to,
jak się wypełnia takie piramidki.

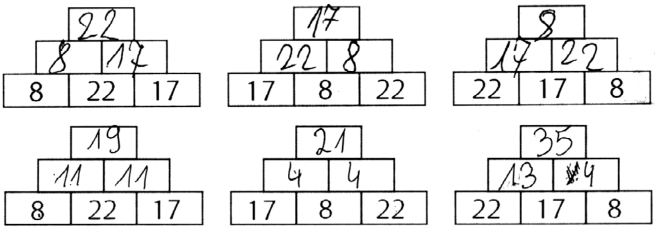
Wypełnij w ten sposób te trzy piramidki:

Co łączy te trzy piramidki? A czym się one różnią?

Jak należy wpisać liczby: 6, 9 i 33 w dolnym rzędzie piramidki, żeby górna liczba była jak największa?
Wpisz je w ten sposób w dolny rząd tej piramidki:

Wyjaśnij, dlaczego tak właśnie należy je wpisać.

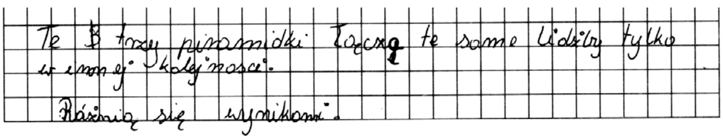
Pierwsza, wypełniona piramidka pokazuje, w jaki sposób i zgodnie z jaką zasadą uczeń powinien uzupełnić trzy kolejne piramidki. Ta część zadania jest bazą dla stawianych dalej pytań. Jest to także okazja do zauważenia przez uczniów pewnej bardzo prostej reguły. 28,2% uczniów nie potrafiło ustalić, co dzieje się z liczbami w wypełnionej piramidce – nie potrafiło więc uzupełnić, zgodnie z regułą, kolejnych piramidek. Niektórzy z nich tworzyli własne reguły:



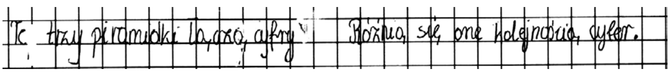
Dwa początkowe pytania dotyczą zauważonych przez ucznia podobieństw i różnic pomiędzy wypełnionymi piramidkami. Wykorzystywane przez uczniów cechy piramidek mogły dotyczyć zarówno ich zawartości, jak i np. wyglądu. Wszystkie podane przez uczniów faktyczne różnice i podobieństwa, nawet te nie związane wprost ze stroną merytoryczną problemu, były zaliczane. Z tą częścią zadania poradziło sobie 43,8% uczniów, czyli mniej niż połowa.

Najczęściej uczniowie zwracali uwagę na to, że *na dole są te same liczby a na górze różne* (1) (21,3%) oraz że *na dole są te same liczby, ale różnią się kolejnością* (2-3) (14,1%).

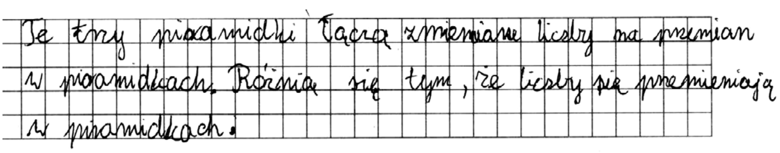
1.



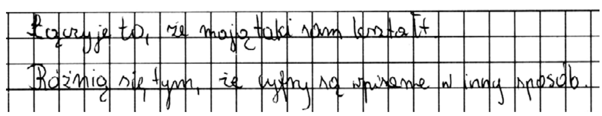
2.

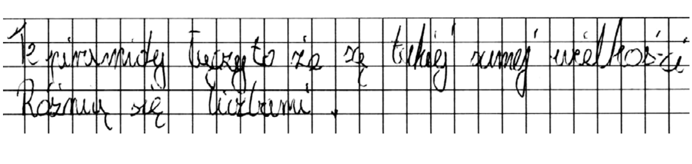


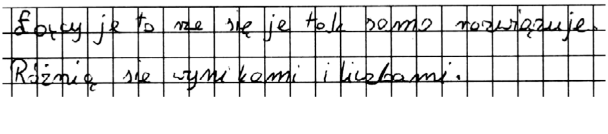
3.



Pozostałe rozwiązania zwracały uwagę na kształt piramidek, ich wielkość, wykonywane działanie itp.:



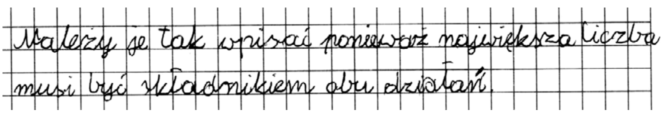


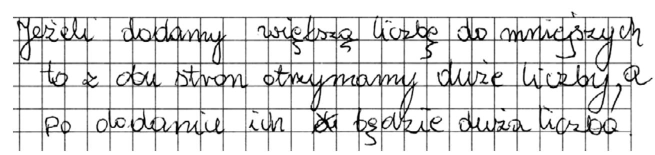


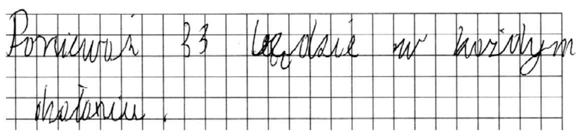
Wypełnione przez uczniów piramidki miały im pozwolić na **sformułowanie hipotezy**, dotyczącej związku sposobu wpisywania liczb w dolnym rzędzie pól z wielkością końcowego wyniku. Sposób właściwego wpisania liczb 6, 9 i 33, po uprzednim poprawnym wypełnieniu trzech górnych piramidek, podało 41,8% uczniów. 11,7% uczniów opuściło tę część zadania.

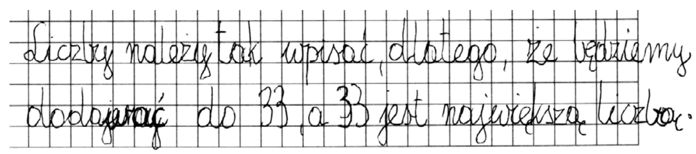
Na koniec uczeń miał uzasadnić, dlaczego zaproponowany przez niego sposób wpisywania liczb gwarantuje otrzymanie największego możliwego (dla danej trójki liczb) wyniku. Celem tej części zadania było sprawdzenie, jak dzieci poradzą sobie ze sformułowaniem krótkiej argumentacji.

Tylko 11,0% uczniów zaprezentowało racjonalną argumentację, np. wprost zwracając uwagę na to, że liczba wpisana w środkowe pole jest dwukrotnie dodawana (8,3%):

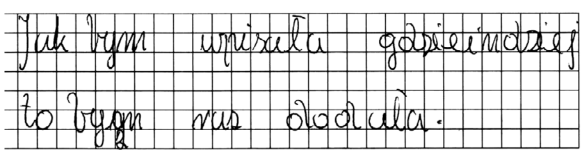

Należy je tak wpisać ponieważ największa liczba musi być składnikiem obu działań.

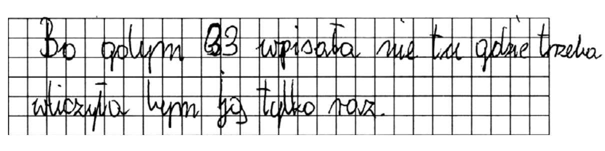

Jeżeli dodamy większą liczbę do mniejszych to z obu stron otrzymamy duże liczby, a po dodaniu ich będzie duża liczba.


Ponieważ 33 będzie w każdym działaniu.


Liczby należy tak wpisać, dlatego, że będziemy dodawać do 33, a 33 jest największą liczbą.

Niektórzy sięgali po negację:


Jak bym wpisała gdzie indziej to bym nie dodała.


Bo gdybym 33 wpisała nie tu gdzie trzeba wliczyła bym ją tylko raz.

Jak widać, część uczniów była bardzo precyzyjna w swoich wyjaśnieniach. Pojawiło się także sporo sformułowań bardziej językowo „dynamicznych”:

1. Należy tak je wpisać bo liczba 33 jest największa i można dobrze dodawać ją do mniejszych

2. Bo środkowa liczba wszystkie dodaje dlatego wpisałem w środek 33.

3. Właśnie tak należy wpisać te liczby 33 wstawimy na środku ponieważ w dalszym dodawaniu będziemy dodawać przez tą liczbę i tak wyjdzie największy wynik.

4. Należy je tak wpisywać dlatego że te mniejsze liczby są dodawane przez dużą.

5. Bo środkowa liczba czyli 33 powinna być na środku dlatego bo ciągle ją się dolicza i wtedy wyjdzie największy wynik czyli 81.

6. Kiedy stawia się największą z podanych liczb ~~wtedy~~ na środku wtedy jest dodawana przez te dwie inne a potem jeszcze raz.

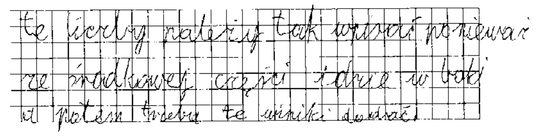
Stworzone przez dzieci zwroty: *dobrze ją dodawać* (1)*, liczba wszystkie dodaje* (2)*, dodawać przez tę liczbę* (3, 4, 6) ... mają nieco nietypową formę, ale ich sens jest dość oczywisty.

W innych argumentacjach pojawiły się jeszcze bardziej barwne, ale nadal czytelne i zrozumiałe, sformułowania:

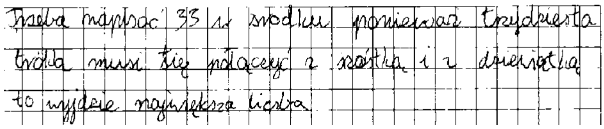
7. Tak należy wpisać ponieważ największa liczba wyciąga się z 2 mniejszymi

8. Bo kiedy 33 jest ~~na~~ w środku, to inne liczby korzystają z tej w środku.

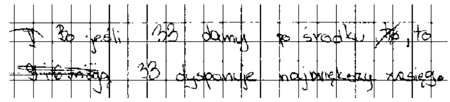
9.



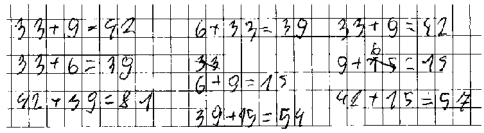
10.

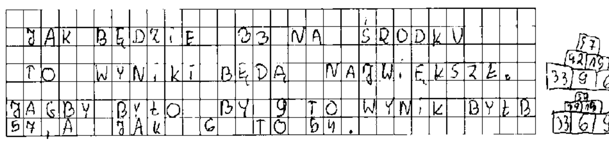


11.



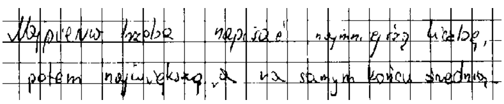
Nieznaczna część uczniów (0,7%) analizowała wszystkie możliwości wpisania liczb:



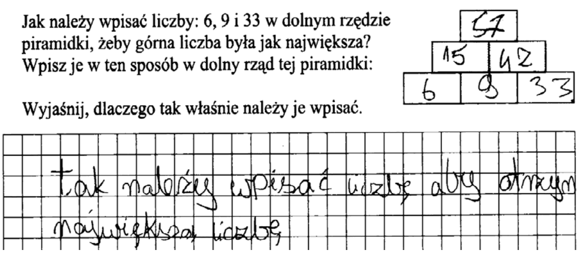


Inni uczniowie

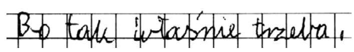
- albo opisywali słownie, jak wpisali liczby do piramidki:



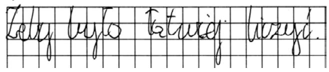
- albo stwierdzali po prostu: *tak należy wpisać, aby wynik był największy* i to także wtedy, gdy sposób wpisania liczb wcale nie dawał największej możliwej sumy:

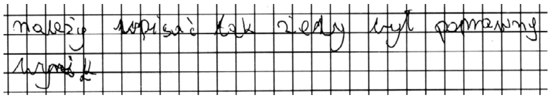


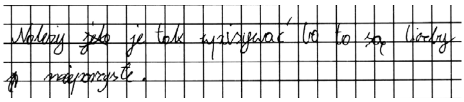
- albo „załatwiali” sprawę jeszcze krócej:

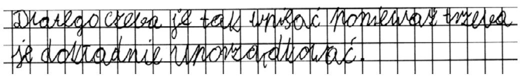


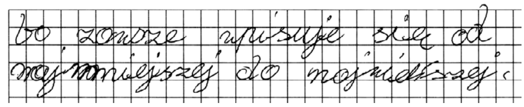
Niektórzy poszukiwali bardziej pragmatycznych, czy – ich zdaniem – bardziej matematycznych „argumentów”:

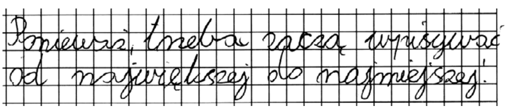




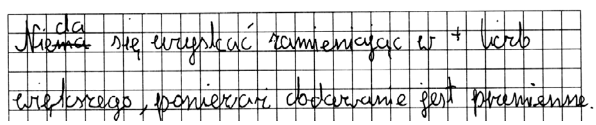








Zdarzały się również pojedyncze przypadki „matematycznego protestu”:



Łącznie, tego typu próby argumentacji sformułowało 58,2% uczniów. Aż 30,8% uczniów w ogóle pominęło tę część zadania.

Co uczeń miał na myśli?

Przyjrzyjmy się bliżej przytoczonym wypowiedziom uczniów. Co to znaczy, że *liczba spotka się z dwiema mniejszymi* (7), albo że *liczba ze środkowej części idzie w boki* (9)? Przecież liczby nie chadzają sobie w celach towarzyskich i nie *łączą się* (10) z innymi liczbami.

Traktując te zwroty dosłownie, należałoby stwierdzić, że są one pozbawione sensu. A przecież ich sens jest jasny i zrozumiały.

Co robimy, gdy ktoś poprosi nas o podanie tego kwadratowego czy okrągłego pudełka stojącego na półce? Szybko sięgamy po odpowiednie opakowanie (o kwadratowej podstawie w pierwszym przypadku oraz po puszkę w kształcie walca w drugim – opakowań w kształcie kuli raczej się nie produkuje, bo ciężko się je przewozi, stawia oraz otwiera) i podajemy. Żeby spełnić oczekiwania proszącej osoby, wcale nie musimy wiedzieć, że pierwsze opakowanie to prostopadłościan, a drugie to walec. I tak doskonale rozumiemy, o co jej chodzi.

A co wtedy, gdy kuzyn zapyta nas, kiedy ostatnio rozmawialiśmy z Krakowem, albo koleżanka polonistka zada nam pytanie, kiedy ostatnio czytaliśmy Prusa? Wiadomo, że w pierwszym przypadku chodzi o rozmowę z ciotką (straszna gaduła), która mieszka w Krakowie, a nie o słuchanie echa na krakowskim rynku, a w drugim o utwory literackie.

Żywy język obfituje w różnorodne figury stylistyczne, które charakteryzują się „nietypowym" użyciem pewnych słów. Dość często spotykanym, choć chyba mało znanym, typem figury stylu, jest metonimia[18]. **Metonimia**, to zastąpienie jednego słowa innym, najczęściej z nim jakoś związanym, np.: relacją *część za całość* lub *całość za część* (opakowanie i jego podstawa, miasto i osoba w nim mieszkająca). Metonimie tworzone są na ogół nieświadomie i nieświadomie odbierane oraz rozumiane. Związek istniejący między słowem zastępowanym i zastępującym sprawia, że metonimia jest prawie zawsze łatwo, szybko i dobrze rozumiana.

Inną kategorią figur stylu są metafory – **metafora** pojawia się wtedy, gdy użytemu słowu nadajemy pewne umowne, często bardziej obrazowe czy bardziej wyraziste, znaczenie: *inne liczby korzystają z tej w środku* (8); *i wtedy 33 dysponuje największym zasięgiem* (11). Metafory często eksponują pewne podobieństwa, bazują na zauważonych analogiach. Są one zazwyczaj tworzone świadomie i ich sformułowanie wymaga już pewnego wysiłku intelektualnego. Być może wypowiedzi zacytowane wcześniej (7, 9, 10) także mają metaforyczny charakter – nie zawsze daje się to jednoznacznie rozstrzygnąć.

Zasadnicza różnica pomiędzy metonimiami i metaforami polega na tym, że te pierwsze są tworzone nieświadomie i łatwo, a te drugie wymagają skupienia i zrozumienia tego, co chce się opisać.

Obie te figury stylu mają duże znaczenie dla matematyki, zwłaszcza w trakcie jej budowania. Praktyka szkolna

---

[18] H. Bauersfeld, W. Zawadowski, *Metafory i metonimie w nauczaniu matematyki*, Dydaktyka Matematyki 155–186, PWN, Warszawa 1988

pokazuje, że dzieci, odkrywając coś, dostrzegając jakiś związek, zaczynają mówić (a często i pisać) figuratywnie – brakuje im precyzyjnych i dosłownych sformułowań, często nie mogą znaleźć właściwych słów, zaczynają więc tworzyć pewne zwroty „na gorąco", aby jak najszybciej przekazać swój pomysł czy spostrzeżenie. W takiej sytuacji, zwłaszcza, gdy odkrycie jest efektem pewnego działania, biorą słowo, które jest „pod ręką" i używają go w innym niż zwykłe znaczeniu – tworzą i wykorzystują metonimie.

Bardzo często próba opisania przez dziecko swoich czynności ma charakter metonimiczny – jedne słowa zastępują inne słowa. Osobie nastawionej na językową poprawność może wydawać się, że ma do czynienia z jakimś bełkotem, gdy tymczasem w rzeczywistości ma do czynienia z rodzącym się zrozumieniem tego, co się wydarzyło, co dziecko zobaczyło. Wystarczy pozwolić uczniowi na spokojne powtórzenie swojej obserwacji czy argumentacji, aby stopniowo w miejscu metonimii zaczęły się pojawiać sformułowania dosłowne albo metafory – rozumienie dziecka pogłębia się, jego wypowiedź staje się bardziej świadoma, zmienia się więc jej językowy charakter.

Zachęcajmy dzieci, aby jak najczęściej mówiły o swoich spostrzeżeniach, rozwiązaniach, odkryciach, bo tylko wtedy będą rozwijać swój język – także matematyczny. I nie wartościujmy pochopnie wypowiedzi ucznia, bo to, czego w niej nie zrozumieliśmy, może mieć charakter figuratywny, może być dopiero pierwszym krokiem w stronę czytelniejszego „wyłożenia" myśli. Zamiast powiedzieć: *mówisz głupstwa*, poprośmy go, aby spróbował powiedzieć to samo w trochę inny sposób. Lepiej, żeby dzieci mówiły „nieprecyzyjnie", niż nie mówiły wcale. Im dłużej będą mówiły na konkretny temat, tym trafniejsze, lepiej umotywowane i łatwiejsze do zrozumienia dla obserwatora „z zewnątrz" będą padające sformułowania.

Im „dokładniej" będziemy słuchać uczniów, tym więcej będziemy wiedzieć o ich sposobach rozumowania i rzeczywistym poziomie wiedzy i tym łatwiej będzie nam ich wspierać w dalszym matematycznym rozwoju.

ANALFABETYZM CZY ALFABETYZM MATEMATYCZNY?

Polskie społeczeństwo boi się matematyki i ma na jej temat fałszywe wyobrażenia. Jakże często dorośli wykształceni ludzie wspominają w środkach masowego przekazu o swoich kłopotach z matematyką – na ogół zachowując się tak, jakby jej nieznajomość była czymś cennym, właściwym i nobilitującym. Czy to rzeczywista duma, czy może tylko reakcja obronna? A jeśli duma, to z czego? Przy okazji nasuwa się jeszcze jedno pytanie: dlaczego japońska łamigłówka *sudoku* stała się tak popularna w naszym kraju pełnym humanistów? Przecież wymaga ona metod postępowania i wnioskowania typowych właśnie dla matematyki. Czy dlatego, że nie kojarzy się nam ze szkołą?

Podobnie jest też w innych krajach. Powszechność zjawiska, polegającego na braku elementarnej umiejętności posługiwania się na co dzień narzędziami proponowanymi przez matematykę, skłania do zastanowienia się, czy nie mamy do czynienia ze zjawiskiem społecznym, które trzeba by nazwać **analfabetyzmem matematycznym**[19].

Z drugiej strony, od kilku lat coraz głośniej mówi się o tym, że dla rozwoju społeczeństw i dla jakości ich życia ogromne znaczenie ma (i będzie mieć) poziom matematycznego oraz technicznego wykształcenia obywateli. Dlatego też Unia Europejska kładzie coraz większy nacisk na podnoszenie szeroko rozumianej kultury matematycznej obywateli krajów członkowskich, widząc w tym między innymi klucz do budowania opartej na wiedzy nowoczesnej europejskiej gospodarki.

Podobnie myślą rządy innych państw, o czym świadczą działania *Organizacji Współpracy Gospodarczej i Rozwoju* (OECD), skupiającej najbardziej rozwinięte państwa świata. Z inspiracji tej międzynarodowej instytucji kilka lat temu uruchomiono program PISA – *Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Ucznia*, który stawia sobie za cel systematyczne badanie trzech, zdaniem ekspertów programu zasadniczych z perspektywy wyzwań dorosłego życia, komponentów wiedzy piętnastoletnich uczniów: *rozumienia tekstu*, *alfabetyzmu matematycznego* oraz *myślenia naukowego*[20].

Alfabetyzm w dziedzinie matematyki zdefiniowano na potrzeby badań PISA jako *zdolność do rozpoznawania*

---

[19] Por. J. A. Paulos, *Analfabetyzm matematyczny i jego skutki*, GWO, Gdańsk 1999.

[20] Por. I. Białecki, A. Blumsztajn, D. Cyngot: *PISA – Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Ucznia*, Warszawa 2003.

i zrozumienia roli, jaką matematyka odgrywa we współczesnym świecie, do formułowania sądów opartych na matematycznym rozumowaniu oraz do wykorzystywania umiejętności matematycznych tam, gdzie wymagają tego potrzeby codziennego życia.[21]

W pierwszej edycji badań PISA, w roku 2000, skupiono się przede wszystkim na umiejętności czytania ze zrozumieniem. Trzy lata później, w drugiej turze badań, zasadniczym obszarem badanym był właśnie alfabetyzm matematyczny.

Jak wypadają matematyczne umiejętności polskich piętnastoletnich uczniów w porównaniu z umiejętnościami ich rówieśników z 40 państw świata?

Mówiąc najogólniej – polskie wyniki są poniżej średniej wyników badań[22], zatem powodu do radości raczej nie mamy. Okazało się, że nasi uczniowie dobrze radzą sobie przede wszystkim z zadaniami, do rozwiązania których można zastosować algorytm rozwiązania znany ze szkoły albo algorytm opisany w treści zadania. Natomiast wypadają kiepsko – w porównaniu z uczniami z innych krajów – na przykład w tych sytuacjach, w których trzeba samodzielnie i twórczo myśleć, czyli tam, gdzie mają zastosować posiadaną wiedzę w nowej dla siebie sytuacji.

Umiejętność stosowania posiadanej wiedzy można rozwijać tylko … próbując stosować (w nowych sytuacjach!) posiadaną wiedzę. Im w bezpieczniejszych warunkach, tym lepiej. By nauczyć się tworzyć, trzeba przede wszystkim mieć okazję i możliwość tworzenia. Nic tego nie zastąpi. Prawda, jakie to proste i oczywiste?

Jeżeli istniejąca sytuacja ma się zmienić, jeśli alfabetyzm ma pokonać analfabetyzm, musimy **od samego początku edukacji** kłaść nacisk na intelektualną aktywność i samodzielność uczniów, musimy ich zachęcić do matematycznych poszukiwań i matematycznych rozumowań na miarę ich możliwości. Zatem:

- sięgajmy w procesie kształcenia po sytuacje bliskie i zrozumiałe dla dzieci,
- odwołujmy się jak najczęściej do doświadczeń uczniów i ich wiedzy pozaszkolnej,
- starajmy się, aby działanie i rysunek poprzedzały symbole i im towarzyszyły,
- korzystajmy z języka potocznego, stopniowo wzbogacając go tylko o te pojęcia i symbole, których sens jest już dzieciom znany,

[21] I. Białecki i in., *op. cit.*, s. 24.

[22] Wyniki badań PISA można znaleźć na przykład na stronie Instytutu Filozofii i Socjologii PAN: www.ifispan.waw.pl.

- twórzmy okazje do dziecięcych doświadczeń i eksperymentów,
- zachęcajmy dzieci do budowania oraz stosowania własnych strategii,
- pozwólmy im opowiadać i rozmawiać na temat swoich spostrzeżeń i odkryć, ale także trudności i wątpliwości,
- zawsze bardzo uważnie ich słuchajmy,

a przede wszystkim

- pozwólmy dzieciom myśleć!