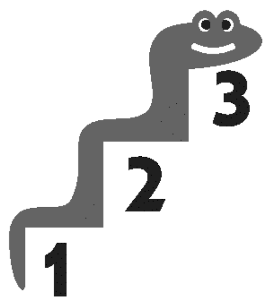
Alina Kalinowska



Pozwólmy dzieciom działać

– mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego

Warszawa 2010

Publikacja współfinansowana przez UE
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Publikacja jest dystrybuowana bezpłatnie.

Autor książki: Alina Kalinowska
Autor opracowania graficznego: Stefan Drobner
Recenzenci: prof. zw. dr hab. Bogusław Śliwerski
dr hab. Wacław Zawadowski
Redaktor językowy: Ewa Kowalik.
Wydawca: Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2010
ISBN 978-83-7400-268-4

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Nauczanie matematyki w klasach najmłodszych ma coraz bardziej sformalizowany charakter. Przejawia się on w dwóch współistniejących warstwach obejmujących działania nauczyciela oraz zmiany związane z nimi w umyśle ucznia.

Pierwsza – zewnętrzna, ma swoje ukonstytuowanie w precyzyjnie opracowywanych propozycjach lekcyjnych, wyposażanych dodatkowo przez wydawnictwa w gotowe zestawy ćwiczeń, pomoce dla nauczyciela itp. Ten ostatni „nie musi już ruszyć ręką ani nogą"[1]. Nauczyciele wierząc w moc sprawczą tak szczegółowo przemyślanego programu, tym dokładniej starają się realizować jego założenia.

Warstwa wewnętrzna sformalizowanego nauczania matematyki przejawia się w niepokojących skutkach mentalnych młodszych uczniów. Ich wiedza ogranicza się często do zestawu wyćwiczonych algorytmów, które w bardzo małym zakresie wspomagają rozwijanie myślenia matematycznego.

Inspiracją do napisania tej książki były wyniki ogólnopolskich badań podstawowych umiejętności językowych i matematycznych trzecioklasistów prowadzonych w ramach projektu realizowanego przez Centralną Komisję Edukacyjną, współfinansowanego przez Europejski Fundusz Społeczny. Badania obejmujące uczniów klas trzecich oraz ich nauczycieli zostały przeprowadzone w roku 2006, a następnie powtórzone i uzupełnione w roku 2008. Uczniowskie strategie radzenia sobie z zadaniami proponowanymi w testach noszą często niepokojące znamiona braku umiejętności przetwarzania wiedzy matematycznej prowadzące do „bezmyślności matematycznej"[2]. Badani trzecioklasiści wykazywali się bardzo wysokim poziomem sprawności narzędziowych ograniczających się do mechanicznego wykonywania obliczeń (na przykład pisemnych), nie radząc sobie jednocześnie w prostych przykładach odwołujących się do strategii niekoniecznie wyćwiczonych na lekcjach.

---

[1] Przytoczyłam tu fragment wypowiedzi nauczycielki o nowym, właśnie przez nią wybranym pakiecie edukacyjnym.
[2] Więcej na ten temat można znaleźć w: D. Klus-Stańska, A. Kalinowska, *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów.* Warszawa 2004, M. Dąbrowski, *Pozwólmy dzieciom myśleć.* Warszawa 2008.

Myślą przewodnią książki jest ukazanie konieczności takiego organizowania zajęć matematycznych w szkole, które umożliwi uczniom samodzielne działanie w przestrzeni realnych przedmiotów oraz w przestrzeni symboli matematycznych. Przez działanie rozumiem prowadzenie badań w zakresie zadanego problemu. Uczeń musi manipulować konkretami (również w sensie danych liczbowych), odkrywając jednocześnie prawidłowości matematyczne. Nie chodzi więc o to, żeby uczniowie wykonywali działania na konkretach, których celem jest „zilustrowanie" wprowadzonych na lekcji operacji symbolicznych, ale o zupełne odwrócenie sytuacji edukacyjnej.

Odkrywanie prawidłowości matematycznych, dzięki wprowadzaniu zmian w świecie rzeczywistych przedmiotów, jest pierwszym (i niezbędnym) etapem rozumienia pojęć matematycznych. Te doświadczenia stanowić muszą bazę dla konstruowania symbolicznej wiedzy matematycznej, a ich różnorodność i bogactwo wspiera rozwój myślenia uczniów.

W tym kontekście książka jest swego rodzaju polemiką z niektórymi, powszechnymi wśród nauczycieli, przekonaniami edukacyjnymi w zakresie nauczania matematyki na poziomie wczesnej edukacji.

W pierwszym rozdziale ukazano niektóre mechanizmy szkolnej edukacji, które przyczyniają się do trudności matematycznych uczniów w starszych klasach. Ich źródeł można szukać w wielu obszarach systemu szkolnego. Tu podjęto próbę ukazania przede wszystkim tych, które „wyrastają" z ideologii nauczycielskich.

W badaniach realizowanych w ramach projektu uczestniczyli również nauczyciele wypełniając, między innymi, ankietę z propozycjami stwierdzeń dotyczących procesu nauczania matematyki. Ustosunkowując się do nich, nauczyciele wczesnej edukacji odsłaniali jednocześnie pewien profil osobowościowo-zawodowy.

Niektóre z tych stwierdzeń zostały wykorzystane jako tytuły części rozdziałów. Pozostałe rozdziały otrzymały tytuły będące cytatami z wypowiedzi nauczycielskich. ***Przyjęcie odmiennej formy graficznej wskazuje na brak utożsamiania się autorki z ich brzmieniem. W kolejnych rozdziałach zwrócono bowiem uwagę na mityczny charakter niektórych przekonań nauczycieli wczesnej edukacji oraz ich, często destrukcyjny skutek, dla kompetencji poznawczych uczniów.***

Książka przeznaczona jest dla nauczycieli wczesnej edukacji, rodziców oraz wszystkich, którym leży na sercu takie uczenie się matematyki, które będzie przede wszystkim źródłem satysfakcji poznawczej uczniów, ich rosnącego poczucia kompetencji i mocy sprawczej.

Chciałabym szczególnie podziękować następującym osobom:

Mirkowi Dąbrowskiemu oraz wszystkim członkom Zespołu Badawczego za możliwość doświadczania ciągłej inspiracji do refleksji edukacyjnej;

Ani Dereń za wykonanie dowcipnych rysunków wzbogacających treść książki.

DLACZEGO MATEMATYKA STAJE SIĘ CORAZ MNIEJ ZROZUMIAŁA DLA UCZNIÓW?

Matematyka, jako dyscyplina wiedzy, jest niewątpliwie związana z rozwojem intelektualnym jednostki i postrzegana powszechnie, jako jedna z trudniejszych dziedzin wiedzy. Ma ona charakter operacyjny, a pojęcia matematyczne są abstrakcyjne. Kompetencja ich rozumienia jest więc związana z odpowiednim poziomem rozwoju dziecka.

Często również wyrażane jest przekonanie, że już w przypadku najmłodszych uczniów, tylko specjalne zdolności (matematyczne) gwarantują sukces. W ten sposób porażki mogą być tłumaczone przyczynami zewnętrznymi (cechy wrodzone) w stosunku do podejmowanych działań edukacyjnych. Walka o zmianę sytuacji dziecka doświadczającego niepowodzeń wydaje się wówczas niezwykle trudna.

Spróbujmy przyjrzeć się początkom zdobywania doświadczeń matematycznych oraz kolejnym ich etapom. Pomocna w wyjaśnianiu tego procesu (i powstawania wszystkich innych pojęć abstrakcyjnych) będzie teoria reprezentacji J. Brunera[3]. Zdaniem tego psychologa – konstruktywisty człowiek rozwija się poznawczo dzięki konstruowaniu w umyśle reprezentacji ogólnie rozumianych zdarzeń. Trzy typy reprezentacji: enaktywna, ikoniczna i symboliczna, stanowią kolejne etapy rozumienia sytuacji (również matematycznych). Doświadczenia enaktywne pozwalają na zauważanie prawidłowości w zmianach dokonywanych na realnym świecie, ikoniczne stanowią odzwierciedlenie ich w wyobraźni, a symboliczne odwołują się do rozumienia pojęcia matematycznego.

Wielu rodziców dzieci w wieku przedszkolnym, które z zapałem odkrywają świat, dostrzega i akceptuje potrzebę samodzielnego eksplorowania rzeczywistości realnej. Dzieci w tym wieku zadają nieoczekiwane i niełatwe pytania, fascynują się zagadkami logicznymi czy matematycznymi wyzwaniami. Już kilkulatki potrafią niezmordowanie zgłębiać interesujący je problem oraz uwielbiają zmagać się z prostymi obliczeniami, prosząc o przykłady i od nowa pokonując trudności. Cieszą się z odniesionego sukcesu i mają poczucie mocy sprawczej. Uważają, że mogą sobie poradzić w wielu trudnych sytuacjach poznawczych.

Formalny sposób nauczania matematyki w szkole dość szybko może zniweczyć osiągnięte już sukcesy intelektualne i emocjonalne dziecka. Nauczyciele, mając świadomość (często opartą na własnych

[3] J. Bruner, *Poza dostarczone informacje*. Warszawa 1978.

doświadczeniach szkolnych) trudności z uczeniem się matematyki, próbują przybliżyć rozumienie pojęć, starając się wyjaśnić **wszystko** swoim uczniom. Pragną również uchronić ich od błędów w obawie o ich zakotwiczenie w dziecięcych umysłach.

Te niepokoje znajdują swój wyraz w próbach pełnego kontrolowania każdego kroku uczniów w przekonaniu, że zapewni ono im poprawne poznawanie pojęć matematycznych. Polecając rozwiązanie zadania, nauczyciele chcą mieć pewność, że uczeń nie popełni błędu, a w każdym razie uda się zminimalizować takie niebezpieczeństwo.

To przekonanie często towarzyszy nauczycielowi w sytuacji, gdy wiele razy pokazywał sposób rozwiązywania i omówił go z całą klasą, upewniając się, że wszyscy już rozumieją. Wówczas mógł pozwolić na samodzielne radzenie sobie z podobną trudnością matematyczną uczniom, którzy, zdaniem nauczyciela: *nie są zostawieni sami sobie, ale mogą przypomnieć sobie, jak to się robi.*

Wydaje się, że cel został osiągnięty i w pewnym sensie jest tak istotnie. Uczniowie poprawnie będą rozwiązywali kolejne podobne zadania, na przykład „na odejmowanie w zakresie 100”.

Należy jednak zdawać sobie sprawę z dalej sięgających skutków takiego wprowadzenia uczniów w świat pojęć matematycznych. Myślenie matematyczne nie polega bowiem na przypominaniu sobie, jak rozwiązywało się poprzednie zadanie. Ten sposób radzenia sobie z trudnością w niewielkim jedynie stopniu kształci umiejętność przetwarzania wiedzy matematycznej tak, aby była ona użyteczna w sytuacjach nowych poznawczo. W konkursach matematycznych nie ma zadań stereotypowych właśnie dlatego, że umiejętność myślenia przejawia się w konfrontacji z nieznanym problemem. Uczniowie jednak rzadko mają okazję do rozwijania wiedzy w ten sposób. Wielu nauczycieli oczekuje, że będą myśleli w sposób ściśle określony i podany w gotowej postaci.

W miarę upływu lat szkolnych wielu uczniom coraz trudniej porządkować wiedzę matematyczną według wzorów postępowania przekazywanych przez nauczyciela. W miarę uabstrakcyjniania się poznawanych operacji matematycznych przestają one być czytelne, nie tylko ze względu na poziom złożoności, ale przede wszystkim dlatego, że uczniowie przestają nadawać im znaczenia. Nowy, nierozpoznany dotąd problem, można bowiem „oswoić” jedynie dzięki zrozumieniu go na swój sposób. Inaczej mówiąc, ulokować go w umyśle integrując z wcześniejszymi doświadczeniami poznawczymi, którym nadano już wcześniej znaczenia osobiste.

Rozumienie pojęć matematycznych ma swoje źródło w operacjach logicznych wywodzących się z działania na przedmiotach. Szczególnie na poziomie klas najmłodszych jakość rozumienia działań matematycznych, czy relacji między wielkościami matematycznymi w zadaniu tekstowym, jest zdeterminowana ilością i różnorodnością działań dziecka w przestrzeni materialnej. Musi ono oddziaływać na rzeczywistość, dokonywać w niej zmian, żeby mogło następnie odwoływać się do nich.

Nie chodzi tu jednak o poglądowe nauczanie, w którym dzieci przyglądają się, jak działa nauczyciel, ale o pozwolenie uczniom na kontynuowanie sposobu poznawania rzeczywistości z czasu pozaszkolnego. Nie wystarczy powiedzieć im, jak jest, ale trzeba spowodować, żeby nauczyli się wyobrażać sobie relacje logiczne, na bazie których mogą konstruować rozumienie pojęć matematycznych. Nauczyciel w szkole nie definiuje przecież swoim uczniom dodawania, wprowadza jedynie symbol, pod którym uczniowie mogą wyobrażać sobie na przykład zsuwanie przedmiotów. Wyobrażenia natomiast konstruowane są w umyśle dzięki wcześniejszym manipulacjom na przedmiotach, podczas których dziecko generowało sposoby poradzenia sobie, gdy miało na przykład policzyć, ile ma teraz lizaków, jeśli od dziadka dostało dwa lizaki i od babci dwa.

Podejmowane przez najmłodszych uczniów działania będą istniały w ich umysłach w postaci zapamiętanych wyobrażeń. Ich jakość i bogactwo pomagają zrozumieć nowe sytuacje matematyczne w osobisty, w pewnym sensie unikalny sposób. Każdy z nas przecież nieco inaczej rozumie pojęcia. Jednakże zakres ich znaczenia u różnych osób nakłada się na siebie w stopniu wystarczającym i pozwala na komunikację.

Podobnie jest z pojęciami matematycznymi. Choć wydaje się, że stanowią ściśle określone i jednoznacznie rozumiane definicje, ich rozumienie często nie jest identyczne. Jeśli zastanowimy się, co rozumiemy pod pojęciem „różnica", wydaje się, że jest to oczywiste. Większość z nas powiedziałaby, że jest to wynik odejmowania lub po prostu odejmowanie. Jest to na pewno jakiś zakres rozumienia. Nie jest on jednak pełny, a nade wszystko jest mało użyteczny.

Rozwiązując zadanie: **Powiedz bez obliczania, jaka będzie różnica, gdy od liczby 977 odejmę liczbę o 131 od niej mniejszą?**, używamy pojęcia „różnica" tylko do zrozumienia, o czym jest to zadanie (chodzi o odejmowanie), nie pomaga nam to jednak w jego rozwiązaniu. Jeśli znaczenie nadane temu pojęciu będzie nieco inne: **różnica** jest to ta wielkość, o jaką odjemna jest większa od odjemnika albo odjemnik jest mniejszy od odjemnej, rozwiązanie zadania nie stanowi większego problemu. Skoro liczba odejmowana jest od odjemnej o 131 mniejsza, to różnica między nimi będzie właśnie tą wielkością. Znaczenia osobiste nadawane pojęciom matematycznym mogą się więc znacznie między sobą różnić, a nauczyciel często nie ma pełnej wiedzy o jakości tych konstruktów w umysłach uczniów.

Tymczasem, jak pokazuje rzeczywistość szkolna, znaczenia matematyczne, często schematycznie przyswajane przez uczniów, usztywniają się w algorytmicznej formie. W taki sposób zinterioryzowana wiedza matematyczna z klas najmłodszych nie gwarantuje powodzenia w nadawaniu znaczeń pojęciom matematycznym w klasach starszych.

Matematyka nie może być bowiem zestawem schematycznych trików do zastosowania w ściśle określonej sytuacji. Na przykład konieczność rozpisywania działania dodawania $8 + 6 = (8 + 2) + 4 =$ nie jest gwarancją zrozumienia, w jaki sposób dodawanie zmienia liczby[4].

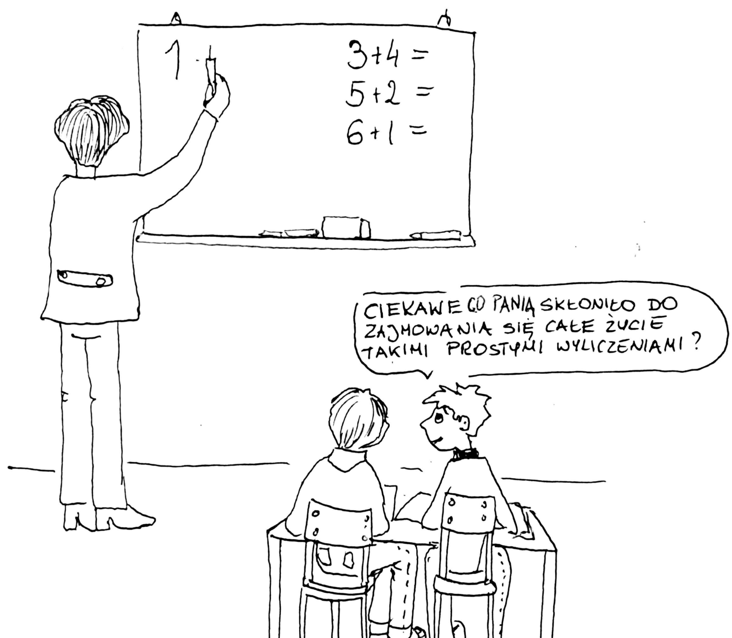
Co oznacza natomiast sytuacja, gdy uczeń tego typu obliczenia wykonuje natychmiast w pamięci?

Odwołajmy się do naszych „dorosłych" sposobów obliczania. Jak dodajemy w pamięci $67 + 8$? Bardzo często dopełniamy $67 + 3 + 5$, choć nie zawsze zdajemy sobie z tego sprawę. Uczeń, który bez rozpisywania radzi sobie z przykładami analogicznymi do wyżej podanego przykładu, również najprawdopodobniej dopełnił do dziesiątki. W takiej sytuacji konieczność rozpisywania staje się uciążliwym i niepotrzebnym ćwiczeniem, a kształtowanie rozumienia, czym jest dodawanie, przestaje interesować. Najistotniejsza bowiem okazuje się konieczność zapamiętania podanego wzoru postępowania.

Często wydaje się, że nie zaszkodzi, jeśli uczeń, który potrafi podać wynik z pamięci, „dowie się", że istnieje taki sposób zapisu. Z perspektywy ucznia nie ma on jednak żadnej wartości, ponieważ w niczym mu nie pomaga. On już to przecież obliczył na swój sposób (najpewniej taki sam). Próby zachęcania, a wręcz nakazywania rozpisywania podanym sposobem, noszą znamiona nie tylko straty czasu. Takie sytuacje mają duży wpływ na kształtowanie w uczniu poczucia, że jego strategie są mało istotne, że nie powinien rozumieć na swój sposób, ale tak, jak pokazuje jego „pani". Ta konieczność identyfikacji nauczycielskiego oczekiwania na „odpowiedni" sposób rozumienia pojęć matematycznych w krótkim czasie ogranicza naturalną skłonność dziecka do budowania samodzielności intelektualnej. Przyjmuje ono za oczywistą, taką konwencję funkcjonowania w szkole, w której dopóki

[4] Nie jest również gwarancją rozumienia, czym jest przekraczanie progu dziesiątkowego.

nauczyciel nie powie, jak powinno być, nie jest możliwe zrozumienie treści matematycznych. Zamiast więc uniezależniać się od nauczyciela (czego zaczyna się oczekiwać od ucznia w klasach starszych), coraz częściej – wraz z podwyższaniem stopnia ogólności pojęć matematycznych – oczekuje dokładnych wyjaśnień, wskazówek i kierowania procesem rozwiązywania zadań. Matematyka staje się coraz trudniejsza, mniej zrozumiała, a tłumaczenie nauczyciela (nawet najlepsze) nie wystarcza, aby wiedza stała się elastyczna i przydatna w sytuacjach nowych poznawczo.



Uczniowie w klasach początkowych nie mogą sami odkrywać pojęć matematycznych

Mityczność tego stwierdzenia konstytuuje się w dość powszechnym przekonaniu, że najmłodsi uczniowie nie dysponują jeszcze możliwościami do samodzielnego odkrywania znaczeń matematycznych. Zdaniem wielu nauczycieli, najpierw trzeba pokazać dzieciom, jak można postępować, tworząc w ten sposób „bazę" pojęć matematycznych niezbędnych do rozwiązywania zadań.

Jednym z najczęściej używanych zwrotów, pojawiających się w sformułowaniach celów lekcji i jej tematu jest „wprowadzenie pojęcia…," uszczegółowione o konkretną nazwę. Istotne wydaje się, w jaki sposób rozumiane to określenie i co właściwie nauczyciel „wprowadza".

Wyobraźmy sobie zajęcia matematyczne, których celem jest poznanie przez uczniów przemienności dodawania w klasie I. Okazało się, że wszystkie dzieci natychmiast „chwyciły", w czym rzecz, wykonywały poprawnie przykłady z ćwiczeń i chętnie zgłaszały się do odpowiedzi. Każdy nauczyciel życzyłby sobie takich lekcji jak najwięcej.

Przyjrzyjmy się jednak całej sytuacji wnikliwiej. Być może zadowalający wydaje się fakt zapamiętania przez uczniów, że liczby w dodawaniu można zamieniać miejscami, a wynik będzie taki sam. Zrealizowanie takiego oczekiwania nie stanowi dla nich większego problemu. Z dużą łatwością wykonują obliczenia, w których zmieniają miejscami liczby według wzoru: $2 + 3 + 8 = (2 + 8) + 3 =$.

Czy jednak mamy pewność, że każdy uczeń odpowie również na pytanie: *Dlaczego tak się dzieje?* Najczęściej przyjmujemy, że jeśli wykonują polecenie prawidłowo, to rozumieją, co czynią. To jednak nie musi być prawdą. Jeśli uczeń nie wie, dlaczego zachodzą pewne relacje między liczbami, odsłania tym samym pewne ograniczenia w rozumieniu tego pojęcia. Dziecięce rozumienie jest wówczas bardziej intuicyjne i nie zawsze ma szansę przekształcić się w wiedzę uświadomioną.

Zbyt często jednak dochodzi do sytuacji[5], w której uczeń ogranicza się jedynie do odtworzenia podanej wcześniej drogi postępowania. I choć ta odtwórcza wiedza może zapewnić sukces w przypadku kolejnego zadania, do którego uczeń potrafi dopasować schemat, **nie powinna być**

[5] Por. D. Klus-Stańska, *Konstruowanie wiedzy w szkole*. Olsztyn 2000, D. Klus-Stańska, M. Nowicka, *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej.* Warszawa 2005, M. Dąbrowski, *Pozwólmy dzieciom myśleć*. Warszawa 2009, M. Dąbrowski (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa 2009.

celem nauczycielskich działań. Przeciwnie – nauczyciel powinien dążyć do tego, aby uczeń sam tę drogę odkrywał, bowiem to właśnie wiedza samodzielnie konstruowana przez uczniów umożliwia im rozumienie relacji matematycznych.

Przywołana wcześniej przemienność dodawania nabiera więc znaczenia wówczas, gdy uczniowie **sami** zauważą, że manipulując zbiorami przedmiotów, w dowolny sposób je ze sobą łączą, a kolejność tej operacji nie ma znaczenia dla wyniku.

Rozumienie przemienności dodawania kształtuje się jednocześnie z rozumieniem pojęcia liczby oraz kompetencją wykonywania działań dodawania i odejmowania w zakresie 10. Uczeń konstruuje więc pojęcie przemienności dodawania w umyśle dużo wcześniej, a w szkole uczy się jego zapisu symbolicznego. Dzieci, które posługują się aspektem symbolicznym liczby, potrafią bez problemu zapisać zauważoną prawidłowość, jeśli tylko nauczyciel odwoła się do odkrytych już przez dzieci zależności, że łatwiej dodaje się niektóre liczby (na przykład, gdy dopełniają dziesiątkę). Jest istotne, aby nauczyciel uświadomił sobie, że zupełnie inaczej funkcjonują poznawczo uczniowie w sytuacji, gdy nauczyciel wprowadza „prawo przemienności dodawania”, jako nowe zagadnienie dla uczniów, niż gdy po prostu rozmawia z nimi o znanej im już prawidłowości, nadając jej jedynie odpowiednią nazwę.

Pojęcia matematyczne tworzą się dzięki **wielu** wcześniejszym doświadczeniom, polegającym na zauważaniu przez dzieci zmian, jakie nastąpiły na skutek ich działalności w rzeczywistości. Tym zmianom nadają znaczenia. Jeśli rozdzielają swoje cukierki między czworo przyjaciół, dostrzegają, że czasami da się podzielić równo i nie zostanie nic, a czasami tak się nie uda. Mogą też dostrzec, że jeśli po podziale zostaną cukierki, to nie wystarczy już dla każdego nawet po jednym. W taki sposób odkrywają relacje podzielności, choć nie nazywają tego dzieleniem z resztą czy podzielnością liczb. Oczywiście, jednostkowe doświadczenia polegające na takim działaniu, na ogół nie wystarczą. Dzieci nieskończenie wiele razy dokonują podobnych manipulacji, w których dzielą w sensie matematycznym, na przykład układają talerze po obu stronach stołu i zastanawiają się, czy może być „po równo”, jeżeli do stołu zasiądzie 7 osób. Takie z kolei doświadczenia kształtują pojęcie parzystości liczb. Dziecięce eksplorowanie świata jest polem doświadczalnym dla kształtowania się pojęć matematycznych.

Sformalizowany kształt procesu nauczania matematyki jest skoncentrowany na symbolu, w związku z czym uczniowie szybko przestają działać w świecie przedmiotów. Dziecko, które używa palców do liczenia, jest postrzegane jako niedostatecznie dojrzałe do nauki w szkole[6].

Właściwie nie proponuje się manipulowania przedmiotami uczniom zdolniejszym. W związku z tym nie mają oni na przykład okazji do odkrywania „O ile fasolek będzie miał więcej kolega, jeśli mieliśmy po tyle samo, a potem oddałem mu dwie moje fasolki". Tego rodzaju doświadczenia nie mają na celu wąsko rozumianego „wprowadzenia pojęcia" (w sensie tematu lekcyjnego), ale kształtowanie rozumienia relacji między wielkościami matematycznymi (liczbami). Stanowią więc nieco szerszy obszar doświadczeń matematycznych, których kontekst poznawczy określany jest dziecięcymi badaniami dokonywanych w świecie realnym zmian.

Akceptacja samodzielności dziecięcych prób badawczych pozwoliłaby każdemu uczniowi odnaleźć poziom problemu właściwy dla jego myślenia matematycznego. Przykładem takiego zadania mogłaby być następująca sytuacja: **Hania ma 8 fasolek, a Jacek 5. Ile mają razem fasolek?** Na początku uczniowie dodają fasolki i obliczają sumę. Ale jest to dopiero wstęp do ich aktywności badawczej. Nauczyciel pyta następnie: *A co byłoby, gdyby Hania miała o 3 fasolki więcej? A gdyby miała o 5 fasolek mniej? A jak można byłoby obliczyć, ile mają wspólnie fasolek, jeśli Hania miałaby o 3 fasolki więcej, a Jacek o 4 fasolki mniej?*

Dzięki takiej organizacji zajęć, każdy z uczniów ma szansę na prowadzenie samodzielnego procesu badawczego, na odpowiednim dla siebie poziomie. Dzieci o nieco niższych kompetencjach matematycznych mogą nadawać znaczenia pojęciom mniej skomplikowanym. Uczniowie zdolni mają wówczas okazję do konstruowania wiedzy o bardziej złożonym charakterze.

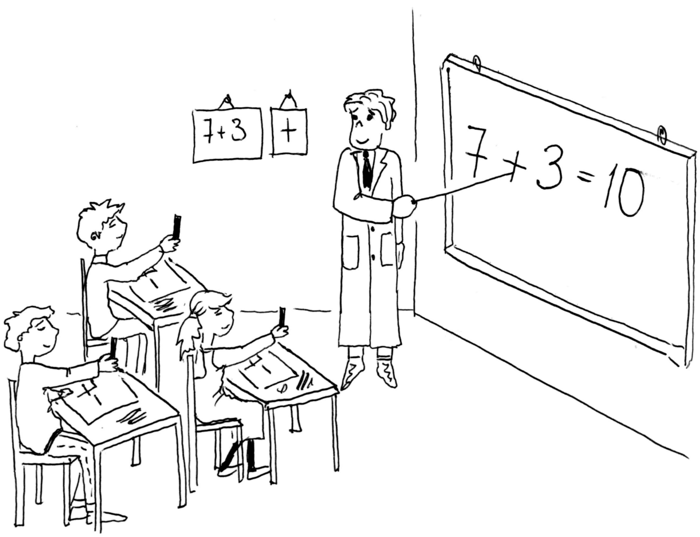
Sytuacji badawczych dotyczących choćby tej jednej relacji, można oczywiście tworzyć o wiele więcej. Ważne jest, aby uczniowie prowadzili samodzielnie badania, próbując odkryć, w jaki sposób zmiany posiadania w przypadku jednego dziecka wpływają na stan liczbowy wspólnych fasolek obojga dzieci. Najważniejszym celem jest tu **nie tyle szybkie sformułowanie właściwej odpowiedzi**, ale ciągle podejmowane próby poradzenia sobie z tym problemem. Ważniejsze dla rozwoju pojęć dziecka jest prowadzenie takich badań nawet wówczas, gdy nie dojdzie ono do celu, niż nieprowadzenie ich w ogóle.

Rodzaj działania, rodzaj używania rzeczy (potraktujmy w ten sposób również liczby, które można poddawać manipulacjom) buduje nasz

---

[6] Por.: E. Gruszczyk-Kolczyńska , *Dzieci z trudnościami w uczeniu się matematyki*. Warszawa 1997.

umysł. Rozważania J. Brunera[7] na temat kulturowej dystrybucji rzeczy, które determinują aktywność i rozwój poznawczy, można dokonując pewnej symplifikacji, odnieść do rozwoju kompetencji matematycznych. Sposób uprawiania matematyki na lekcji determinuje w znacznej mierze kształt wiedzy uczniów oraz sposób jej używania.



[7]J. Bruner, *Kultura edukacji.* Kraków 2006, s. 210.

Przerobienie gotowych kart pracy gwarantuje przyrost wiedzy matematycznej najmłodszych uczniów

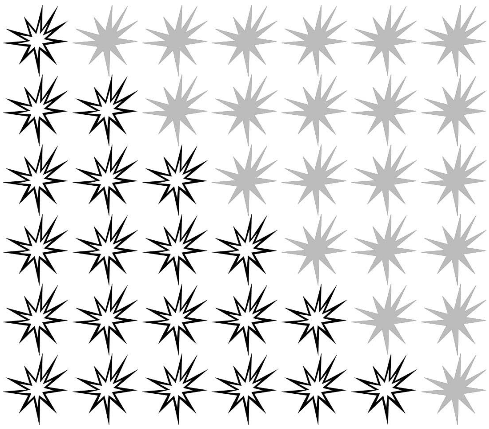
Jest to chyba jeden z najbardziej popularnych wśród nauczycieli mitów. Choć nie zawsze deklarują takie właśnie przekonanie, dają mu wyraz w sposobie realizacji zajęć matematycznych. Nauczyciele bardzo niechętnie (jeśli w ogóle) zgadzają się na ominięcie jakiegokolwiek ćwiczenia z zestawu proponowanego w pakiecie. Często również argumentują taki stan rzeczy wymaganiami stawianymi przez rodziców, którzy oczekują, że kupiony za niemałą dla niektórych kwotę podręcznik będzie „wykorzystany" w całości.

Rodzice mają prawo tak właśnie myśleć, ponieważ nie są profesjonalistami. Jednak nauczyciel musi kierować się swoją wiedzą zawodową dotyczącą stymulowania poznawczego uczniów. Jeśli jest przekonany, że inne ćwiczenie dostarczy dziecku większego bogactwa doświadczeń niezbędnych do tworzenia się pojęcia matematycznego, będzie również w stanie skutecznie polemizować z rodzicami. Niechęć do podejmowania takich prób może jednak świadczyć o braku krytycznej refleksji wielu nauczycieli nad zadaniami zaproponowanymi przez autorów pakietów edukacyjnych.

Dla zilustrowania konieczności krytycznego oglądu zalecanych ćwiczeń przyjrzyjmy się dwóm propozycjom organizacyjnym, w zakresie tego samego zagadnienia: kształtowania aspektu algebraicznego liczby.

Pierwsza propozycja została opracowana na podstawie podobnych ćwiczeń proponowanych przez wiele podręczników:

Uzupełnij według wzoru:



$1 + 6 = 7$

$\square + \square = \square$

$\square + \square = \square$

$\square + \square = \square$

$\square + \square = \square$

$\square + \square = \square$

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że jest to absolutnie właściwe ćwiczenie. Liczba siedem jest przedstawiona za każdym razem jako suma dwóch składników. Poza tym zaproponowane składniki wyczerpują prawie wszystkie możliwości. Nie pojawia się przykład z dodawaniem zera, pewnie dlatego, że jeszcze nie zostało „wprowadzone".

Jeśli spojrzymy na to ćwiczenie z perspektywy ucznia, który chciałby szybko i dobrze je wykonać, i który nie ma świadomości, jaki był cel autorów tego zadania, możemy sobie wyobrazić uruchomioną przez niego strategię. Dużo łatwiejsze będzie wypełnienie okienek po prawej stronie bez zastanawiania się, za pomocą jakich składników można przedstawić liczbę siedem. Aby rozwiązać to zadanie wystarczy bowiem w kolejne okienka z lewej strony wpisywać kolejne liczby rosnąco, a w okienka środkowe – kolejne liczby malejąco. W prawe okienka zawsze trzeba wpisać 7.

Myślenie dziecka może wówczas dotyczyć zupełnie innych zagadnień, niż nam się wydawało. Nawet jeśli wymieszamy wiersze, żeby ta prawidłowość nie wysunęła się na pierwszy plan, nadal mamy do czynienia z sytuacją jednowymiarową, w której uczeń po wpisaniu w okienka liczb, nie musi się już nad niczym zastanawiać.

Wyobraźmy sobie teraz sytuację inną organizacyjnie. Każdy uczeń (dzieci mogą również pracować w parach) dostaje siedem kasztanów.

Jego zadaniem jest sprawdzić, w jaki sposób można rozdzielić je na dwie kupki. Swoje próby może zapisywać na karcie pracy. Ważne jest, aby nie została od razu narzucona liczba możliwości uzyskania dwóch zbiorów, przez liczbę wierszy do wypełnienia.

Brak takiej wskazówki może generować pojawianie się różnych rozwiązań, czasem metodycznie przeprowadzanych przez dzieci. Może również spontanicznie pojawić się pytanie: *A co będzie, jeśli do jednej kupki wezmę wszystkie kasztany?* Jest to znakomita okazja do wyjaśnienia, że taka sytuacja jest możliwa i możemy ją zapisać 7 + 0 lub 0 + 7. Na tym nie kończy się potencjał poznawczych doświadczeń proponowanego ćwiczenia. Pytanie kolejne mogłoby brzmieć: *Czy można podzielić kasztany na dwie równe kupki? A czy są takie liczby, które można podzielić w ten sposób? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?* Tego rodzaju doświadczenia badawcze kształtują pojęcie parzystości liczb, pozwalając dokonywać klasyfikacji samodzielnie nadając znaczenia tej właśnie parzystości: „Istnieją liczby, które dzielą się na dwa i takie, które się nie dzielą".

Podane przykłady mogą również stanowić uzasadnienie dla konieczności prowadzenia zajęć matematycznych przede wszystkim w taki sposób, aby uczniowie mogli się zastanawiać. Nie mam tu jednak na myśli standardowego polecenia nauczyciela typu: *Zastanów się, jak rozwiązać to zadanie?,* ale zmieniające typ aktywności dziecka: *Zastanów się, dlaczego tak się dzieje?, Zastanów się, co będzie, jeśli…?.*

Najbardziej istotną w szkole powinna być taka sytuacja poznawcza, w której uczniowie zastanawiają się, nawet jeśli nie otrzymali wprost takiego polecenia. Niektórzy uważają, że jedną z najwyżej cenionych umiejętności nauczyciela powinna być umiejętność takiego zorganizowania pracy ucznia, żeby uczył się on, nie wiedząc o tym.

Jeden z najlepszych amerykańskich profesorów informatyki formułuje tak tę myśl: „Chodzi o to, żeby uczyć kogoś jakiejś rzeczy tak, by myślał, że uczy się czegoś innego"[8]. Nauczanie matematyki byłoby o wiele ciekawsze dla uczniów, gdybyśmy my - nauczyciele pamiętali o tej zasadzie. Konieczność zastanowienia się, czego uczniowie mogą się dowiedzieć, choć nie jest to ściśle określone tematem lekcji, bardzo wzbogaciłoby również nasze kompetencje matematyczne.

Rolę zadań dobrze wpisujących się w taki sposób nauczania matematyki spełniają zadania pozwalające na osobiste eksplorowanie pojęć matematycznych. Sformułowanie zadania powinno więc determinować aktywność o charakterze badawczym.

[8] R. Pausch, *Ostatni wykład.* Warszawa 2008, s. 170.

Poniżej zaprezentowano przykładową kartę pracy do prowadzenia badań przez uczniów.

Karta pracy
imię .... kl. ....
data ....
Zad. 1. Ułóż dwa słupki fasolek, tak aby w każdym było tyle samo fasolek. Przełóż z jednego słupka do drugiego jedną fasolkę. Swoje spostrzeżenia wpisz do tabelki.

	Hipoteza Jak myślisz, o ile więcej fasolek będzie w drugim słupku niż w pierwszym?	Sprawdzenie Napisz po sprawdzeniu (przeliczeniu), o ile więcej fasolek jest w drugim słupku niż w pierwszym.
Przenieś z jednego słupka do drugiego 1 fasolkę		
Przenieś z jednego słupka do drugiego 2 fasolki		
Przenieś z jednego słupka do drugiego 3 fasolki		
Przenieś z jednego słupka do drugiego 4 fasolki		

Problem, który uczniowie mają szansę tu poznać (choć nie muszą wiedzieć, że się tego uczą), to uświadomienie sobie, że jeśli przekładają elementy z jednego słupka na drugi, to w tym drugim zwiększa się liczba elementów, ale w pierwszym musi się wówczas o tyle samo zmniejszyć. Jest to zagadnienie, którego rozumienie umożliwia rozwiązywanie trudniejszych zadań, na przykład: **W dwóch pojemnikach razem jest 16 litrów mleka. Kiedy z jednego przelano 3 litry do drugiego, to w każdym było tyle samo mleka. Ile litrów mleka było na początku w każdym pojemniku?**

Pewność, że uczeń rozwija własne kompetencje matematyczne, nie jest więc funkcją rozwiązywania wielu kart pracy. Aktywność badawcza uruchamiana w czasie jej wypełniania determinuje jakościowe zmiany w myśleniu uczniów. Można „przerobić" wiele kart pracy i nie bogacić swoich umiejętności. Takie sytuacje bywają udziałem dzieci o wysokich możliwościach intelektualnych, które muszą wykonywać te same zadania, co wszyscy uczniowie w klasie. W efekcie nieustannie pracują poniżej swoich możliwości poznawczych. Tym problemem zajmiemy się jeszcze w kolejnych rozdziałach[9].

[9]Por. rozdział: Uczeń zdolny rozwija w szkole myślenie matematyczne.

Liczenie na konkretach to nie jest prawdziwa matematyka

Istotą tego mitycznego stwierdzenia są przekonania wielu nauczycieli związane z określeniem „prawdziwa matematyka”. Wydaje się, że w centrum zainteresowania szkolnego nauczania matematyki jest jedynie myślenie symboliczne ucznia. Stanowi ono docelowy etap rozwojowy, i jako takie, jest w pewnym sensie utożsamiane z „właściwym” myśleniem. Jest to istotnie najwyższy poziom rozwoju myślenia, który jednocześnie zależy od jego wcześniejszych etapów.

Uczniowie, w umysłach których ukształtowało się pojęcie liczby, choćby w zakresie dziecięcego liczenia[10], musieli już wiele lat wcześniej doświadczać sytuacji przeliczania, manipulowania przedmiotami, sprawdzania, kto ma więcej i tym podobne. Bez tych wieloletnich prób nie byłoby możliwe wykształcenie myślenia abstrakcyjnego.

Warto więc przypomnieć, że dziecko w wieku 6-9 lat (okres wczesnoszkolny) jest w fazie intensywnego rozwoju poznawczego i kształtowania się aparatu pojęciowego. Działania dziecka (i ich obserwowanie oraz nadawanie im znaczenia) tworzą bazę poznawczą. Rozwijanie się aparatu abstrakcyjnego myślenia jest możliwe jedynie dzięki korzystaniu z niej. Podobnie jest z wieloma pojęciami matematycznymi, które stanowią podstawę wiedzy w klasach najmłodszych. Abstrakcyjne rozumienie musi „wyrastać” z doświadczeń wcześniejszych. Są więc one absolutnie konieczne w jak najszerszym zakresie. Im więcej różnorodnych doświadczeń manipulacyjnych zorganizujemy dzieciom, tym większa jest szansa tworzenia się w ich umysłach pojęć matematycznych tworzących wiedzę elastyczną i użyteczną, szczególnie w sytuacjach poznawczo nowych.

Tego rodzaju czynności dzieci należą do ich codzienności, i choć dorosłym wydają się infantylne, mają ogromne znaczenie dla rozumienia relacji matematycznych.

W poprzednim rozdziale zaprezentowałam przykładową kartę pracy, dzięki której uczniowie mogą prowadzić własne badania relacji matematycznych.

Obecnie chcę przedstawić strategie uruchamiane przez uczniów klasy drugiej i trzeciej dla zilustrowania znaczenia używania do badań konkretnych przedmiotów.

---

[10] Por. E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci z trudnościami w uczeniu się …*, dz. cyt.

Uczeń klasy drugiej, którego rozwiązanie przedstawione zostało poniżej, nie zdecydował się skorzystać z fasolek. Był przekonany, że wystarczy, gdy narysuje sobie sytuację opisaną w zadaniu. Nie potrafił jednak w stanie ogarnąć wszystkich zmian, które w rzeczywistości miałyby miejsce. Problem dostrzegał jedynie z perspektywy zmiany w jednym zwiększanym słupku narysowanych fasolek. Nie zauważał, że drugi słupek musi się jednocześnie zmniejszyć. Zbyt wczesne odejście od manipulowania konkretami mogło być przyczyną powstania błędnej strategii myślenia.

Zad. 1. Ułóż dwa słupki fasolek, tak aby w każdym było tyle samo fasolek. Przełóż z jednego słupka do drugiego jedną fasolkę. Swoje spostrzeżenia wpisz do tabelki.

	Hipoteza **Jak myślisz, o ile więcej fasolek będzie w drugim słupku?**	Sprawdzenie **Napisz po sprawdzeniu o ile więcej fasolek będzie drugim słupku.**
Przenieś z jednego słupka do drugiego 1 fasolkę	1	6+1=7
Przenieś z jednego słupka do drugiego 2 fasolki	2	6+2=8
Przenieś z jednego słupka do drugiego 3 fasolki	3	6+3=9
Przenieś z jednego słupka do drugiego 4 fasolki	4	6+4=10

Uczniowie klas najmłodszych powinni **nie tylko mieć możliwość manipulowania konkretami**, ale co ważniejsze, **uczyć się, że jest to niezbędny proces** w rozwijaniu myślenia. Istotne jest budowanie pewności dziecka, że strategie tego typu należą do naturalnych procedur postępowania każdego człowieka i są niezbędne dla prawidłowego kształtowania się wiedzy matematycznej.

Działania na rzeczywistych przedmiotach nie powinny być traktowane przez nauczyciela jako „ostatnia deska ratunku" dla bardzo słabego ucznia, wobec którego zawiodły wszelkie próby tłumaczenia. Nie chodzi o to, aby nauczyciel „pozwalał" na tego rodzaju aktywność swoich uczniów, ale kreował na lekcji sytuacje wzbogacające doświadczenia uczniów w tym zakresie.

Rozważmy kolejny przykładowy problem: **Na ile sposobów możesz podzielić 9 kamyków na jednakowe kupki? Jak zmieni się liczba możliwych sposobów, jeśli dołożysz 3 kamyki? Zapisz te sposoby.**

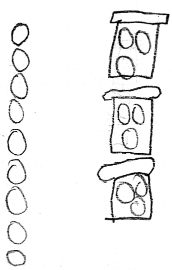
Cel tego ćwiczenia nie powinien być jedynie kojarzony z tematem: „Wprowadzenie dzielenia", choć niewątpliwie istotne są tu związki tego typu. Uczniowie nie tyle jednak powinni mieć możliwość „zilustrowania" wprowadzonego dzielenia, ile wielokrotnego manipulowania konkretami, **zanim** dzielenie zostanie wprowadzone.

Ważne jest nie tylko, aby uczniowie odpowiadali na pytania zawarte w zadaniu, ale również rozmawiali o tym i uzasadniali swoje hipotezy. Istotne dla kształcenia myślenia matematycznego młodszych uczniów jest więc całokształt doświadczeń i spostrzeżeń związany z manipulacjami inspirowanymi treścią zadania.

Proponując zajmowanie się sformułowanym powyżej problemem, możemy przyjrzeć się nieco bliżej procesowi rozwijania się w umysłach dzieci reprezentacji niektórych pojęć matematycznych. Uczniowie klasy drugiej najczęściej rysowali kupki kamyków w postaci kółeczek. Częściej niż ich starsi o rok koledzy odwoływali się do wyobrażeń związanych z realnymi przekształceniami.

Autor poniższego rozwiązania rysował „podzielone” kupki, ale łączył te czynności z mnożeniem. Rozumienie odwrotności obu działań konstruowało się w sposób naturalny w jego umyśle, również dzięki temu, że sposób zapisu nie był ograniczony tematem lekcji. Po pierwszej próbie zilustrowania własnych wyobrażeń zaczął korzystać z dużo bardziej zaawansowanej reprezentacji symbolicznej w „myśli” znajdując, jakie równe „kawałki” można uzyskać z liczby 12.

Zad 2. Na ile sposobów możesz podzielić 9 kamyków na jednakowe kupki?
Jak się zmieni liczba możliwych sposobów, jeśli dołożysz 3 kamyki?
Zapisz te sposoby.



$12 \cdot 1 = 12$ $\quad 6 \cdot 2 = 12$

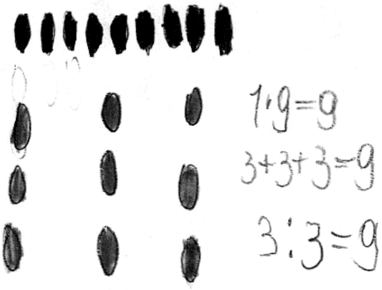
$4 \cdot 3 = 12$ $\quad 2 \cdot 6 = 12$

$3 \cdot 4 = 12$

$1 \cdot 12 = 12$

Inny uczeń klasy drugiej potrzebował dużo bardziej symulacyjnego rysunku, żeby wyobrazić sobie, w jaki sposób można kamyki rozdzielać. Widoczne są próby zapisu wyobrażanych manipulacji odpowiednie do poziomu rozumienia abstrakcyjnych operacji działań matematycznych. W ostatnim przykładzie błędnie wstawił znak działania, ale jego intencja wydaje się jasna. Dodawanie w sposób spontaniczny przekonstruował na mnożenie.

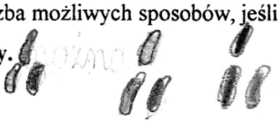
Zad 2. Na ile sposobów możesz podzielić 9 kamyków na jednakowe kupki?
Jak się zmieni liczba możliwych sposobów, jeśli dołożysz 3 kamyki?
Zapisz te sposoby.



W kolejnym przykładzie drugoklasisty widoczne są próby „zapisania” wyobrażeń jedynie za pomocą rysunku. Jest on bardzo realistyczny, odzwierciedla nawet kształt i kolory (widoczne w oryginale) fasolek, co wskazuje na dziecięcą potrzebę odwoływania się do konkretyzacji.

Ten uczeń prawdopodobnie słabo radzi sobie z abstrakcyjnym rozumieniem mnożenia i dzielenia. Być może jego doświadczenia związane z manipulowaniem nie pozwalają jeszcze na skonstruowanie symbolicznego rozumienia tych działań. Tym bardziej powinien zajmować się konkretami, badając zmiany zachodzące w relacjach matematycznych na skutek własnych przekształceń. Ich rozumienie pozwoli mu na nadawanie im znaczeń pojęciowych.

Zad 2. Na ile sposobów możesz podzielić 9 kamyków na jednakowe kupki?
Jak się zmieni liczba możliwych sposobów, jeśli dołożysz 3 kamyki?
Zapisz te sposoby.



Trzecioklasiści skonfrontowani z identycznym problemem częściej uruchamiali strategie myślenia formalnego.

Autor poniższego przykładu odsłania symboliczny sposób rozumienia działań. Przy badaniu 9 kamyków posługuje się dzieleniem. Jednak dodanie trzech kamyków zmienia nieco sytuację i tu bezpieczniej czuje się wyobrażając sobie kupki zapisane jako działanie mnożenia, które następnie jest przekonstruowane na dzielenie. W zaprezentowanej strategii ponownie można zaobserwować rozumienie związków między mnożeniem i dzieleniem. Sposób ich wykorzystywania wskazuje na samodzielne nadawanie znaczenia obu operacjom, które na końcu tego procesu pozwoli na sformułowanie zależności związanej z odwrotnością działań: mnożenia i dzielenia.

Zad 2. Na ile sposobów możesz podzielić 9 kamyków na jednakowe kupki?

Jak się zmieni liczba możliwych sposobów, jeśli dołożysz 3 kamyki?

Zapisz te sposoby. $9:3=3,\ 9:9=1$

$2 \cdot 6=12,\ 12:12=1 \quad 12:3=4$

$4 \cdot 3=12 \quad 12:4=3$

$12:6=2,\ 12:2=6$

W ostatnim przykładzie uczeń klasy trzeciej zaprezentował wysoki poziom myślenia abstrakcyjnego, zapisując od razu działanie dzielenia (wypisał w sensie matematycznym, jakie są dzielniki liczby 9 i liczby 12).

Zad 2. Na ile sposobów możesz podzielić 9 kamyków na jednakowe kupki?

Jak się zmieni liczba możliwych sposobów, jeśli dołożysz 3 kamyki?

Zapisz te sposoby.

$9:3=3 \qquad 12:2=6$

$9:9=1 \qquad 12:6=2$

$12:3=4$

$12:4=3 \qquad 12:12=1$

Rozwiązywanie zadań tego typu pomaga nauczycielowi odkryć, na jakim poziomie myślenia są jego uczniowie. Z przedstawionych przykładów wynika, że może on być bardzo zróżnicowany.

Niektórzy uczniowie próbowali narysować kamyki, ponieważ model bardziej zbliżony do desygnatu pomagał wyobrażać sobie przedstawioną w zadaniu sytuację. Choć polecenie kierowało w stronę zapisu symbolicznego, wielu uczniów używało rysunku. Działo się tak nie tyle z potrzeby liczenia na konkretach (wszyscy uczniowie w tej klasie dodawali i odejmowali w pamięci w zakresie dwudziestu), ile ze względu na nowość tak postawionego problemu.

W obliczu nieschematycznego zadania uczniowie próbowali nadać znaczenie relacjom między liczbami, wracając do wyobrażenia prawdziwych kamyków lub ich modeli. Sposób radzenia sobie przez uczniów z tego rodzaju przykładowym problemem wskazuje, jak istotne są doświadczenia manipulacyjne przed rozpoczęciem nauki w szkole, oraz w czasie pierwszych lat jej trwania. Ich niedostatek może bowiem ograniczać tworzenie się matematycznych pojęć, a w efekcie utrudniać rozwój użytecznej wiedzy matematycznej.

Dopiero uczniowie klasy trzeciej w większości nie potrzebowali rysunku, posługując się od razu symbolicznym zapisem. Zauważali oni zależności bez odwoływania się do wyobrażeń przedmiotów w postaci rysunku.

Przekonanie, że dzieci w pierwszej klasie powinny „odzwyczajać" się liczenia na konkretach, jest udziałem wielu nauczycieli wczesnej edukacji. Czasami deklarują, że w klasie pierwszej można jeszcze czasami uczniom na to pozwolić, ale już w drugiej tego typu „ułatwienia" postrzegane są jako odpowiednie jedynie dla uczniów o mocno obniżonych możliwościach intelektualnych. Zdarza się, że nawet w klasie pierwszej uczniowie chowają dłonie pod ławkę, aby przeliczyć na palcach. Ta procedura jest uruchamiana przez dziecko nie dlatego, że jest ono leniwe, ale ponieważ stanowi jedyną dostępną w tym momencie jego poziomowi myślenia. Jest bowiem oczywiste, że uczeń, który nawet ukradkiem korzysta z palców przy wykonywaniu obliczeń, nie dysponuje jeszcze reprezentacją symboliczną i musi mieć czas i możliwości, żeby ją skonstruować. Dostarczanie mu ćwiczeń w tym zakresie z pewnością pomoże pokonać ten próg, natomiast brak akceptacji nauczyciela dla spontanicznych sposobów radzenia sobie z trudnościami, może opóźnić proces rozwijania myślenia matematycznego ucznia.

Strategia tego typu nie jest również obca jednostkom dorosłym. Wielu z nas używa palców, na przykład, do przeliczania dni tygodnia. Kiedy chcemy sprawdzić, który dzień miesiąca będzie w następny wtorek, posługujemy się palcami. Stosujemy taką procedurę, ponieważ tak jest najłatwiej. Oczywiście moglibyśmy sobie poradzić na poziomie symbolicznym, po uświadomieniu reguły, według której można byłoby obliczyć w pamięci. Nie jest to skomplikowane zagadnienie, jednakże nie podejmujemy najczęściej takiego wysiłku. Wynika to przede wszystkim z faktu, że znajomość takiej zasady jest rzadko wykorzystywana. Sporadycznie pojawiające się sytuacje związane z koniecznością obliczeń tego typu, nie stanowią zachęty do podjęcia wysiłku ukształtowania abstrakcyjnej strategii obliczania w pamięci.

Żeby zupełnie rozwiać obawy niektórych dorosłych o „rozleniwienie" się uczniów, którzy „zbyt długo" korzystają z liczenia na konkretach, przyjrzyjmy się procesowi rozwijania się kompetencji obliczania prostych działań w zakresie np. dwudziestu.

Trzy typy reprezentacji: enaktywna, ikoniczna i symboliczna, tworzą się w umyśle jednostki w sposób uporządkowany właśnie w takiej kolejności. Kolejny poziom reprezentacji dodawania i odejmowania liczb musi więc poprzedzać reprezentacja niższego rzędu. Jednocześnie przejście na wyższy poziom myślenia pozwala korzystać z reprezentacji wcześniejszej. Rozwój poznawczy polega na tworzeniu reprezentacji i coraz ekonomiczniejszych strategii postępowania. Dodawanie „w myśli" jest z tego względu korzystniejsze od liczenia na palcach. Osiągnięcie więc umiejętności wykonywania działania „w pamięci" zostaje automatycznie używane przez jednostkę, jako ekonomiczniejsze niż liczenie na konkretach. „Przyzwyczajenie" się do takiej strategii dodawania nie jest więc możliwe[11].

Nauczycielska akceptacja potrzeby działania na konkretach nie powinna być efektem zgody rozumianej przez pryzmat niedostatku intelektualnego dziecka. Stanowić powinna raczej świadomą strategię proponowaną młodszym uczniom. Szczególnie w sytuacji nowej poznawczo, uczniowie muszą odwoływać się do aktywności konkretyzowania problemu. Z kolei próby negowania potrzeb dziecka w tym zakresie wydłużą jedynie proces rozwijania myślenia matematycznego, a czasami mogą go zahamować.

Trzeba więc zwrócić uwagę, że nauczyciele w klasach drugich i trzecich wprowadzając nowe pojęcia matematyczne, zbyt często akceptują sytuacje, w których uczniowie muszą poprzestać na gotowych rysunkach proponowanych przez autorów pakietu edukacyjnego. Korzystanie bowiem z ilustracji wymyślonych przez kogoś innego, nie jest tożsame z konstruowaniem własnych wyobrażeń „wyrosłych" z obserwowania realnych zmian.

[11] Również dlatego osoba dorosła będąca w normie intelektualnej nie wykonuje prostych działań na konkretach – w tym sensie „nie przyzwyczaiła się".

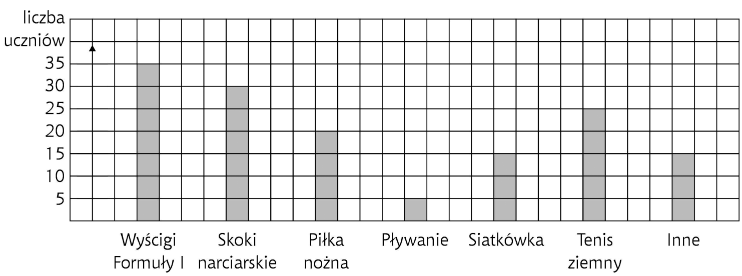
Uczniowie słabo sobie radzą z rozwiązywaniem zadań tekstowych, bo nie potrafią czytać ze zrozumieniem

Trudno temu twierdzeniu odmówić słuszności, choć jego wydźwięk nie jest tak jednoznaczny, jakby się wydawało. Znakomita większość uczniów potrafi czytać ze zrozumieniem teksty w czytankach, które składają się z kilku zdań (analogicznie do zawartości tekstowej zadania matematycznego). Nawet jeśli czynią to powoli, radzą sobie bez większych trudności.

Trzecioklasiści badani w 2008 roku mieli okazję odczytywać tekst połączony z diagramem słupkowym (jest to rodzaj ćwiczenia nadal rzadko pojawiającego się na lekcjach matematyki w klasach najmłodszych).

Ulubione dyscypliny sportu

Uczniowie postanowili zaprosić do swojej szkoły najbardziej lubianego przez nich sportowca. Zaczęli od sprawdzenia, jaka dyscyplina sportu jest wśród nich najpopularniejsza. Każdego ucznia zapytano o jego ulubioną dyscyplinę. Wszystkie odpowiedzi przedstawiono na rysunku:



a) Jaka dyscyplina sportu okazała się najbardziej popularna?

b) Ilu uczniów wybrało piłkę nożną?

c) Którą z tych dyscyplin wybrało 25 uczniów?

d) Którą dyscyplinę: skoki narciarskie czy siatkówkę wybrało więcej uczniów? O ilu więcej?

e) Które dwie dyscypliny wybrało łącznie 50 uczniów?

f) Ilu razem uczniów podało swoją ulubioną dyscyplinę?

Odpowiedź: ....

Odpowiedź na pytania związane z tekstem i diagramem okazały się nietrudną czynnością. Dzieci świetnie poradziły sobie z trzema pierwszymi pytaniami, uzyskując poprawność na poziomie średnio 83,1%. Również w zakresie odpowiedzi na pozostałe pytania trzecioklasiści wykazywali się niezłymi umiejętnościami. Ta odmienna od typowych, codziennie rozwiązywanych w szkole zadań sytuacja, nie wygenerowała szczególnych trudności w zakresie rozumianego tekstu. Był on znacznie dłuższy (choćby w zakresie liczby stawianych pytań) niż typowe zadanie tekstowe, nie stanowił jednak bariery dla polskich trzecioklasistów. Uzyskali oni dla każdego podpunktu średni wynik aż **66%** poprawnych odpowiedzi.

Tymczasem poprawne rozwiązanie typowego zadania tekstowego: **W kinie są dwie sale. W pierwszej są 122 miejsca, a w drugiej jest o 35 miejsc więcej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?** podało jedynie **47,9%** badanych uczniów. Obliczenia do tego zadania były na poziomie zbliżonym do tych, które były konieczne w zadaniu z diagramem, wyniki jednak okazały się dużo niższe.

Interesujące wydaje się również zestawienie wyników uzyskanych przez trzecioklasistów badanych w 2008 roku dotyczących dwóch kolejnych zadań:

A. Ewa i Piotrek zbierali w parku kasztany. Ewa zebrała ich 30, a Piotrek o 6 mniej. Ile kasztanów zebrał Piotrek?

B. Adam narysował szlaczek złożony z kółek, trójkątów i kwadratów. Kółek narysował 50. Trójkątów było o 7 więcej, a kwadratów o 14 mniej niż kółek. Ile kwadratów narysował Adam?

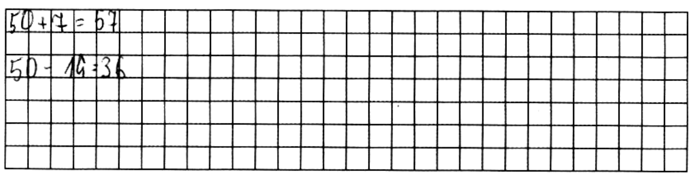
Aż 89,4% badanych uczniów poprawnie podało rozwiązanie w zadaniu **A**. Wydaje się, że tego typu zadania uczniowie czytają ze zrozumieniem i dokładnie. Jednakże wyniki uzyskane w zadaniu **B** powinny osłabić nasze zadowolenie. Tym razem poprawnie rozwiązało zadanie jedynie 48,9% badanych uczniów. Trudno jako wyjaśnienie przyjąć tu nagłe pogorszenie się umiejętności czytania uczniów. Musi tu działać inny mechanizm, który szczegółowo zostanie opisany w następnym rozdziale.

Interesujący w tym kontekście może być również fakt, że ponad jedna czwarta badanych trzecioklasistów (26,9%) zastosowała podobną, choć błędną strategię, polegającą na zapisaniu takiego działania, które wykorzystuje wszystkie liczby z tekstu zadania **B**, na przykład:

Z wysoką precyzją korzystania z matematycznych symboli uczeń zapisał rozwiązanie w jednym zapisie. Trudno oprzeć się wrażeniu, że strategia tego ucznia polegała właśnie na „uważnym" czytaniu tekstu, szukaniu kolejnych danych oraz zapisywaniu ich za pomocą formuły matematycznej.

Analogiczna strategia była początkiem pracy innego ucznia nad tym samym zadaniem. W tym przypadku jednak dziecięca świadomość relacji między danymi w tym zadaniu, pozwoliła mu w porę wycofać się błędnego myślenia. Głębokie rozumienie przez ucznia matematycznych operacji ukrytych w tekście zadania wygenerowało poprawne rozwiązanie, choć w pierwszym momencie „dał się on ponieść" schematyzacji czytania i rozwiązywania tego typu zadań.

6. **Adam narysował szlaczek złożony z kółek, trójkątów i kwadratów. Kółek narysował 50. Trójkątów było o 7 więcej, a kwadratów o 14 mniej niż kółek. Ile kwadratów narysował Adam?**



Odpowiedź: Adam narysował 36 kwadratów

Obaj uczniowie doskonale poradzili sobie z nadaniem matematycznych znaczeń opisanym w zadaniu operacjom. Wiedzieli, jakie działania należy zastosować. Czytali więc „uważnie", choć ta umiejętność okazała się warunkiem niewystarczającym do prawidłowego rozwiązania zadania.

Przyjrzyjmy się zadaniu, które jest dobrym przykładem do zwrócenia uwagi na istotność zagadnienia. Brzmi ono następująco: **Cegła waży kilogram i pół cegły. Ile waży cegła?** Każde z użytych tu słów jest nam dobrze znane, wiemy nawet, że chodzi o ważenie jakiegoś przedmiotu. Przeczytaliśmy więc tekst zadania ze zrozumieniem. Nie wystarczy to jednak do jego rozwiązania. Nie jest to bowiem jedyny warunek, równie istotne (a może nawet najważniejsze w większości typów zadań prostych i złożonych) wydaje się umiejętność „wyłuskania" z treści informacji niezbędnej do zidentyfikowania operacji matematycznej. Pobawmy się teraz abstrakcyjnymi historyjkami, które nie mają nic wspólnego z rzeczywistym światem.

Przykładowe zadanie: **Siedem Garwoli trumaniło w radorze, a 14 w komendorze. Ile Garwoli było razem?** na pierwszy rzut oka jawi się, jako mało zrozumiałe. „Bohaterowie" historyjki w żaden sposób nie stanowią postaci nam znanych. Jednakże nie mamy wątpliwości, jakie działanie będzie tu zastosowane. Zadanie może zostać rozwiązane ze względu na rozumienie roli słów opisujących działanie do wykonania. Szkielet sytuacji stanowi opis: „Tyle czegoś i jeszcze tyle czegoś, to razem będzie…". Słowo „razem" stanowi w tym kontekście klucz do zastosowania dodawania.

Nieco inaczej wygląda sytuacja w przykładzie drugim: **Marek obrągolił 16 flatarkowek, pumerając 7 Ani. Ile mają razem flatarkowek?** Brak rozumienia czasowników determinujących działanie uniemożliwia rozwiązania zadania (a w każdym razie budzi wątpliwości co do poprawności ewentualnego rozwiązania).

W przypadku więc, gdy w treści pojawiają się niezrozumiałe słowa, ale nie zaburza to możliwości rozumienia relacji między liczbami, dzieci rozwiązują zadanie bez większych problemów, jeśli natomiast niemożliwy do zidentyfikowania jest rodzaj operacji matematycznej, zadanie nie może być rozwiązane. Jeśli uczeń zidentyfikuje operację do wykonania i przełoży ją na język matematyki, będzie potrafił rozwiązać zadanie.

Czytanie zadania matematycznego jest więc dużo bardziej skomplikowaną aktywnością intelektualną niż tylko dekodowanie słów. Większość trudności uczniów z rozwiązywaniem zadań tekstowych ma złożony charakter, a ich źródłem są najczęściej zupełnie inne czynniki niż niska umiejętność czytania ze zrozumieniem tekstów pisanych.

Czytanie treści zadania nie może więc być traktowane jako tożsame z czytaniem innych tekstów. Kompetencja ta zawiera w sobie bowiem konieczność matematyzowania historyjki opisanej treścią zadania, czyli przełożenia jej na język operacji matematycznych (mających swój początek, jak trzeba pamiętać, w czynnościach wykonywanych w rzeczywistości).

Jeśli chcemy, aby uczniowie opanowali umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych, musimy przerobić z nimi dużą liczbę typowych zadań

Mit wyrażony w powyższym stwierdzeniu związany jest z prostym przełożeniem zależności: *jeśli coś ćwiczymy, to umiemy to lepiej*. Trudno odmówić racji takiemu uzasadnieniu. Jeśli jednak spojrzymy nieco szerzej i zastanowimy się, w jakim celu dzieci uczą się rozwiązywać zadania, musimy dostrzec, że argumenty nie są tak jednowymiarowe.

Zacznijmy od pytania, czym jest zadanie tekstowe. Nauczyciele pytani o to, najczęściej zwracali uwagę na istnienie danych i szukanych liczb w zadaniu. Mówili również o wartości historyjki zawartej w treści w aspekcie możliwości większego zainteresowania ucznia. Zadanie tekstowe bywa również, zdaniem niektórych nauczycieli, swego rodzaju kluczem do rozwiązywania rzeczywistych problemów.

Stwierdzenie będące tytułem niniejszego rozdziału było jednym z wielu, do których ustosunkowywali się nauczyciele wczesnej edukacji w badaniach umiejętności trzecioklasistów[12]. Ponad trzy czwarte badanych nauczycieli (76,2%) akceptowało je, wyrażając tym samym opinię o znaczącej roli zadań typowych w nauczaniu matematyki najmłodszych uczniów. Większość nauczycieli deklarowała pogląd, że umiejętność rozwiązywania zadań typowych jest funkcją liczby zadań tego typu przerobionych na lekcjach.

Akceptacja tego przekonania byłaby prosta, gdyby nie wątpliwości związane z jego negatywnymi dla myślenia uczniów aspektami. Przyglądając się temu zjawisku bliżej, spróbujmy przeanalizować strategie radzenia sobie uczniów podczas rozwiązywania zadań typowych.

W badaniach umiejętności językowych i matematycznych w 2008 roku[13] uczniowie klas trzecich (a więc ci, którzy przeszli trzyletni trening w rozwiązywaniu zadań typowych) rozwiązywali następujące zadania dotyczące porównywania różnicowego.

A. W kinie są dwie sale. W pierwszej są 122 miejsca, a w drugiej o 35 miejsc więcej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

---

[12] Por. M. Dąbrowski (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa 2009.

[13] Por. Tamże.

B. W kinie są dwie sale. W pierwszej jest 146 miejsc, a w drugiej o 34 miejsca mniej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

Nauczyciele pytani o to, które zadanie będzie rozwiązane przez większą liczbę uczniów, zdecydowanie typowali zadanie **A**, w ich pojęciu łatwiejsze, ponieważ występuje w nim dodawanie.

Badani trzecioklasiści uzyskali wyniki zdecydowanie odmienne od przypuszczeń nauczycieli wczesnej edukacji. Zadanie **B** rozwiązało poprawnie 65% wszystkich uczniów, natomiast zadanie **A** zdecydowanie mniej – 47,9%. M. Dąbrowski zwraca uwagę na tę dysproporcję wysuwając hipotezę, że przyczyna związana jest **ze sposobem czytania** zadania tekstowego przez wielu uczniów w klasach najmłodszych (i trzeba wyraźnie powiedzieć, że w starszych również).

W podanym przykładzie podobny odsetek uczniów poprawnie rozpoczął rozwiązywanie obu zadań. Jednak w przypadku zadania **B** uczniowie dodali jeszcze jedno działanie, uzyskując poprawny wynik, a w zadaniu **A** aż 17,1% tego nie uczyniła. Dlaczego? Być może to właśnie kluczowe słowo „łącznie" występujące w obu zadaniach było przyczyną niepoprawności wielu rozwiązań. Sugerowało ono bowiem dodawanie, jednak część uczniów rozwiązujących zadanie **A,** analizując swoje obliczenia, ujrzało już wykonane dodawanie (w pierwszym działaniu) i na tym poprzestało[14].

Być może więc dla wielu uczniów klas najmłodszych rozwiązywanie tekstowych zadań matematycznych prostych i złożonych (jednodziałaniowych oraz wielodziałaniowych, pozwalających rozłożyć się na kilka zadań prostych) polega przede wszystkim na „wyłapaniu" danych i szukanych liczb oraz szkieletu sytuacji operacyjnej, która pozwoli zidentyfikować jej rodzaj w postaci działania matematycznego. Być może jest to strategia dość skuteczna i nieczęsto podlegająca weryfikacji ucznia.

Przykład rozwiązania ucznia klasy trzeciej odsłania właśnie taką strategię „wyłapywania" danych liczbowych. Choć w treści zadania informacji jest dużo więcej, autor przytoczonego rozwiązania zauważył jedynie te, które zapisane zostały za pomocą cyfr. Dobrał więc działanie najbardziej, jego zdaniem, pasujące do fragmentarycznie poznanej treści.

[14] Tamże, s. 115.

6. W klasie III każdy chłopiec ma jedną albo dwie piłki. Piłkę do gry w nogę ma 10 chłopców, a piłkę koszykową ma 9. Czterej chłopcy mają obie piłki. Ilu chłopców jest w tej klasie?

~~10 - 3~~

8

10 - 9 = 1

Odpowiedź: W tej klasie ~~jest~~ jest 1 chłopiec

Nauczyciele deklarują często podobne obserwacje dotyczące radzenia sobie z zadaniami tekstowymi własnych uczniów. Niestety, traktują je jedynie jako rodzaj świadomego lenistwa uczniów oraz ich niskiej motywacji do pracy. Tego rodzaju wyjaśnienie może uspokoić i zachęcać do szukania sposobów poprawy sytuacji w zwiększaniu liczby przerabianych zadań typowych z jednoczesnym intensyfikowaniem motywacyjnych „zachętek" (typu „słoneczka" czy „uśmiechnięte buzie"). Brak głębszej nauczycielskiej analizy źródła popełnianych przez uczniów błędów może skutkować wzmocnieniem przekonania tych ostatnich co do skuteczności takiej strategii.

Jedną z przyczyn konstruowania strategii „wyłapywania" w umyśle jest konieczność rozwiązywania kilku zadań na lekcji, które łatwo identyfikuje się (zadanie „na dodawanie"), a dodatku nie stanowią najmniejszego wyzwania intelektualnego dla uczniów.

Poniżej zamieszczono przykłady zadań, które mogłyby pojawić się na lekcji:

Olek miał 10 złotych. Wydał 6 złotych. Ile pieniędzy mu zostało?

I następne wersje tego zadania:

Olek miał 10 złotych. Kupił książkę za 6 złotych. Ile pieniędzy mu zostało?

Olek miał 10 złotych. Wydał 4 złote. Ile pieniędzy mu zostało?

Olek miał 6 złotych. Kupił siostrze prezent za 4 złote. Ile pieniędzy mu zostało?[15]

[15] Przykład zadań zaczerpnięty z pozycji: K. Wojciechowska, *Zadania tekstowe w kształceniu zintegrowanym. Jak pomagać dzieciom budować i rozwiązywać zadania tekstowe*. Opole 1007, s. 21.

Strategia pojawiająca się w kolejnych wersjach wydaje się oczywista dla kogoś, kto potrafi poradzić sobie z tego typu trudnością arytmetyczną – szukamy liczb oraz słowa kluczowego umieszczonego w pytaniu. Dokładnie tak samo postępują uczniowie, dla których tego typu zadania nie stanowią trudności intelektualnej. W obecnych klasach pierwszych (szczególnie miejskich) takich uczniów jest całkiem sporo. Strategia „wyłapywania" okazuje się naturalnym sposobem postępowania w konfrontacji z łatwym zadaniem.

Przedstawione zadania proste łączy podobny szkielet konstrukcyjny. Czytając kolejne zadania, przestaliśmy zastanawiać się dokładnie, jaka historyjka je tworzy. Łatwiej jest raczej „rzucając okiem" ustalić typ zadania oraz rodzaj działania potrzebnego do obliczenia liczby, będącej odpowiedzią na postawione pytanie. Większość z nas pewnie właśnie tak postępowała. Uczniowie rozwiązujący wiele typowych zadań konstruują podobne strategie. W kolejnych zadaniach typowych starają się dobrze „dobrać" działanie i poprawnie je obliczyć. Uruchamiają więc jedynie umiejętności tożsame z obliczaniem samych działań.

Intelektualna korzyść uczniów rozwiązujących wiele zadań typowych sprowadza się w efekcie do ćwiczeń obliczeniowych. Uczniowie nie kształcą myślenia matematycznego, ale przede wszystkim umiejętności rachunkowe. Podobny skutek byłby zapewne w przypadku wykonania samych działań arytmetycznych.

Często zdarza się więc, że zadania typowe pełnią tylko jedną z wielu przypisywanych im ról[16]: służą do ćwiczeń rachunkowych. Nie ma w tym nic złego, jeśli nauczyciele są tego faktu świadomi. Jednak deklaracje nauczycielskie wskazują raczej na przypisywanie rozwiązywaniu zadań typowych większego znaczenia w rozwijaniu wiedzy matematycznej uczniów.

Przedstawione poniżej rozwiązanie zadania wykonane przez ucznia klasy trzeciej ujawnia podobną strategię postępowania. Uczeń zakreślił dane przekonany, że wystarczy je wskazać i wykonać na nich działanie.

[16] Dydaktycy matematyki wczesnoszkolnej podają wiele szerzej rozumianych funkcji zadań tekstowych w rozwoju myślenia uczniów, jak na przykład M. Cackowska, która wymienia między innymi: kształtowanie i pogłębianie rozumienia pojęć matematycznych dzięki wiązaniu ich z sytuacjami praktycznymi, utrwalanie i pogłębianie umiejętności obliczeniowych, twórcze wykorzystanie poznanych praw matematycznych, kształcenie logicznego myślenia. Zdaniem innych (S. Turnau, M. Potemkowska) zadania typowe (szczególnie te posiadające jedno rozwiązanie) postrzegane są najczęściej jako rodzaj ćwiczeniowych przykładów, mających również na celu zapoznanie uczniów ze strukturą zadania tekstowego. Rola zadań, które nie są problemami (proste i złożone), polega przede wszystkim na wyćwiczeniu umiejętności rachunkowych w celu zdobycia wprawy w rozwiązywaniu danego typu zadania lub na wyćwiczeniu określonego rodzaju działań w rachunku pamięciowym.

Następnie chciał zidentyfikować szkielet operacyjny, czyli „dopasować” działanie. Czasownik „sprzedano” zasugerował odejmowanie, więc dokonał takich obliczeń.

6. Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

16 - 9 = 7

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 7kg.

Konstrukcja zadania nie odsłania w sposób oczywisty operacji do wykonania, co stwarza naturalną trudność. Sukces w przypadku tego zadania mogłaby zapewnić dokładna analiza sytuacji, wsparta wyobrażeniem sobie całej „historii” zawartej w tekście zadania. Ten uczeń (i niestety wielu innych) wypracował jednak wcześniej inną strategię, która tu okazała się nieskuteczna. W tym kontekście przekonanie, że umiejętność rozwiązywania wielu podobnych zadań pozwoli radzić sobie z każdym zadaniem, może okazać się dodatkową barierą poznawczą dla uczniów.

Jednym z najważniejszych aspektów myślenia matematycznego jest szukanie i dostrzeganie analogii. Jest to możliwe wówczas, gdy uczeń ma sposobność do **samodzielnego tworzenia modeli relacji matematycznych** w zadaniach tekstowych. Ponieważ jednak uczniowie głównie rozwiązują zadania, których schemat rozwiązania jest zbyt łatwy albo podany w gotowej postaci przez nauczyciela, nie radzą sobie, gdy typ zadania jest nierozpoznawalny.

Przykładowe zadanie tekstowe: **Z dwóch fontann wypływa 400 litrów wody na minutę. Z mniejszej fontanny wypływa 80 litrów na minutę a z drugiej 4 razy więcej. Jaka ilość wody wypływa w ciągu minuty z każdej fontanny?** jest trudne przede wszystkim dlatego, że uczniowie nie potrafią zidentyfikować, „na co jest to zadanie”. Nie potrafią również stworzyć modelu matematycznego[17], ponieważ nie mają okazji do ćwiczenia takiej strategii na lekcjach.

[17] Na marginesie muszę dodać, że prawie połowa studentów wczesnej edukacji nie potrafi samodzielnie rozwiązać tego zadania, ponieważ nie mogą sobie wyobrazić żadnego modelu opisującego relacje między liczbami. Część z nich, nawet po wielu ćwiczeniach poprzestaje na próbach opanowania identyfikacji zadania i przypomnienia sobie schematu, który wówczas brzmi mniej więcej tak: *Aha, to wiem, trzeba całą wodę podzielić na cztery plus jeden, czyli 5.* Na pytanie, dlaczego właśnie tak, odpowiadają najczęściej: *Bo tak było, Bo tak robiliśmy*. Zapamiętali algorytm postępowania, choć zupełnie nie rozumieją, dlaczego tak właśnie on wygląda.

Nawet wówczas, gdy nauczyciel wyjaśni, jak powinni rozwiązać to zadanie, wielu uczniów nadal nie rozumie, **dlaczego właśnie takie** formuły matematyczne należy zapisać. Podany przez nauczyciela model nie stanowi bowiem wiedzy wyrosłej z samodzielnego badania sytuacji z zadania zakończonego ukształtowaniem jej symbolicznej reprezentacji.

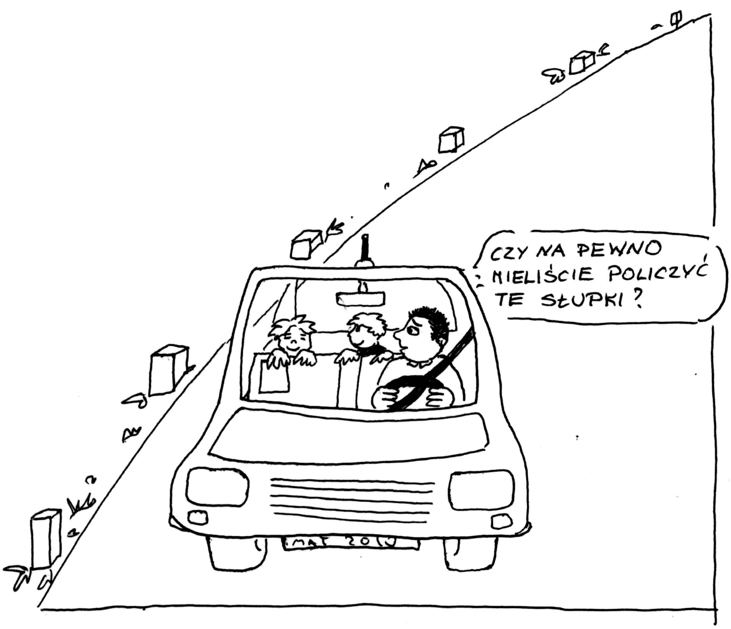
Uczniowie w konfrontacji z takim zadaniem próbują sobie radzić, uruchamiając znane sobie strategie identyfikowania typu zadania, starając się zapamiętać sposób postępowania w sytuacji, gdy w zadaniu występują kluczowe słowa, na przykład: „jeden większy od drugiego ileś razy, a razem…” . Jednakże jest to strategia o bardzo krótkim żywocie i po krótkim czasie zapomniana. Wówczas zadanie analogiczne w sensie modelu matematycznego: **Syn jest 3 razy młodszy od ojca. Obaj mają 52 lata. Ile lat ma każdy z nich?** okazuje się ponownie nie do rozwiązania.

Wprowadzanie przez nauczyciela sposobów rozwiązywania kolejnych typów zadań nie generuje więc potrzeby uczniów do szukania analogii. Do rozpoznania typu zadania wystarczy bowiem identyfikacja algorytmu do zastosowania, nawet bez zrozumienia, dlaczego jest on właśnie taki.

Inaczej mówiąc: rozpoczynanie zapoznawania uczniów z różnymi zadaniami matematycznymi od tłumaczenia i wyjaśniania, „jak to się robi”, eliminuje ich potrzebę dostrzegania analogii między relacjami matematycznymi. Uruchamiany zostaje przede wszystkim mechanizm zapamiętywania algorytmu oraz budowania strategii rozpoznawania „na co jest to zadanie”. W ten sposób uczniowie zapewniają sobie pewien zakres bezpieczeństwa funkcjonowania na lekcjach matematyki często utożsamiając umiejętność identyfikacji algorytmu z myśleniem matematycznym.

Już dzieci w klasie pierwszej w sytuacji, gdy nie mogły odkryć operacji koniecznej do rozwiązania zadania, próbowały przyporządkować znany schemat. Wielokrotnie obserwowałam, jak uczniowie rozwiązujący zadanie: **W rodzinie Kowalskich jest dwóch synów. Każdy z nich ma siostrę. Ile dzieci jest w tej rodzinie?**, pytali: *A to zadanie jest na dodawanie czy odejmowanie*? (w zależności od aktualnie wykonywanych na lekcji obliczeń). W przytoczonym powyżej zadaniu ugruntowany schemat, który utworzył się w efekcie wielokrotnych doświadczeń uczniowskich, okazał się jednak nieskuteczny. Niemożność zidentyfikowania algorytmu koniecznego do rozwiązania zadania skutkował więc bezradnością uczniów.

Rozwiązywanie przez uczniów wielu typowych zadań generuje często strategie, które mogą okazać się przyczyną niepowodzeń w klasach starszych. Ten problem jest szczególnie istotny w przypadku uczniów, którzy rozpoczynają edukację matematyczną w szkole, radząc sobie z pamięciowymi działaniami dodawania i odejmowania w zakresie dziesięciu. Właśnie ci uczniowie szybko się orientują, że wiele przerabianych na lekcji zadań nie wymaga tracenia czasu i wysiłku na bardzo uważne czytanie. Sukces zapewnia orientowanie się w kluczowych słowach. Dodatkowym niebezpieczeństwem stosowania takiej strategii może więc okazać się bezradność wobec zadania poznawczo nowego, ponieważ nie da się w nim zidentyfikować operacji do wykonania, a przede wszystkim nie da się jej wskazać po pobieżnym czytaniu. Uczeń, dla którego ten sposób okazywał się do tej pory wystarczająco skuteczny, doświadcza niepokoju o własne kompetencje. W efekcie niechętnie próbuje swoich sił z innymi (nietypowymi) zadaniami, uważając je za zbyt trudne.



Na lekcjach nie ma czasu na zajmowanie się problemami matematycznymi

Akceptacja przez wielu nauczycieli tego stwierdzenia jest generowana z jednej strony przez mityczne przekonanie o konieczności zapełniania wszystkich bez wyjątku kart pracy ucznia. Z drugiej strony natomiast istnieje opinia, również o mitycznym charakterze, że zajmowanie się problemami matematycznymi możliwe jest po zrealizowaniu jakiejś partii materiału, gdy uczniowie poznali już pewne pojęcia matematyczne i wówczas dopiero mogą je wykorzystywać twórczo.

Rzeczywiście, zrealizowanie całego materiału ćwiczeniowego proponowanego w pakiecie edukacyjnym zakrawa na niemożliwość. Kart z ćwiczeniami, zeszytów z dodatkowymi zadaniami utrwalającymi itp., jest tak dużo, że na wypełnienie wszystkich ledwo starcza czasu. W ferworze takich działań zapomina się o istnieniu innych treści i zagadnień matematycznych, które można by zaproponować uczniom.

Założenie na początku roku szkolnego takiego sposobu „realizowania programu nauczania", z góry skazuje na porażkę próby oderwania się od tego schematu. Wielu nauczycieli, z którymi rozmawiałam, argumentowało konieczność takiego podporządkowania swoich zajęć wytycznym pakietu edukacyjnego naciskiem rodziców. Zdaniem nauczycieli, wymuszają oni konieczność przerabiania wszystkich zadań po kolei w trosce o prawidłowe wykorzystanie pieniędzy ulokowanych w zakupie podręczników.

W ten sposób dochodzi nagminnie do sytuacji, gdy przedmiotem troski dorosłych staje się nie dziecko, ale zysk wydawnictw. Odpowiadają one na zapotrzebowanie nauczycieli w drukowaniu całościowych pakietów z dokładnością niemalże do każdego dnia. Jedna z nauczycielek, która dzieliła się ze mną pomysłem na zmianę programu (i całego pakietu) argumentowała to następująco: *W starym to mam temat na każdy dzień, a w tym nowym mam w każdym miesiącu jeden tydzień dla siebie (sic!), jak jestem chora, czy wypadną dni świąteczne, to mogę nadgonić.* Należałoby się zapytać, jaka jest jej wizja edukacyjna? Czy można tu mówić o podporządkowaniu, czy raczej zniewoleniu dydaktycznym?

Problemy matematyczne, czy szerzej – zadania nietypowe – wymagają myślenia koncepcyjnego uczniów, ponieważ ich struktura nie pozwala na automatyczne zidentyfikowanie działania na podstawie kluczowego słowa zawartego w treści. Proces rozwiązywania zmusza więc ucznia do samodzielnego konstruowania modelu rozwiązania.

Z badań wynika[18], że ponad cztery piąte nauczycieli wczesnej edukacji (83,5%) jest zdania, że: *Uczniowie w tym wieku mogą już samodzielnie wymyślać metody rozwiązywania zadań tekstowych.* Jednocześnie jednak akceptują konieczność codziennej pracy uczniów, której najsilniej odciskającym się aspektem jest odtwórczość. Wysoki odsetek (78,3%) badanych nauczycieli klas najmłodszych[19] deklaruje bowiem przekonanie, że ich *podstawowym zadaniem jest tłumaczenie uczniom, w jaki sposób rozwiązuje się matematyczne zadania różnych typów*.

Akceptacja własnej roli, rozumianej przede wszystkim jako „dającego" wiedzę, sytuuje nauczyciela w centrum intelektualnego wysiłku wykonywanych w klasie czynności matematycznych. Nauczyciel jest wówczas nastawiony na konieczność niesienia natychmiastowej pomocy uczniowi, który nie podjął próby rozwiązania zadania. Taka sytuacja budzi bowiem w nauczycielu silny niepokój tłumiony wiarą, że pokazanie uczniowi, „jak to zrobić", będzie źródłem zadowolenia tego ostatniego.

Wielokrotne tłumaczenie uczniom, jak rozwiązuje się zadania różnego typu, stanowi więc kluczowy sposób myślenia nauczyciela o własnej aktywności. Stanowi ona podstawę pracy na lekcjach matematyki. W sposób naturalny pojawia się więc wniosek (często nawet nie do końca uświadomiony), że zadania typowe wymagają bardzo dużo czasu i wkładu pracy zarówno nauczyciela jak i uczniów. Nie ma go tym samym dla zadań nietypowych, zdaniem nauczycieli, trudniejszych.

Źródeł takiego podejścia można poszukiwać w silnie zakotwiczonej w praktyce nauczyciela pewności, że najważniejszy jest program i jego egzemplifikacja - pakiet podręcznikowy. Jeśli w propozycji wybranej przez nauczyciela pojawią się zadania nietypowe, wówczas ich rozwiązywanie jest usprawiedliwione i można pozwolić uczniom spróbować. Jednak bywa, że nawet wówczas sposób zajmowania się nimi na lekcji nie różni się od schematycznego przekazywania wiedzy. Najczęściej rozwiązywanie zadania problemowego odbywa się wspólnie z nauczycielem, który świadom jego większej trudności, tym bardziej stara się uczniom wyjaśnić, najczęściej z mało satysfakcjonującym skutkiem.

[18] M. Dąbrowski (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów ...,* dz. cyt.
[19] Tamże.

Wielu nauczycieli po kilku takich doświadczeniach przyjmuje za pewnik, że zadania problemowe są jedynie dla najzdolniejszych uczniów. W dodatku, ci ostatni również odnoszą się do zadań nietypowych z coraz bardziej ograniczonym entuzjazmem, obawiając się porażki. Dość szybko więc nauczyciele tracą wiarę w sens zajmowania się tymi zadaniami na zajęciach standardowych, uspokajając swoje sumienie propozycjami pozalekcyjnymi.

Ponieważ trudno jest zadania nietypowe wpisywać w algorytmiczne sposoby postępowania, uznaje się często, że szkoda czasu na zajmowanie się zagadnieniami postrzeganymi jako ponadprogramowe i zbyt trudne. W związku z tym wielu nauczycieli traktuje jako absolutny priorytet rozwiązywanie jedynie typowych zadań na lekcjach matematyki.

Zadania nietypowe przedstawiane są często w podręcznikach jako zagadki, ciekawostki, a ich rola jest również przez autorów postrzegana jednowymiarowo. Tymczasem tego rodzaju „dodatki" mogą stanowić jedynie drobny margines znaczenia zadań nietypowych w rozwoju dziecięcego myślenia matematycznego.

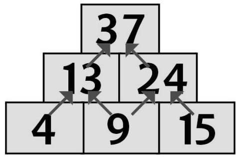
Zadania te mogą być na przykład okazją do tworzenia matematycznych intuicji, szerokiego wachlarza reprezentacji pojęć. Wiele zadań rozwija rozumienie roli liczb w działaniach. Taki przykładem może być następujący problem: **Dodaj do siebie liczby 5 i 9. Jak zmieni się suma, jeśli pierwszy składnik zwiększysz o 3?** Uczniowie mogą badać zależności na przedmiotach, tworząc w umysłach wyobrażenia związane ze zmianami wprowadzanymi w liczbach. Takie doświadczenia pomagają zrozumieć, co znaczy na przykład „o 3 więcej". Uczeń, nawet w sposób nie do końca świadomy, ma szansę dostrzec: *Aha, to muszę mieć* ***tyle samo*** *i jeszcze trzy.*

Jeśli dziecko utożsamia to pojęcie jedynie z działaniem dodawania, jego rozumienie porównania różnicowego ma ograniczony zakres. **Wyobrażenia** dotyczące relacji między wielkościami (nieograniczone jedynie do wywoływania odpowiedniego działania na hasło „więcej o…") mają duże znaczenie, na przykład dla rozwiązywania zadania: **Na pierwszej półce stoi o 3 książki więcej niż na drugiej. Na obu półkach jest 17 książek razem. Ile książek jest na każdej z półek?**

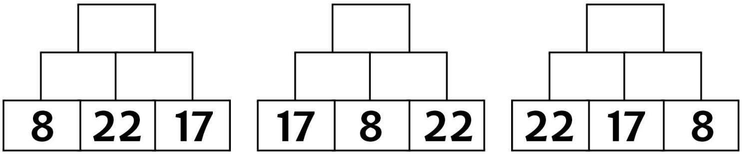
Problemy matematyczne stanowić mogą materiał do samodzielnego prowadzenia badań nad relacjami matematycznymi i nadawania im osobistych znaczeń.

Poniżej zaprezentowano zadanie, którego rozbudowana struktura umożliwia stawianie hipotezy, jej weryfikowanie oraz zauważanie prawidłowości:

a) Przyjrzyj się tej piramidce. Zwróć uwagę na to, jak się wypełnia takie piramidki.



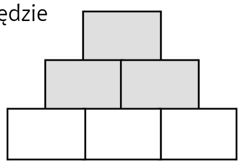
Wypełnij w ten sposób te trzy piramidki:



b) Co łączy te trzy piramidki?

c) A czym się one różnią?

d) Jak należy wpisać liczby: 6, 9 i 33 w dolnym rzędzie piramidki, żeby górna liczba była jak największa? Wpisz je w ten sposób w dolny rząd tej piramidki:

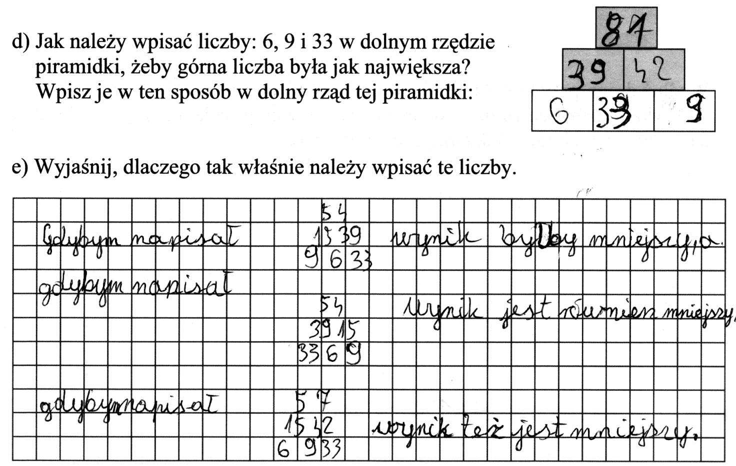


e) Wyjaśnij, dlaczego tak właśnie należy wpisać te liczby.

Rozwiązując tego rodzaju problem matematyczny, uczniowie mają okazję do odkrywania relacji, których wcześniej nie uświadamiali sobie. Poszukiwania tego rodzaju zależności pomagają eliminować na przykład łatwe i nieskuteczne tu skojarzenia związane z przemiennością dodawania. Samodzielne odkrywanie matematycznych znaczeń buduje świadomość uczniów, czym jest rozumienie i myślenie matematyczne. Uczy ich, że najważniejsze jest wiedzieć, „dlaczego tak się dzieje”, zupełnie odmiennie, niż wówczas, gdy rozwiązując typowe zadania próbują przypomnieć sobie, „jak to było robione”.

W całym procesie zajmowania się tego typu problemem niezwykle istotne jest również, że aktywność uczniów wypełniona jest niejako „przy okazji” koniecznością wykonania wielu obliczeń. Nie pełnią tu jednak roli długiego łańcucha nudnych i prostych przykładów „na dodawanie” zadanych ćwiczeniem z podręcznika, ale stanowią naturalną potrzebę ucznia, który musi im się przyglądać, decydując samodzielnie, które przykłady są mu potrzebne i stanowią potencjalne źródło odkrycia.

W podanym niżej przykładzie uczeń wykonał obliczenia dodatkowe, uzasadniając swój wybór.


d) Jak należy wpisać liczby: 6, 9 i 33 w dolnym rzędzie piramidki, żeby górna liczba była jak największa? Wpisz je w ten sposób w dolny rząd tej piramidki:

87
39 42
6 33 9

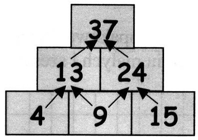
e) Wyjaśnij, dlaczego tak właśnie należy wpisać te liczby.

Gdybym napisał 54 / 15 39 / 9 6 33 wynik byłby mniejszy.
gdybym napisał 54 / 39 15 / 33 6 9 wynik jest również mniejszy,
gdybym napisał 57 / 15 42 / 6 9 33 wynik też jest mniejszy.

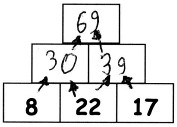
Trzecioklasista, który jest autorem powyższego rozwiązania, dokonywał wielu obliczeń, ćwicząc dodawanie w zakresie 100. Dodatkowo zauważył podobieństwa i różnice, które precyzyjnie opisał. Zauważył również, że najlepiej, gdy na dole tabelki wpisana jest na środku liczba największa. Był o krok od uświadomienia sobie, dlaczego tak powinno być.

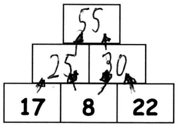
Inny uczeń klasy trzeciej prowadząc badania z różnymi usytuowaniami liczb w dole piramidki zauważył i sformułował prawidłowość, choć nie potrafił sformułować jej precyzyjnie.

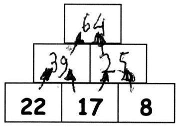
7. a) Przyjrzyj się tej piramidce. Zwróć uwagę na to, jak się wypełnia takie piramidki.



Wypełnij w ten sposób te trzy piramidki:







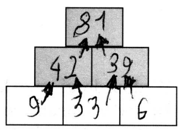
b) Co łączy te trzy piramidki?

Te trzy piramidki łączy to że wszystkie posiadają liczby 8,22,17.

c) A czym się one różnią?

Różnią się one tym że zawsze wychodzi inny wynik końcowy.

d) Jak należy wpisać liczby: 6, 9 i 33 w dolnym rzędzie piramidki, żeby górna liczba była jak największa? Wpisz je w ten sposób w dolny rząd tej piramidki:



e) Wyjaśnij, dlaczego tak właśnie należy wpisać te liczby.

Trzeba wpisać liczbę 33 po środku ponieważ jest największa z tych trzech.

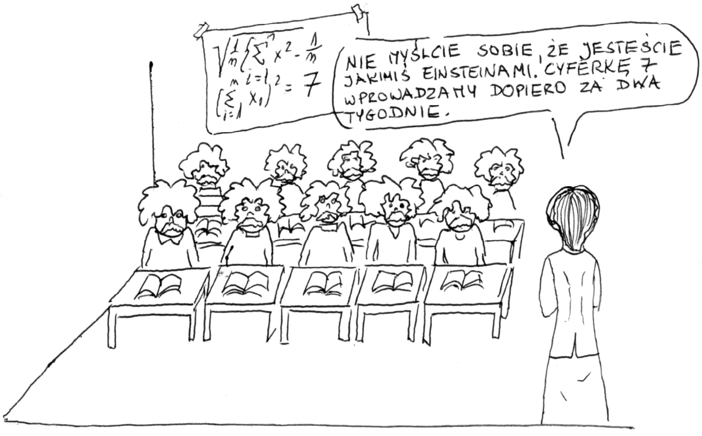
Kolejny uzasadnił już bardzo dokładnie.

Dlatego że liczba 33 w tym ułożeniu piramidki będzie wykorzystywana dwa razy.

Zajmowanie się problemami matematycznymi jest nierozerwalnie związane z samodzielnością poznawczą uczniów. Praca nad wyżej podanym problemem realizowana przez wyjaśnianie nauczyciela, w jaki sposób rozwiązać kolejne podpunkty, nie miałaby sensu. Definicyjna wiedza o tym, jak wpisać trzy liczby do piramidki jest zupełnie nieużyteczna, chyba że dotyczy dokładnie takiego samego zadania. Trudno byłoby jednak na takich fragmentach wiedzy budować myślenie matematyczne. Rozwiązywanie tego rodzaju zadania ma więc znaczenie nie tyle w sensie podania właściwej odpowiedzi (zorientowanie na wynik), ile zajmowania się nim (zorientowania na proces badawczy, wspierający umiejętność odkrywania relacji matematycznych).

W obecnej rzeczywistości szkolnej nauczyciele dokładają wielu starań, cierpliwie tłumacząc sposoby rozwiązania zadań tekstowych. Niestety okazuje się, że efekty nauczania matematyki są niezadowalające. Przyczyn takiego stanu rzeczy poszukuje się głównie w matematyce, jako dziedzinie wiedzy szczególnie trudnej. Niewątpliwie to przekonanie nie jest pozbawione racji, ale z pewnością nie wystarczy do wytłumaczenia trudności polskich uczniów z uczeniem się matematyki w szkole. Jedną z przyczyn może być właśnie brak kontaktu wielu uczniów z problemami matematycznymi, szczególnie w kontekście samodzielnych prób ich rozwiązywania.

Zadania-problemy powinny więc stanowić częsty materiał do pracy dla wszystkich uczniów. Odpowiednio dobrane, generują dodatkowo konieczność wykonania wielu algorytmicznych ćwiczeń, czyniąc zadość rozwijaniu umiejętności podstawowych uczniów. Mogą również przeciwdziałać konstruowaniu niekorzystnych strategii typu „wyłapywanie”. Rozwiązując problemy uczniowie mają również okazję do uświadomienia sobie, że wiedzę matematyczną mogą budować samodzielnie, uniezależniając się intelektualnie od nauczyciela.



Matematyka nie nadaje się do pracy w małych zespołach

Większość nauczycieli wczesnej edukacji wyraża duży niepokój odnośnie do takiej formy pracy najmłodszych uczniów. Potwierdzają to również badania. Kiedy w 2008 roku obserwowano wiele (34) godzin lekcyjnych zajęć edukacji matematycznej w dwudziestu losowo dobranych szkołach wielkomiejskich, zwrócono uwagę, że formy pracy, polegające na pracy w grupach czy choćby w parach, zajmowały marginalną część lekcji. 52,9% czasu uczniowie pracowali całą klasą, nieco mniej (42,3%) zajęć stanowiła aktywność indywidualna uczniów. Jedynie 4,1% obserwowanych lekcji matematyki polegała na pracy w grupach, a 0,7% to czas, gdy dzieci mogły zajmować się jakąś czynnością w parach[20].

Już te dane pokazują mało akceptujący stosunek nauczycieli klas początkowych do metody pracy uczniów w małych grupach. Ten niepokój jest szczególnie silny w przypadku lekcji matematyki, ponieważ nauczanie treści z tego przedmiotu intensywnie kojarzy się dyscypliną, ciszą na lekcji oraz ścisłą kontrolą poprawności wykonywanych zadań.

Praca w grupach charakteryzuje się niemożnością dotrzymania żadnego z tych warunków. Ma ona sens jedynie wówczas, gdy uczniowie mogą rozmawiać ze sobą oraz dokonywać prób radzenia sobie z problemem, również błędnych prób.

Wielu nauczycieli, którzy nie wyobrażają sobie takiej organizacji pracy na zajęciach matematycznych, podaje dwojakiego rodzaju argumenty. Pierwszy jest związany ze specyfiką treści matematycznych. Uważane są za trudne (albo mało interesujące), jeśli więc wyznaczymy kilka osób do wspólnej pracy, natychmiast zostanie ona zrzucona na najlepszego ucznia, który rozwiąże zadanie, udostępniając jedynie pozostałym uczniom wynik. Źródłem tego mitu są osobiste wspomnienia nauczycieli wczesnej edukacji, którzy w dużej części wywodzą się z uczniów pamiętających przede wszystkim trudności z tym przedmiotem

[20] M. Dąbrowski, *Edukacyjna codzienność klasy trzeciej.* [w:] M. Dagiel, M. Żytko (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Nauczyciel kształcenia zintegrowanego* 2008 *Wiele różnych światów?* Warszawa 2009.

w szkole. Na bazie własnych doświadczeń eliminują *a priori* możliwość podejmowania współpracy przez uczniów o niekoniecznie najwyższych umiejętnościach matematycznych.

Drugi argument jest taki, że wspólna praca znacznie ogranicza czas i zakres wykonywania matematycznych zadań przez poszczególnych uczniów. Zdaniem nauczycieli lepiej, gdy każdy uczeń wykona samodzielnie kartę pracy. Istnieje wówczas możliwość kontroli, czego się nauczył. Jest to złudne przekonanie, ponieważ konstruowanie reprezentacji przez jednostkę podlega osobistym procedurom, a tworzona wiedza zależy od całego bogactwa wcześniejszych doświadczeń. W tym kontekście również błędne rozumowanie nie musi kotwiczyć się w umysłach uczniów w sposób automatyczny; przeciwnie, krytyczne myślenie uczniów może okazać się skutecznym weryfikatorem błędnych rozwiązań.

Część nauczycieli traktuje pracę w małych grupach jako rodzaj modnej nowinki. Słyszeli albo czytali o takiej metodzie organizacji pracy i chętnie spróbowali jej zastosowania. Nie byli jednak usatysfakcjonowani, a podjęta próba okazała się potwierdzać wszystkie obawy. Nauczycielki, z którymi rozmawiałam, komentowały: *Nie wiem, co mi nie wyszło, ale to się nie sprawdza na matematyce* albo: *Oni i tak pracują osobno, może są jeszcze za mali?*

Najczęstszą przyczyną tych niepowodzeń jest nieodpowiedni dobór zadania do rozwiązania. Dwa poniższe przykłady pomogą być może uzmysłowić sobie, na czym polega różnica w jakości pracy grupy uczniów, w zależności od rodzaju zadania do wykonania. Pierwszy z nich polega na poleceniu rozwiązania w małej grupie zadania: **Na urodziny Oli, jej mama urządziła przyjęcie dla 14 osób. Dla każdego mama kupiła po jednym ciastku za 3 zł każde, oraz 10 litrowych kartonów soku dla wszystkich, po 5 złotych jeden karton. Ile zapłaciła za zakupy?**

Zadanie jest złożone i wymaga wykonania kilku obliczeń. Nie jest jednak dobre do pracy w małej grupie. Jest ono typowe, nie wymaga dłuższego zastanawiania się. Kompetencją, która jest niezbędna do jego rozwiązania jest jedynie sprawność rachunkowa oraz wykorzystanie do obliczeń wszystkich danych liczbowych. Uczniowie, którzy posiadają takie umiejętności, wykonają zadanie, często z poczuciem wyższości wobec tych, którzy jeszcze nie zdążyli obliczyć. Pozostali uczą się więc bardzo szybko, że lepiej nie narażać się na takie sytuacje i na drugi raz zostawić inicjatywę koledze, on i tak zrobi najlepiej. Zadanie typowe najczęściej niesie ze sobą wysokie prawdopodobieństwo szybkiej identyfikacji i równie szybkich obliczeń. Jeśli już zostały one dokonane przez jedną osobę, to całkowite wycofanie się z aktywności wspomagającej wzajemne wysiłki jest z perspektywy pozostałych uczniów dość racjonalne. Im wystarczy odtwórcze przepisanie rozwiązania.

Rozpatrzmy teraz drugi przykład o realnym charakterze: Jedna z uczennic w klasie będzie obchodziła za dwa tygodnie urodziny. Zaprosiła całą klasę, ale potrzebna jest jej pomoc w organizacji przyjęcia, ponieważ mama przeznaczyła na nie określoną kwotę pieniędzy. Poprosiła więc koleżanki i kolegów o propozycje.

W małych grupach powstają wówczas uczniowskie projekty, których tworzenie generuje potrzebę poznania ceny ciastek czy napojów (od nauczyciela, z cennika sklepowego) Niezbędne okazuje się również przeliczenie wariantów oraz wybór najbardziej optymalnego (ze względu na cenę, atrakcyjność, ilość itp.) wyboru rodzaju poczęstunku. Dzieci zastanawiają się również, jak ustawić stoły, żeby wszyscy mogli usiąść, ile i jakich potrzeba nakryć. W rozwiązywanie takiego problemu chętnie zaangażuje się większość dzieci. Przede wszystkim dlatego, że mogą się przydać pomysły i doświadczenia każdego z nich. Dowolna propozycja przedstawiona przez ucznia ma szansę być wzięta pod uwagę. Nie wiadomo w końcu, pomysł której grupy okaże się optymalny i zostanie zaakceptowany przez organizującą urodziny koleżankę. Każdy jednak jest na swój sposób interesujący, ponieważ jest twórczym dziełem wszystkich członków grupy.

Jest oczywiste, że nie wszyscy mają jednakowy udział w rozwiązywaniu tego problemu, ponieważ każdy pracował najbardziej intensywnie na takim etapie, w którym najlepiej mógł korzystać ze swojej wiedzy osobistej. Nie znaczy to jednak, że w pozostałych etapach nie brał udziału. Pracował poznawczo również dzięki temu, że w większym lub mniejszym zakresie analizował pomysły innych. Choć nie mamy pełnej kontroli, czego dokładnie się uczył, wiemy, że rozwijał swoje kompetencje w zakresie różnego rodzaju operacji matematycznych, na przykład: obliczeń.

Drugi przykład opisywał rodzaj mini projektu zachowującego cechy problemu otwartego. Praca nad tak sformułowanymi problemami jest jedną z interesujących możliwości organizowania zajęć w małych grupach. Badani nauczyciele wczesnej edukacji w większości (60,5%) nie zgadzają się ze stwierdzeniem: *Zadania otwarte, czyli o wielu możliwych rozwiązaniach, są za trudne dla dzieci w klasach 1–3.* Dostrzegają więc (i słusznie) w swoich uczniach potencjał do radzenia sobie w sytuacjach niejednoznacznych.

Mini projekty, jak ten przytoczony powyżej, stanowią jeden z przykładów zadań dobrze sprawdzających się we wspólnej pracy uczniów. Wskazane do wykorzystania są również zadania nietypowe różnego rodzaju. Większość z nich wymaga bowiem skonstruowania reprezentacji sytuacji opisanej w zadaniu, zrozumienia jej na swój sposób. Do rozwiązania nie wystarczy umiejętność wykonywania działań na liczbach.

Przykładem takiego zadania może być następująca zagadka logiczna: **Dziadek, dwóch ojców, dwóch synów i wnuczek poszli na obiad do restauracji. Ilu osobowy stolik im wystarczył?** Uczniowie muszą wyobrazić sobie, jakie relacje panują między członkami rodziny, odwołując się do swojej wiedzy osobistej, a następnie zwerbalizować zauważone zależności. Zostaną one poddane weryfikacji kolegów, a każdy pomysł (nawet słabego ucznia) może okazać się tym, który pomoże kolejnemu uczestnikowi z tej grupy rozwinąć go i wykorzystać w rozwiązaniu.

Jeszcze inną grupą zadań, dobrze organizujących pracę w grupach są zadania na odkrywanie reguł. Przykładem takiego zadania może być następujący problem matematyczny:

a) Uzupełnij te dwie tabelki:

+	14	8
11	25	
9		

+	16	22
10		
5		

b) W tej tabelce usunięto dodawane liczby. Uzupełnij w niej puste pola.

+		
	25	19
	17	15

c) A teraz uzupełnij tę samą tabelkę, ale w inny sposób.

+		
	25	19
	17	15

d) I jeszcze raz! Uzupełnij tę samą tabelkę w jeszcze inny sposób niż poprzednio.

+		
	25	19
	17	15

e) A czy tę tabelkę także można uzupełnić? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

+		
	13	18
	12	16

Rozwiązując wspólnie takie zadanie uczniowie muszą przejść przez kilka etapów. Najpierw każdy może samodzielnie wypełnić pierwsze dwie tabelki, które nie sprawiają żadnych trudności poznawczych, ale wprowadzają w pewną konwencję postępowania. Kolejny etap zaczną również indywidualnie, ale często będą już zainteresowani wynikami kolegów, będą porównywać, część może zauważy, że wpisane liczby nie są takie same u wszystkich. Być może zainteresują się, dlaczego tak jest. Dzięki pracy w grupie mają dodatkowy dostęp do informacji, która byłaby ukryta w przypadku ściśle indywidualnego zmagania się z problemem. Jednocześnie poczynione u siebie i kolegów obserwacje, zauważone podobieństwa i różnice, stanowić mogą pewną bazę wyjściową dla zauważenia prawidłowości wymaganej w ostatnim podpunkcie.

Próby uzupełnienia ostatniej tabelki spełzają na niczym. Atutem pracy wspólnej jest tu szybkie zauważenie nieprawidłowości u kolegów, którzy błędnie uzupełnili tabelkę. Przyzwyczajeni bowiem do faktu, że zadane na lekcji zadanie zawsze można rozwiązać, wpisują liczby w podobny sposób, jak w poprzednim podpunkcie, nie sprawdzając zbyt rygorystycznie każdej z nich. Poniżej podano przykład takiego rozwiązania.

e) A czy tę tabelkę także można uzupełnić?
Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

+	2	6
12	13	18
10	12	16

Tę tabelkę także można uzupełnić. Ja myślę że tak to się dzieje dla nauki.

Uczeń wypełniał zgodnie z poleceniem poprzednie tabelki. Polegając na tych doświadczeniach był pewien, że i tym razem jest to możliwe, czemu dał wyraz w swoim wyjaśnieniu. Próba zalgorytmizowania czynności uzupełniania tabelek uniemożliwiła krytyczne myślenie.

Inny trzecioklasista, będąc być może pod wpływem motywacyjnych przekonań nauczycielskich, że każdy powinien odnieść jakiś sukces, uzasadnił możliwość wypełnienia tabelki.

e) A czy tę tabelkę także można uzupełnić?
Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

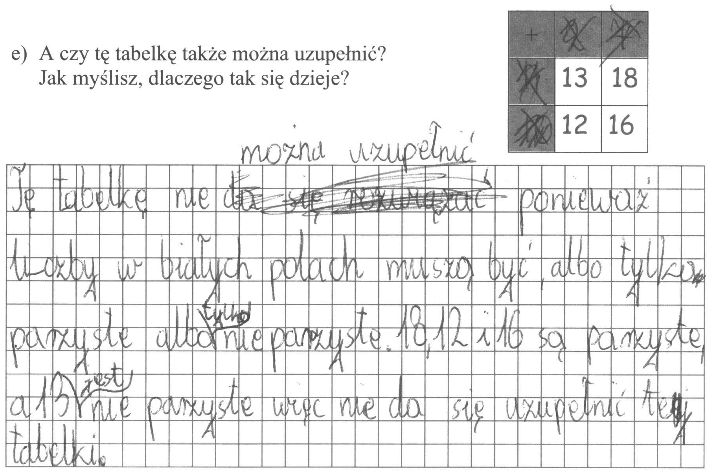
+	3	8
10	13	18
10	12	16

2, 6.

Ja myślę że tak musi się dziać, dlatego, że każdy musi coś osiągnąć. ~~(tak myślę)~~ ~~(Ja myślę)~~

Tego typu błędy wyłapią koledzy, którzy sprawdzali dokładniej rachunki i mogą dzięki temu zainteresować się, dlaczego im się nie udało, a innym tak. Chęć zweryfikowania poprawności myślenia kolegi jest wówczas silną motywacją do szukania niepoprawnie wpisanych liczb. Ten etap toczy się zwykle z udziałem werbalnych komunikatów, dyskusji, podawania w wątpliwość i przekonywania do słuszności własnych wyników. Proces werbalizowania własnego zdania, jego weryfikacji i analizowania kontrargumentów jest bardzo ważny dla rozwijania języka pojęć matematycznych. Uczniowie starają się dyscyplinować swoje myślenie tak, aby możliwe było czytelne argumentowanie. W przeciwnym wypadku koledzy z grupy będą niechętnie słuchać mało zrozumiałych wypowiedzi i odrzucą takie pomysły. Uczniowie bardzo szybko zdają sobie z tego sprawę, starając się używać języka pojęć matematycznych, które najbardziej precyzyjnie oddają daną myśl.

W pewnym momencie jeden uczniów mógłby w taki sposób wypełnić polecenia z zadania.


e) A czy tę tabelkę także można uzupełnić?
Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

+		
	13	18
	12	16

Tę tabelkę nie da ~~się rozwiązać~~ można uzupełnić ponieważ liczby w białych polach muszą być, albo tylko parzyste albo tylko nieparzyste. 18, 12 i 16 są parzyste, a 13 jest nie parzyste więc nie da się uzupełnić tej tabelki.

Ten przykład przedstawia rozumowanie ucznia, które prowadzi go do ciekawego spostrzeżenia, choć nie do końca prawdziwego. Konsultując się z innymi w grupie miałby okazję do zweryfikowania pomysłu, trafiając na rozwiązanie, w którym na przykład na białych polach byłyby dwie liczby parzyste i dwie nieparzyste. Wszystkie zauważone przez tego ucznia relacje między liczbami w tabelkach są związane z dodawaniem liczb parzystych i nieparzystych i ułatwiają zrozumienie tych zależności.

Ostatni przykład przedstawia uczniowskie rozwiązanie prowadzone już poprawnie i konsekwentnie przez wszystkie podpunkty. Odpowiedź do ostatniego z nich wskazuje na bogate przemyślenia ucznia, zwieńczone zapisem odkrytej prawidłowości. Pracując w grupie uczniowie mieliby szansę poszukiwać dalej, gdyby z ust któregoś z nich padło na przykład pytanie: *Dlaczego muszą być parzyste?* Takich pytań mogłoby powstać więcej, a każde z nich byłoby przyczynkiem do prawdziwego i samodzielnego szukania problemu oraz zastanawiania się (badania) nad relacjami matematycznymi.

7. a) Uzupełnij te dwie tabelki:

+	14	8
11	25	19
9	23	17

+	16	22
10	26	32
5	21	27

b) W tej tabelce usunięto dodawane liczby. Uzupełnij w niej puste pola.

+	14	8
11	21	19
9	17	15

c) A teraz uzupełnij tę samą tabelkę, ale w inny sposób.

+	2	0
19	21	19
15	17	15

d) I jeszcze raz! Uzupełnij tę samą tabelkę w jeszcze inny sposób niż poprzednio.

+	5	3
16	21	19
12	17	15

12

e) A czy tę tabelkę także można uzupełnić? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

+	2	7
11	13	18
5	12	16

~~Tej tabeli nie da się uzupełnić, ponieważ po dodaniu~~

~~Tej tabeli~~

Tej tabeli nie da się rozwiązać, ponieważ po dodaniu wszystkich ~~wy~~ sum wyszedł wynik nieparzysty, a w pozostałych tabelach wyniki są parzyste.

Zależności związanych z tabelkami można odkryć więcej, a za każdym razem takie doświadczenie staje się źródłem satysfakcji uczniów. Rozwiązywanie zadań w grupie zwiększa poczucie możliwości sprawczych, staje się czymś na kształt budowania wspólnego zamku i każdy może wpływać na jego kształt i elegancję.

Trzeba jeszcze raz podkreślić, że jakość pracy w grupie uzależniona jest przede wszystkim od rodzaju polecenia. Należy uczniom proponować zadania, do których nie można natychmiast dopasować strategii wcześniej wprowadzanej na lekcji. Próbując organizować pracę w małych grupach, wyposażając jednocześnie uczniów w jednakowe karty pracy z zadaniami typowymi, wyzwalamy *de facto* rodzaj konkurencyjnych działań: który uczeń rozwiąże szybciej i otrzyma pochwałę nauczyciela.

Uczniowie chcą pracować w małych grupach nie dlatego, że unikają wysiłku. Wręcz przeciwnie – uwielbiają próbować, zgadywać, zastanawiać się, zmagać z problemem. Musimy jedynie stworzyć im do tego bezpieczne warunki. Rozumiem przez to akceptację dla pojawiania się nieudanych prób oraz różnic w zakresie wykonanej przez poszczególnych uczniów pracy intelektualnej.

Na koniec chciałabym jeszcze zwrócić uwagę na pojawiające się czasami wypowiedzi nauczycieli typu: *Pracujemy w grupach i ci słabsi uczą się dużo od mocniejszych*. Albo: *Praca w grupie zawsze osłabia chęć do pracy, jak coś robi się w więcej osób, to jest spadek sprawności, bo liczy się na to, że to grupa zrobi. (...) Tę metodę wykorzystałabym na lekcjach opisowych, typu statystycznego, diagramy jak mają rysować, coś porównać, razem zebrać, rysują diagramy, inni lepiej przeliczają i tu mogą podzielić się tą pracą.* Wypowiedź ostatniej nauczycielki wyraźnie wskazuje, że słabsi uczniowie mają z góry wyznaczaną rolę „fizycznego”. Mogą coś zapisać, czy narysować, co pozwoli im czuć się przydatnymi.

W kontekście przytoczonych wypowiedzi należy wyraźnie stwierdzić, że wspólna praca nad zadaniami zaproponowanymi powyżej (oraz wieloma innymi) z założenia nie ma na celu dowartościowywania uczniów słabszych przez dopuszczenie ich do jakiejkolwiek pracy (*niech też coś zrobią*), choć ma to swoje znaczenie. Istotne jest raczej to, że generowanie pomysłów nie jest zastrzeżone dla nikogo, ponieważ nie wiadomo, który może okazać się inspiracją dla kolejnych hipotez. Uczniowie najlepsi mają szansę uświadomić sobie, że pomoc innych jest czasem bardzo istotna i każdy może okazać się autorem ciekawej koncepcji. Uczą się wówczas wzajemnego szacunku nie sterowanego pochwałami nauczyciela, ale dzięki doświadczaniu pomocnego „wkładu" intelektualnego pozostałych uczniów bez wyjątku.

Równie istotne jest kształtowanie w uczniach przekonania, że rozwiązywanie zadań matematycznych może być wyzwaniem dla każdego ucznia, który w bezpiecznej atmosferze, nienarażony na natychmiastową ocenę nauczyciela, może próbować na różne sposoby radzić sobie z propozycjami członków grupy.

Kolejną wartością wydaje mi się budowanie przekonania uczniów, **że matematyczne zadania wymagają czasu oraz podejmowania wielu prób**. Uczniowie najczęściej spotykają się na lekcji z sytuacją zupełnie odmienną. W przypadku jakichkolwiek trudności nauczyciel lub inny uczeń tłumaczy sposób rozwiązywania właściwie na zawołanie.

Takie wielokrotne doświadczenia przekonują, że nieumiejętność podania natychmiastowej odpowiedzi (a raczej potrzeba czasu na zastanawianie się) jest niestosownym zachowaniem na zajęciach matematycznych. W czasie pracy w grupie wiele razy zdarza się, że uczniowie nie rozumieją się natychmiast i muszą przemyśleć samodzielnie pomysł sąsiada. Nie traktują jednak tego, jak oceny własnego poziomu intelektualnego, ale jako naturalny etap wspólnej pracy. W przypadku słuchania pomysłu kolegi uczeń ma bowiem świadomość możliwości pojawienia się ewentualnej niedoskonałości czy wręcz fałszywości hipotezy. W konfrontacji z koncepcjami rówieśników potencjalnie obarczonymi ułomnościami będzie żywotnie zainteresowany zrozumieniem, a właściwie zrozumieniem krytycznym, które pozwoli odnaleźć w rozumowaniu kolegi luki. Odmienna poznawczo jest sytuacja, gdy to nauczyciel tłumaczy czy podaje sposób postępowania. Z założenia jego pomysł jest najlepszy. Nie ma więc sensu, aby uczeń zastanawiał się nad nim krytycznie. Ma go po prostu przyjąć „na wiarę".

Rozwijanie myślenia krytycznego jest niezbędne dla kształtowania rozumowania matematycznego uczniów. Nie będą oni uczyli się samodzielności w rozwiązywaniu zadań, gdy nie będą potrafili krytycznie spojrzeć na własne rozwiązanie. To właśnie niedostatek krytycznego myślenia jest przyczyną tego, że bardzo wielu uczniów nie zastanawia się nad sensem otrzymanego wyniku. Odejmując na przykład od liczby trzycyfrowej liczbę jednocyfrową, otrzymują liczbę jednocyfrową i nie wzbudza to ich niepokoju. Zastanawianie się, czy wynik jest dobry nie jest już ich rolą, ale nauczyciela. Taką postawę kształtujemy, nie rozwijając myślenia krytycznego.

Praca w małych grupach jest dobrym narzędziem do przeciwdziałania również takim skutkom. Dyskutując, uczniowie w sposób naturalny próbują weryfikować własny pomysł na równi z innymi, nie traktując jego niedoskonałości, jako błędu czy dowodu własnej niekompetencji. Przeciwnie, szybko orientują się, że dla dobra wspólnej pracy ważna jest „kontrola” wszystkich. Praca w małych grupach, szczególnie w klasach najmłodszych, jest więc koniecznym doświadczeniem poznawczym stymulującym wszystkich uczniów.

Najlepiej, gdy dziecko ucząc się matematyki, przede wszystkim uważnie słucha nauczyciela i powtarza jego czynności

Słuchaj tego, co ja mówię – zwrot ten jest bardzo często wypowiadany przez nauczycieli, przede wszystkim w celu dyscyplinowania uczniów. Nauczyciele wyrażają bowiem przekonanie, że na zajęciach matematyki uczniowie powinni uważnie słuchać nauczyciela, ponieważ w ten sposób „najwięcej skorzystają" z lekcji.

Ponad połowa (56,9%) badanych nauczycieli wczesnej edukacji akceptuje stwierdzenie: *Ucząc się matematyki, dziecko powinno przede wszystkim uważnie słuchać nauczyciela i powtarzać jego czynności*[21]. Przekonanie tego typu jest powszechne i stoi na straży jednego z silniej zakorzenionych mitów w powszechnych odczuciach społecznych.

Niewątpliwie nauczyciel powinien umieć tłumaczyć, ponieważ uczniowie **czasami** potrzebują takiej pomocy. Nie powinna to być jednak główna metoda poznawania matematyki. Uczeń musi być aktywny w działaniu, a tłumaczenie kojarzy się przede wszystkim ze słuchaniem lub oglądaniem, jak coś się robi.

Wielu nauczycieli doświadcza poczucia ważnej misji „objaśniania świata" swoim uczniom. Często spotykam się z tego rodzaju rozumieniem roli nauczyciela przez studentów wczesnej edukacji. Jest to bardzo pozytywna postawa, czasem jednak może się okazać mechanizmem wykluczania ucznia z aktywności poznawczej, na rzecz odtwarzania informacji uzyskanych od nauczyciela. Ten ostatni ma wówczas głęboką wiarę, że wszystko, co wyjaśnia i tłumaczy uczniom powinno być przyswojone w identycznym kształcie. Tymczasem jest to niemożliwe, ponieważ każdy z nas tworzy reprezentacje pojęć matematycznych na bazie wcześniejszych zróżnicowanych doświadczeń poznawczych.

Znakomity fizyk amerykański, R. Feynman, laureat Nagrody Nobla opisał, w jaki sposób próbuje zrozumieć skomplikowane i będące na wysokim poziomie abstrakcji twierdzenia matematyczne. Jak opowiadał swojemu znajomemu, kiedyś założył się z kolegami matematykami, że będzie w stanie ocenić, czy twierdzenie jest prawdziwe, jeśli podadzą mu jego założenia oraz wyjaśnią pojęcia w sposób dla niego zrozumiały: „Miałem pewną metodę, którą do dziś stosuję, kiedy ktoś stara się coś mi wytłumaczyć: krok po kroku wyobrażam sobie przykłady. Matematycy

[21] M. Dąbrowski (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich…*, dz. cyt.

podawali przykład jakiegoś genialnego twierdzenia, którym się strasznie ekscytowali. Gdy wymieniali założenia, ja budowałem sobie konstrukcję, która je wszystkie spełniała. Gdy była mowa o zbiorze, podstawiałem sobie w głowie piłkę, gdy o zbiorach rozłącznych – dwie piłki. Potem, w miarę przybywania warunków, piłki przybierały w mojej głowie różne kolory, porastały włosami *et cetera*. Potem matematycy recytowali jakieś durne twierdzenie, które nie było prawdziwe dla mojej włochatej piłki, więc mówiłem: «Fałszywe»”[22].

Przykład ten pokazuje, jak bardzo umysł (nawet tak wybitny) potrzebuje odwołań do wyobraźni i przekształcania nowych treści w reprezentację unikalną dla każdej jednostki. Podobnie dzieje się w umysłach uczniów, którzy słuchają z największą uwagą wyjaśnień nauczyciela. Ich reprezentacje konstruowane są z takiego „materiału”, jakim w danym momencie dysponują. Wiele razy w czasie zajęć matematycznych wcześniejsze doświadczenia logiczne uniemożliwiają uczniom stworzenie poprawnej strategii, ponieważ nauczyciel nie zdaje sobie sprawy z odmienności ich doświadczeń. Wielu uczniów konstruuje błędne reguły również z tego powodu[23].

Studenci wczesnej edukacji zapytani o kolejność wykonywania czterech podstawowych działań, najczęściej podają jednym tchem: *Mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie*. Na pierwszy rzut oka brzmi całkiem nieźle. Problem pojawia się, gdy mają wykonać działanie: **18 : 9 • 2**, albo: **37 – 11 + 6**. Okazuje się, że duża część z nich wykonuje działania w kolejności niepoprawnej.

Zapytani o przyczynę tego błędu wymieniają słabą pamięć, czasami są zdziwieni, że ich rozwiązanie nie jest poprawne. Niektórzy dodają oburzeni: *Ale tak mnie uczyli w szkole*.

Trudno wyobrazić sobie sytuację, że tak wielu studentów wczesnej edukacji miało nauczycieli nieznających kolejności działań. Skąd więc tego rodzaju niepowodzenia? Żeby łatwiej zrozumieć problem odwołam się do przykładu. Załóżmy, że informuję nowo poznanych znajomych o mojej sytuacji rodzinnej. Stwierdzam więc, że mam czworo dzieci: Najstarsza jest Hania, potem Jacek, Wojtek i Paweł. Czy słuchaczom przyszłoby do głowy, że wśród wymienionych dzieci są bliźnięta? Pewnie nie, dlatego, że wymieniając jeden po drugim, zachowuję (i przekazuję w domyśle słuchaczom) gradację wiekową.

[22] R. P. Feynman , *Pan raczy żartować, panie Feynman*. Kraków 2007, s. 89.
[23] Szeroko o tworzeniu błędnych strategii przez uczniów klas najmłodszych i ich przyczynach pisze M. Dąbrowski, *Pozwólmy dzieciom* ..., dz. cyt.

Jeśli więc nauczyciel nie jest dostatecznie czujny i pozwala sobie (lub innym uczniom) na takie uproszczenie (wypowiadanie działań „ciurkiem”) ma niestety szansę przyczynić się do wytworzenia błędnej strategii.

W przypadku podanych wyżej przykładów działań trudnością dodatkową jest również fakt, że nie należą one do typowych obliczeń pojawiających się na lekcji. Znacznie rzadziej bowiem spotykane są w zeszytach ćwiczeń niż przykłady tego typu: **17 + 4 • 5** lub **3 • 4 – 8,** które niejako potwierdzają słuszność błędnego postępowania: najpierw mnożnie a „reszta potem”. W tę gradację wpisuje się właśnie w sposób nieuprawniony uogólnienie: uporządkowanie na poziomie każdej z par („kropkowane” i „kreskowane”) działań.

Przykładem tak skonstruowanej strategii są obliczenia jednego z trzecioklasistów.

3. Oblicz.

$40 - \overset{5}{20 : 4} =$ 40 – 5 = 35

$\overset{18}{18 : 9 \cdot 2} =$ 18 : 18 = 1

$16 + \overset{20}{4 \cdot 5} =$ 16 + 20 = 36

$37 - 11 + 6 =$ 37 – 17 = 20

$\overset{10}{60 : 6} + \overset{28}{4 \cdot 7} =$ 10 + 28 = 38

W drugim i czwartym obliczeniu pojawiły się błędy w kolejności działań. Pozostałe uczeń wykonał prawidłowo. Niepoprawnie skonstruowana strategia miała szansę zostać zdemaskowana jedynie w przypadku działań, w których obok siebie znajdą się albo działania „kropkowane” albo „kreskowane”. Bardzo możliwe jest, że niedostatek takich właśnie doświadczeń spowodował, że uczeń ten nie miał okazji do zweryfikowania błędnego rozumienia kolejności działań.

Następny przykład pokazuje inną strategię prezentowaną znowu przez ucznia klasy trzeciej. Żeby podkreślić uznaną przez niego kolejność i uniknąć błędu, działanie, które postanowił wykonać w pierwszej kolejności bierze w nawias, dowodząc tym samym błędnie skonstruowanej reprezentacji znaczenia nawiasu w działaniach.

3. Oblicz.

40 – 20 : 4 = ~~4~~40-(20:4)=40-5=35

18 : 9 · 2 = 18:(9·2)=18:18=1

16 + 4 · 5 = 16+(4·5)=16+20=36

37 – 11 + 6 = 37-(11+6)=37-17=20

60 : 6 + 4 · 7 = (60:6)+(4·7)=10+28=38

Inny uczeń „opracował" strategię, która jego zdaniem, „musi" opierać się na czterech liczbach. Przystosował więc każdy z przykładów tak, że środkową liczbę wykorzystał podwójnie. Niestety, ten sposób postępowania sprawdza się jedynie w ostatnim przykładzie.

3. Oblicz.

40 – 20 : 4 = ~~20:4=5~~ 40-20 ~~-20~~ 20:4=20+4=524

18 : 9 · 2 = ~~2·2=4~~ 18:9+9·2=2+18=30

16 + 4 · 5 = 16+4+4·5=20+20=40

37 – 11 + 6 = 37-11+11+6=26+17=43

60 : 6 + 4 · 7 = ~~10~~ 60:6+4·7=10+28=38

Kolejny przykład uczniowskiego rozwiązania również odkrywa pewną strategię. Kolejność działań przez niego wykonywanych definiowana jest algorytmem: „Po kolei, od lewej do prawej". Tym razem jest ona skuteczna w drugim i czwartym przykładzie, ale skutkuje porażką w przypadku wymieszania działań „kropkowanych" i „kreskowanych".

3. Oblicz.

$40 - 20 : 4 =$ 20 : 4 = 5

$18 : 9 \cdot 2 =$ 4

$16 + 4 \cdot 5 =$ 100

$37 - 11 + 6 =$ 32

$60 : 6 + 4 \cdot 7 =$ 14 · 7 = 98

Konsekwentny sposób postępowania każdego z uczniów – autorów powyższych rozwiązań wskazuje na ugruntowane w ich umysłach strategie. Specjalnie dobrane liczby w przykładach działań (zachowanie ich potencjalnego „pasowania" również w różnych wariantach błędnych strategii), pozwoliły zdemaskować nie tyle błędy w obliczeniach, ale problem dużo bardziej utrudniający rozumienie matematyki w przyszłości. Niepoprawna strategia może zostać przeniesiona na inne liczby (np. ułamki), a uczeń, który nie zdaje sobie z tego sprawy jest coraz bardziej przeświadczony o niskich kompetencjach matematycznych oraz niemożności ich zwiększenia.

W następnym prezentowanym przykładzie trzecioklasista oblicza cztery kolejne zadania w sposób podobny, wykonując obliczenia w kolejności od lewej do prawej strony. Ostatni przykład wymyka się z tego schematu. Być może tego typu obliczenia najczęściej pojawiały się na lekcjach i uczeń miał okazję zweryfikować strategię błędną w przypadku pierwszego i trzeciego zadania.

3. Oblicz.

$40 \overset{20}{-} 20 : 4 =$ 40-20=20:4=5

$18 \overset{2}{:} 9 \cdot 2 =$ 18:9=2·2=4

$16 \overset{20}{+} 4 \cdot 5 =$ 16+4=20·5=100

$37 \overset{26}{-} 11 + 6 =$ 37-11=26+6=32

$60 \overset{10}{:} 6 + 4 \cdot 7 =$ 60:6=10+4×7=28+10=38

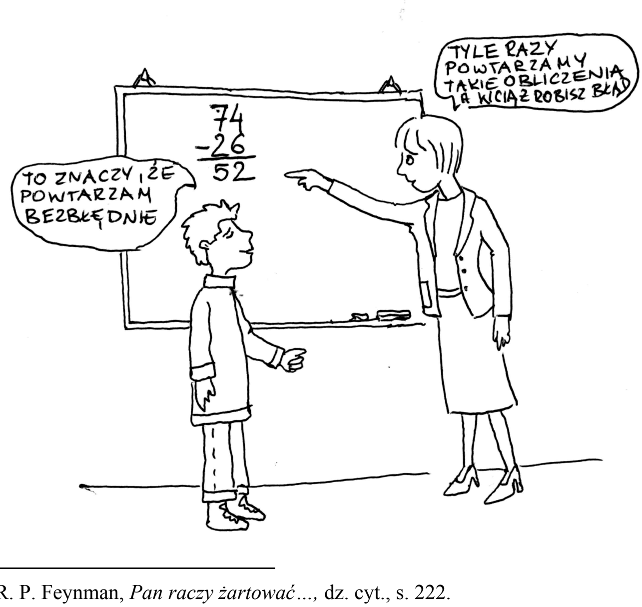
Przytoczone przykłady ilustrują pewne procesy zachodzące w umysłach uczniów (a także osób dorosłych), z których być może nie do końca zdajemy sobie sprawę. Konstruowanie strategii postępowania związane jest z silną tendencją ludzkiego umysłu do porządkowania świata, który chcemy poznać. Treści matematyczne nie są tu wyjątkiem. Uczniowie konstruują różne sposoby działania, żeby móc je ogarnąć. Jest to często proces nieuświadamiany przez nich, ale równie często przez nauczyciela. Dzieje się tak, bez względu na to, czy nauczyciel to zaplanował na danej lekcji czy nawet się tego nie spodziewa. Jeśli przesłanki, które posiada uczeń nie są dobre dla stworzenia poprawnej strategii, często pojawia się błędna lub odnosząca się jedynie do niektórych przypadków.

Zadaniem nauczyciela jest docieranie do takich strategii i pomoc w weryfikowaniu ich niepoprawności. Nie wystarczy wówczas poprawić błędne odpowiedzi w zeszycie czy na sprawdzianie. Niezbędne jest odkrycie, na jakim etapie mylna strategia powstała. Uczeń musi sam sprawdzić jej działanie na kontrprzykładach (podanych na przykład przez nauczyciela) oraz dzięki tym doświadczeniom skonstruować poprawny sposób postępowania.

Przytoczony wcześniej cytat R. Feynmana uwidacznia, jak bardzo do głębokiego zrozumienia potrzebne są modele myślowe. Jest to obecnie bardzo zaniedbany obszar edukacji, szczególnie wczesnoszkolnej. Konstruowanie pojęć matematycznych w tym okresie odbywa się jednocześnie z rozwijaniem myślenia symbolicznego. Nie bez znaczenia wydaje się więc fakt, że uczniowie uczeni „słowami", czyli słuchaniem, jak definiuje pojęcia nauczyciel, kształtują pewną konwencję konstruowania w umyśle nowych pojęć abstrakcyjnych. Uczą się przyswajania ich jedynie na płaszczyźnie nazw, które jednak często nic nie znaczą, ponieważ uczniowie nie mieli okazji do tworzenia odpowiadających im wyobrażeń.

W tym kontekście interesujące wydają się doświadczenia R. Feynmana, który świetnie opisał podobne problemy studentów brazylijskich w latach pięćdziesiątych. Prowadząc wykład dla nauczycieli akademickich, próbował wskazać źródła nieadekwatnej wiedzy ich studentów: „Zauważyłem jeszcze jedną rzecz – ciągnąłem dalej. – Na waszych oczach otworzę tę książkę w dowolnym miejscu i pokażę wam o co mi chodzi – a chodzi mi o to, że to nie jest przyrodoznawstwo, tylko wkuwanie na pamięć, calutka książka. Uwaga, otwieram na chybił trafił. Wkładam więc palec między kartki, otwieram i zaczynam czytać: «Tryboluminescencja. Tryboluminescencja to światło emitowane przy kruszeniu kryształów…». – Czy to jest przyrodoznawstwo – spytałem – Nie! Powiedziane jest tylko, co jedno słowo oznacza przełożone na inne słowa. Nic nie jest powiedziane o przyrodzie – jakie kryształy, kiedy je kruszyć, wytwarzają światło, dlaczego wytwarzają światło. Czy zdarzyło się, żeby jakiś student poszedł do domu i spróbował uzyskać światło tryboluminescencji? Nie wie, jak. - Gdybyście natomiast napisali: «Jeśli weźmiesz kostkę cukru i skruszysz ją w ciemnościach za pomocą kombinerek, zobaczysz niebieskawy błysk. Niektóre inne kryształy też się tak zachowują. Nikt nie wie, dlaczego. Zjawisko to nazywamy tryboluminescencją». Wtedy ktoś pójdzie do domu i spróbuje. Wtedy mamy doświadczanie przyrody”[24].

Myślę, że nie będę odosobniona we wspomnieniach z lat szkolnych, gdy powiem, że uczenie matematyki (i innych przedmiotów ścisłych) często zaczynało się od „wkuwania” definicji… i na nich kończyło. Obserwując zachowania poznawcze i umiejętności matematyczne studentów wczesnej edukacji oraz lekcje w klasach najmłodszych, muszę ze smutkiem stwierdzić, że w moim przekonaniu, obecnie sytuacja nie zmieniła się znacząco. Uczniowie słuchają, jak mówi nauczyciel, ale reprezentacje matematyczne w ten sposób tworzone mają często znacznie ograniczony zakres.



[24] R. P. Feynman, *Pan raczy żartować…*, dz. cyt., s. 222.

Uczeń zdolny rozwija w szkole myślenie matematyczne

Funkcjonowanie uczniów zdolnych w szkole zostało obszernie opisane w literaturze. Działania nauczyciela wynikające ze specyficznych potrzeb poznawczych, emocjonalnych i społecznych uzdolnionych dzieci, są przedmiotem wielu rozważań pedagogicznych. Istnienie pewnych zaniedbań ze strony szkoły w zakresie stymulacji intelektualnej uczniów zdolnych jest terenem dość dobrze rozpoznanym. Tytułowe stwierdzenie podawane bywa w wątpliwość oraz krytykowane za jego mityczny charakter[25].

Praktyka szkolna dostarcza nam wielu przykładów zdolnych uczniów, którzy w ciągu trzech lat nauki nie zostali nawet zidentyfikowani przez swoich nauczycieli. Nierzadkie są sytuacje w których ci ostatni nie wiedzą, jaki poziom myślenia matematycznego prezentują niektórzy ich uczniowie. Jedną z przyczyn takiej sytuacji jest brak możliwości testowego zdiagnozowania uczniów zdolnych matematycznie. Nauczyciele nie dysponują narzędziem służącym do takiego rozpoznania. Mogą to czynić odwołując się jedynie do swojego doświadczenia i osobistych przekonań dydaktycznych.

Nauczyciele kierują się więc różnymi kryteriami diagnozowania zdolności uczniów, choć pewne wskaźniki wydają się wspólne. Wiele nauczycielek, z którymi rozmawiałam odsłaniało intuicyjny charakter rozpoznania: *Bardzo szybko się zauważa, dzieci przychodzą już z dużymi umiejętnościami*. Niektóre mówiły o potrzebie czasu na postawienie takiej diagnozy, zwracając uwagę nie tyle na konieczność długotrwałej obserwacji, ile raczej na fakt, iż w początkowym okresie klasy pierwszej duża część dzieci jest tak zaawansowana, że treści programowe nie stanowią dla nich trudności. Kłopotliwe jest wówczas, zdaniem niektórych nauczycieli, rozpoznanie poziomu kompetencji uczniów.

Nauczyciele często mają świadomość, że wiele dzieci w klasie pierwszej opanowało już wcześniej umiejętności konieczne w początkowych miesiącach nauki w szkole. Nie czują więc potrzeby szukania uzdolnień matematycznych. Dostrzeżenie matematycznie zdolnych dzieci jest utrudnione przez bardzo rozpowszechniony sposób realizowania programu w klasach najmłodszych, w którym uczeń jest kierowany krok po kroku. Często więc dopiero odejście od tej formy pracy na lekcji pozwala na zauważenie istnienia uczniów zdolnych. Jedna z nauczycielek

[25] D. Klus-Stańska, *Konstruowanie wiedzy w szkole*. Olsztyn 2000; A. Kalinowska, *Matematyczne zadania problemowe w klasach początkowych – między wiedzą osobistą a jej formalizacją.* Kraków 2010.

wyraziła to następująco: *Jeśli tylko da im się furtkę i powiemy: A teraz każdy robi tak, jak chce, to dopiero orientujemy się, że robią to w taki sposób, jakbyśmy nie podejrzewali.*

Zdaniem wielu nauczycieli uczniowie zdolni są bardziej aktywni. Aktywność jest jednak często utożsamiana ze zgłaszaniem się na lekcji. Gratyfikowany będzie wówczas uczeń, który potrafi zainteresować nauczyciela, zwrócić na siebie jego uwagę.

Nauczyciele deklarują posiadanie wiedzy na temat kompetencji matematycznych swoich uczniów, ale ograniczając ją do umiejętności związanych z zagadnieniami programowymi, czynią swoje rozpoznanie dość wybiórczym. Staje się ono podobne do dziurawego sita, w którym część uczniów nie zostanie „wyłowiona". Uczeń, który ma ciekawe pomysły, ale z jakichś przyczyn nie dzieli się nimi z nauczycielem, może pozostać niezauważony. Takie przypadki nie są wyjątkowe. Zdarzało się, że nauczycielka sama zauważyła „zmianę" w umiejętnościach ucznia: *W tamtym roku, w trzeciej klasie, na przykład był taki jeden, który tak siedział cicho, nic nie było widać, a jak przyszły takie trudne zadania złożone, to nagle zabłyszczał i brał udział w Kangurze, nie miał może jakiś rewelacyjnych wyników, ale wszedł do tej grupy*.

Sytuacja opisana przez tę nauczycielkę jest przez nią samą interpretowana, jakby to uczeń nagle stał się mądrzejszy i „zabłysnął". Najprawdopodobniej jednak miał on już wcześniej dobre kompetencje matematyczne, ale nie zostały one zidentyfikowane. Może właśnie brak uwagi nauczyciela przekonywał go codziennie, że nie są one istotne i nie warto ich rozwijać. W ten sposób przez dwa, trzy lata poddawany był treningowi ograniczania własnych pomysłów, ponieważ przestał wierzyć w ich poprawność. Ten czas nie został więc w jego przypadku wykorzystany stymulująco.

Uczeń o wysokich możliwościach myślenia matematycznego jest więc najczęściej rozpoznawany poprzez szybkość wykonywanej pracy. *Jak się robi program, to dziecko robi szybko i potrzebuje dodatkowych kart pracy* – wypowiedź innej nauczycielki ukazuje właśnie taki mechanizm. Dzieci zdolne matematycznie są identyfikowane również dzięki temu, że szybko i na ogół poprawnie rozwiązują zadania na sprawdzianach. Przekonanie, że opanowali dobrze program, jest wówczas źródłem nauczycielskiej satysfakcji.

Kryterium szybkości stosowane jako rozpoznanie zdolności matematycznych ucznia, może jednak okazać się pułapką na dwa sposoby. Pierwszy konstytuuje dość powierzchowny ogląd myślenia ucznia. Tu właśnie „gubią się" uczniowie, którzy konstruują w umyśle interesujące strategie, ale nie mają okazji ich zaprezentować, ponieważ nie ma na to zbyt wiele czasu.

Drugi rodzaj niebezpieczeństwa, do jakiego może się przyczynić przytoczone kryterium identyfikowania zdolności matematycznych uczniów, jest związany z niedostatecznym ich rozwijaniem. Jeśli zastanowimy się nad pytaniem, dlaczego uczeń tak szybko poradził sobie z zadanymi kartami pracy, odpowiedź wydaje się oczywista: *Dlatego, że to umie*. Jeśli więc poziom myślenia ucznia pozwala na automatyczne wykonywanie zadań w karcie pracy, pytanie kolejne jest następujące: *W jakim celu uczeń wykonuje pracę, która niczego go nie uczy?*

Zdarza się, że nauczyciel tak dalece jest przekonany o konieczności tego rodzaju „ćwiczenia", że uczniowi ujawniającemu znużenie nudnym zajęciem, z satysfakcją wskazuje popełniony błąd rachunkowy jako dowód potrzeby takich powtórzeń. Tymczasem uczeń może popełniać błędy rachunkowe, ponieważ schematyczność postępowania odwraca jego uwagę od krytycznego myślenia. Zajmowanie się przez zdolnego ucznia zadaniami, które potrafi już bez trudności rozwiązywać, jest często zwykłą stratą czasu.

Obecność w zespole klasowym ucznia zdolnego matematycznie to najczęściej satysfakcja dla nauczyciela. Z przeprowadzonych wielu rozmów z nauczycielami dostrzegam kilka płaszczyzn, w których ich zdaniem uczeń zdolny jest przede wszystkim „pożyteczny" dla klasowego procesu edukacyjnego.

Większość przypisuje mu rolę asystenta, który pomaga nauczycielowi, czerpiąc satysfakcję z tego rodzaju „przydatności". Jedna z nauczycielek wyraziła to następująco: *Czasami jak robię pracę w grupach, to zdolnego ucznia staram się dać, jako takiego szefa grupy. I on wtedy kieruje i bardzo fajnie wygląda to na lekcji i on wtedy układa zadanie razem z tymi słabszymi i jak by był szefem grupy i on pomaga im, tłumaczy*.

Uczeń, który ma wyższe kompetencje matematyczne może więc otrzymać część władzy nauczyciela, narzucając słabszym kolegom swoje pomysły oraz kierując ich czynnościami. Tego rodzaju przewaga przejawiająca się w intelektualnej władzy nie zawsze kształtuje prawidłowo relacje między uczniami. Potrzeba uzyskania pomocy nie wypływa bowiem od słabszych uczniów zwracających się do przyjaciela o wytłumaczenie trudniejszego zagadnienia. To odgórna decyzja nauczyciela wskazuje tego, który „wie lepiej". Jeszcze jedna wypowiedź nauczycielki opisuje właśnie taką sytuację: *Mówię mu: Słuchaj wytłumacz to jemu (takiemu słabszemu), to on się czuje taki zadowolony i wtedy jest bardzo* *taki przejęty*. Nic dziwnego, że uczeń wyróżniony w ten sposób czuje zadowolenie i satysfakcję. Nie do końca jest jednak pewne, czy uczniowie, którzy zostali w pewien sposób uzależnieni od niego, czują podobne zadowolenie.

Kolejną płaszczyzną, na której, zdaniem nauczycieli, uczeń o wyższym poziomie myślenia matematycznego może się realizować, jest dzielenie się wiedzą, która jako nowe zagadnienie jest wprowadzana w klasie. Nauczyciele uważają czasem, że uczeń będący dzieckiem wyjaśni koledze trudność bardziej przystępnym językiem: *Na lekcjach pewne zagadnienia, które były już wprowadzane na lekcjach dodatkowych, to dla tych dzieci są znane i wówczas oni mogą tłumaczyć tym, które sobie nie radzą, bo one mogą swoim językiem lepiej się porozumiewać i lepiej zrozumieją niż ja dorosłym językiem wyjaśnię. Dzięki tym dzieciom z zajęć dodatkowych, to wszystkie dzieci potrafią obliczać obwód, bo one piszą na tablicy i inne mogą zrozumieć, oni pomagają nauczycielowi, są asystentami nauczyciela.*

Prawdą jest, że tłumaczenie komuś jest doświadczeniem pozytywnym, pozwalającym na lepsze uzmysłowienie sobie wyjaśnianego zagadnienia. Werbalizacja pojęć matematycznych generuje czasem odkrycie nowych znaczeń czy relacji. Nie jest jednakże rolą ucznia zdolnego wprowadzanie nowych pojęć matematycznych na lekcji. Nauczyciel nie powinien świadomie „wyręczać się" wiedzą takiego ucznia. Nie jest on w żadnym razie asystentem nauczyciela, ale uczniem potrzebującym stymulacji intelektualnej dostosowanej do jego poziomu myślenia matematycznego.

W skrajnym przypadku uczeń o dobrych możliwościach intelektualnych może być przez nauczyciela postrzegany jako jego jedyny partner w klasie: Jak *jest Adaś, to jest z kim rozmawiać, a reszta słucha i się uczy*. Oczywiście, nie stanie się nic złego, jeśli zdarzy się sytuacja, w której uczeń zdolniejszy odsłoni swój sposób myślenia. Należy jednak pamiętać, że działanie takie ma na celu stymulowanie jego rozwoju, a nie wykorzystywanie jako „nauczyciela pomocniczego".

Szkoła ma obowiązek rozwijania kompetencji matematycznych wszystkich uczniów, choć nie jest to możliwe w takim samym zakresie. Uczeń zdolny nie może marnować czasu ani na rozwiązywanie zadań, które nie są dla niego wyzwaniem intelektualnym, ani na wyjaśnianie innym zagadnień, które już zna. Jego rolą jest zmaganie się z zadaniami trudniejszymi, ponieważ jedynie takie pozwolą na rozwijanie jego kompetencji matematycznych.

Rola ucznia zdolnego matematycznie przejawia się na jeszcze innej płaszczyźnie. Jest on wykorzystywany jako „dobry wzorzec" dla pozostałych w klasie. Tak ujęła to jedna z nauczycielek: *Inne dzieci widzą, że można coś rozwiązać swoim sposobem, mają z kogo brać przykład, inspirują klasę*.

Można by zapytać, dlaczego jedynie przykład ucznia rozwiązującego zadanie samodzielnie, w niestandardowy sposób pokazuje innym, że jest to możliwe. Na czym więc polega inspiracja nauczyciela? Odpowiedzi na to pytanie nie daje również kolejna wypowiedź: *Dobrze jeśli są, bo dzieci inne korzystają, bo bardzo budują poziom, bo oni bardzo często widzą inne rozwiązania zadań, mają różne pomysły*.

Obecność w klasach najmłodszych uczniów zdolnych matematycznie jest postrzegana pozytywnie, ale dość jednostronnie. Często ma ona wymiar instrumentalny, uczeń taki jest potrzebny nauczycielowi w różnorodnych celach dydaktycznych, natomiast rzadziej jest obiektem nauczycielskiej refleksji nad przygotowaniem oferty poznawczego rozwoju odpowiadającej możliwościom ucznia.

Zdaniem niektórych nauczycieli to zadanie wypełnia przygotowywanie dodatkowych kart pracy, które uczniowie zdolni wypełniają po skończeniu standartowych zadań, jakie rozwiązują wszyscy uczniowie. Jeśli jednak uczeń, zanim zajmie się zadaniem trudniejszym, musi poświęcić wiele czasu na mechaniczne obliczenia, szybko przestaje dostrzegać pozytywne aspekty dodatkowej pracy. Kiedy traci początkowe zainteresowanie dodatkową oceną, przestaje starać się o wykonanie większej liczby zadań.

Tego rodzaju działania nauczyciela mogą więc paradoksalnie obniżać motywację ucznia, który zaczyna wierzyć, że nie warto zajmować się trudniejszymi zagadnieniami. Szybko przekonuje się, że dobrą ocenę można uzyskać mniejszym nakładem pracy. Proponując uczniowi zdolnemu dodatkową kartę pracy, uzyskujemy więc często efekt zupełnie niezamierzony. Przestaje on interesować się matematycznymi zagadnieniami, skupiając się na uzyskaniu oceny. Jego kompetencje matematyczne nie zawsze mogą się rozwijać odpowiednio do możliwości intelektualnych.

Nauczyciele okazują zadowolenie z obecności w klasie ucznia uzdolnionego matematycznie również wówczas, gdy chętnie bierze on udział w konkursach. Ci uczniowie, którzy nie wykazują takich potrzeb, spotykają się czasem z mniejszą akceptacją. Niechęć uczniów zdolnych do sprawdzania się w atmosferze silnej rywalizacji budzi niezadowolenie. Podobnie dzieje się, gdy uczeń uchyla się od zajęć dodatkowych z matematyki. Za taką postawę on sam lub jego rodzice bywają obarczani winą: *Rodzice zainteresowali się najpierw, ale liczba chętnych szybko drastycznie zmalała.*

Nieuczęszczanie przez uczniów zdolnych na zajęcia kółka matematycznego jest być może źródłem niepokoju nauczycieli dlatego, że wielu z nich dostrzega możliwość rozwijania się takiego ucznia jedynie w czasie pozalekcyjnym. Tymczasem uczeń nauczony doświadczeniem z dodatkową pracą w formie „nagrody" obawia się, że na zajęciach dodatkowych będzie musiał rozwiązywać kolejne żmudne i mało interesujące zadania „za nic". Część z uczniów odmawia więc uczęszczania na kółko matematyczne, zajmując się matematyką na swój sposób, rozwiązując interesujące ich zagadki matematyczne z książek odkrytych poza szkołą.

Przywołam przykład ucznia, który w klasie trzeciej samodzielnie rozwiązywał zadania matematyczne, często z klas wyższych. Michał miał prawo decydować, które z nich są zbyt łatwe i nie wymagają żadnego wysiłku intelektualnego. Te, za zgodą nauczycielki, były najczęściej pomijane. Po przejściu do klasy czwartej uczeń ten spotkał się z zadziwiającą dla niego sytuacją. Gdy po raz pierwszy otrzymał polecenie rozwiązywania identycznych zadań jak pozostała część klasy zgłosił, że takimi samymi zadaniami zajmował się już w zeszłym roku i poprosił o zadania trudniejsze. Nauczycielka zdecydowała jednak, że jest to niemożliwe, ponieważ są to zadania ze zbioru do klasy czwartej. Uczeń odmówił więc wykonywania tych zadań, słusznie czując brak sensu takiej pracy. Zapytałam go kiedyś, jak ułożyły się jego stosunki z nauczycielką, czy zaproponowała mu zadania trudniejsze? Na to Michał odpowiedział: *Nie, ale sam sobie wymyślam i rozwiązuję zadania.* Sytuacja, w której uczeń zdolny jest zostawiony sam sobie[26], nie jest niestety tak incydentalną, jakby się wydawało.

Wyższy poziom myślenia matematycznego ucznia powinien obligować nauczyciela do takiej organizacji zajęć, żeby jak najczęściej miał on okazję do zajmowania się zadaniami o odpowiednim poziomie trudności. Świadomość, że pewne zagadnienia są już uczniowi znane, pozwoli wówczas nauczycielowi zaproponować ciekawsze zadania. Rozwiązując je samodzielnie, uczeń ma szansę konstruować wiedzę matematyczną rozwijając myślenie krytyczne.

Trzeba wyraźnie powiedzieć, że zagadnienia matematyczne z programu klas początkowych nie stanowią trudności dla wielu uczniów

---

[26] Nie chodzi tu o fakt, że musi sobie radzić z zadaniem samodzielnie, ale o brak propozycji, która odpowiada jego możliwościom intelektualnym.

o dobrych możliwościach intelektualnych. Zdarza się jednak, że nauczyciele oceniają ich kompetencje głównie na podstawie znajomości nazw. Rzeczywiście, mogą nie pamiętać, że istnieje nazwa: „Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania”. Najczęściej jednak poproszeni o obliczenie w pamięci działania **21 • 8**, skorzystają z tego prawa w sposób intuicyjny (i zgodny z wiedzą matematyczną). Często również w przypadku działania **19 • 5** skorzystają z prawa rozdzielności mnożenia względem **odejmowania**, ponieważ jest to bardziej ekonomiczny sposób obliczania tego przykładu niż wprowadzane właśnie prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania. Zdolniejsi uczniowie potrafią sobie poradzić w ten sposób na długo przed wprowadzeniem tego pojęcia na lekcji. Uczniowska strategia wyrasta tu z dobrego rozumienia działania mnożenia oraz systemu dziesiętnego liczb. Informacja, że korzysta z „prawa rozdzielności…” byłaby dla samego ucznia dużym zaskoczeniem.

Zatrzymując się na chwilę przy wyżej wymienionych treściach chciałabym zwrócić uwagę na kilka istotnych problemów. Wprowadzanie praw rozdzielności słusznie traktowane jest przez nauczycieli, jako narzędzie pomocne do obliczeń. Realizacja tych treści na lekcji jest czasami jednak obarczona pewnymi dydaktycznymi zabiegami, które mogą utrudniać proces rozumienia i wykorzystywania wiedzy w tym zakresie przez uczniów.

Przykładem mało stymulującego działania nauczyciela jest proponowanie uczniom przykładów do rozpisywania, które muszą wykonywać w ten sam sposób, bez względu na jego sensowność. W drugim z podanych powyżej działań (19 • 5) widoczny jest bezsens obliczania (ze względu na znaczną trudność) za pomocą prawa rozdzielności mnożenia w względem dodawania. Przydatność powyższych praw matematycznych powinna przejawiać się w ułatwianiu liczenia i ten aspekt powinien zostać dostrzeżony przez uczniów. Przy sztucznym stosowaniu obu praw do każdego przykładu zaciemniona zostaje ich użyteczność.

Na jednej z lekcji w klasie trzeciej nauczycielka wprowadzała rozdzielność mnożenia względem dodawania podając jako jeden z kolejnych do przećwiczenia w zeszycie przywołany wcześniej przykład: **19 • 5**. Wszyscy uczniowie wykonywali je zgodnie z podanym schematem: **10 • 5 + 9 • 5** =. Oglądając tę lekcję ze studentami zapytałam ucznia siedzącego przede mną, czy nie sądzi, że można znaleźć wynik takiego działania inaczej, może łatwiej. Natychmiast rzucił: *A tak, to będzie sto…* i zaraz się wycofał: *Nie, to chyba niedobrze*. Drążyłam dalej jego sposób myślenia i zapytałam: *A dlaczego myślałeś o liczbie sto?* Uczeń odpowiedział: *No pewnie, od stu wystarczy odjąć 5 i wyjdzie 95, ale tak chyba nie można, bo tego nie było*. Kiedy poprosiłam go, żeby wyjaśnił mi swój sposób obliczania, powiedział: *No bo dwadzieścia razy pięć i mam 100, ale z każdej dwudziestki muszę zdjąć 1 i to będzie o pięć mniej*. Byłam zachwycona jego pomysłem i zaproponowałam, żeby zgłosił go nauczycielce. Kiedy jednak poszedł do tablicy, żeby go obliczyć, zastosował sposób podany wcześniej przez nauczycielkę. Nie zaufał swojej wiedzy i nie odważył się przedstawić własnego pomysłu w klasie. Tymczasem to właśnie dyskusja nad sensem stosowania obu sposobów miałaby szansę zwrócić myślenie uczniów w kierunku pragmatyki poznawanej wiedzy.

Rozwijanie myślenia matematycznego uczniów zdolnych jest możliwe dzięki rozwiązywaniu wielu różnych zadań, a wiedza matematyczna jest przez nich konstruowana właśnie na podstawie takich doświadczeń. Proponowane zadania mogą być związane z tematem lekcji, ale niekoniecznie. Dla kształcenia kompetencji matematycznych uczniów zdolnych (również dla pozostałych uczniów) lepiej jest, gdy zajmują się problemem pozwalającym zauważyć nowe zależności matematyczne, nawet nie w pełni zdefiniowane przez nauczyciela, niż zajmowanie się wieloma mało skomplikowanymi zadaniami w celach utrwalających.

W przypadku niektórych treści możliwe jest zaproponowanie uczniom zdolnym zadań o podwyższonym stopniu trudności **zamiast** standardowych kart pracy. Niech jako przykład posłuży porównywanie liczb wielocyfrowych. Uczniowie wykonują wiele ćwiczeń typu: **Wskaż w każdej parze liczb tę, która jest mniejsza i wstaw znak > lub <.**

a) 36 71

b) 134 95

c) 342 234.

Uczniowie o dobrych kompetencjach matematycznych najczęściej już posiadają wiedzę pozwalającą na skorzystanie z różnych strategii: porównywania liczby cyfr, porównywania wielkości cyfr w odpowiednim rzędzie liczbowym itp. Wykonywanie przykładów tego typu nie rozwija matematycznego myślenia.

Nie wystarczy wówczas dodatkowa propozycja podobnie sformułowanego polecenia przy zmienionej wielkości liczb. Strategia postępowania ucznia jest taka sama, a zadanie wydaje się jedynie bardziej żmudne i niedające większej satysfakcji.

Sytuacja poznawcza ucznia zmienić się może diametralnie, gdy nauczyciel w miejsce tak schematycznych ćwiczeń zaproponuje zadanie typu: **Pod gwiazdką kryje się jakaś cyfra. Wstaw w miejsce okienka tam, gdzie jest to możliwe znak >, <, =.**

a) 1* $\square$ *4

b) 99 $\square$ *8

c) *0 $\square$ 11

Uczniowie rozwiązując takie zadanie mają okazję do uzyskania szerszego wachlarza korzyści poznawczych, z których wymienię kilka (niewyczerpujących jednak tematu):

– ćwiczenie wykorzystania przywołanych wyżej strategii porównywania liczb wielocyfrowych,

– głębsze uświadomienie sobie znaczenia cyfry w różnych rzędach liczbowych,

– przekonanie, że zajmowanie się matematyką nie polega jedynie na wstawianiu odpowiedzi we właściwe, wskazane poleceniem miejsce, ale wymaga rozpatrywania wielu możliwości, stawiania hipotez i ich weryfikowania,

– odkrywanie znaczenia cyfry zero w liczbie.

Opisanej wyżej sytuacji nie należy ściśle łączyć z poziomem treści odpowiadających danej klasie. Zadanie, które w klasie drugiej będzie wyzwaniem dla ucznia zdolnego, w klasie trzeciej może się już okazać jedynie schematycznym ćwiczeniem.

Konfrontowanie wiedzy ucznia zdolnego jedynie z treściami obowiązującymi na lekcjach może okazać się mało skutecznym kryterium rozpoznania. Znacznie utrudnione bywa wówczas określenie „strefy najbliższego rozwoju"[27] ucznia zdolnego. Nauczyciel nie może tego ocenić, nie proponując uczniowi coraz wyższego poziomu zadań na lekcjach. Co prawda, uczeń nie może pracować powyżej bariery będącej poziomem jego uzdolnień[28], ale nasuwa się pytanie: Co stanowi tę barierę zdaniem nauczycieli? Czy jest to rzeczywisty poziom funkcjonowania intelektualnego uczniów, czy raczej tematy przerobionych lekcji matematyki?

Wypowiedzi niektórych nauczycieli wskazują raczej na tę drugą możliwość: *Nie wprowadziłam jeszcze dodawania i odejmowania pisemnego, bo co będzie robiła w trzeciej klasie. Zna ułamki ½, ¼. Na pewno nie zrobiłaby dodawania ułamków, bo tego jej nie wprowadziłam. To, co jest w nauczaniu I - III, zrobiłaby.*

Słabo zakotwiczone wydaje się przekonanie nauczycieli, że dzieci, nawet wówczas, gdy sobie tego nie uświadamiają, konstruują znaczenia

---

[27] L. S. Wygotski, *Myślenie i mowa*. Warszawa 1989.
[28] E. Nęcka, *Inteligencja i procesy poznawcze*. Kraków 1994.

matematyczne, dzięki osobistym doświadczeniom szkolnym i pozaszkolnym. Nauczyciele nie postrzegają więc rozwijania się ucznia zdolnego jako wyzwania intelektualnego i zawodowego. Uspakajająca wielu nauczycieli jest świadomość, że uczeń zdolny jest stymulowany w domu.

Dobrze postrzegana jest sytuacja, w której rodzice lub starsze rodzeństwo stanowi źródło inspiracji poznawczej ucznia: *Dziewczynka fajnie analizuje zadania, chociaż popełnia niewielkie błędy. Ma mamę księgową i mama w domu ją przygotowuje, dając dodatkowe zadania*. Świadomość, że środowisko rodzinne stymuluje dziecko poznawczo, jest być może dodatkowym elementem, usuwającym z pola widzenia nauczyciela konieczność stawiania odpowiednich wymagań uczniowi o wysokich możliwościach intelektualnych.

W przekonaniu wielu nauczycieli posiadanie w klasie ucznia, który wykazuje się wiedzą ponad program szkolny, zwalnia ich z potrzeby zajmowania się jego rozwojem. Nie jest to proces świadomy, jednakże działający w wielu polskich szkołach. Może być więc tak, że część uczniów rozpoczynających szkolne uczenie się prezentuje bardzo wysoki poziom myślenia matematycznego[29] i w kolejnych latach czyni jedynie niewielki postęp. W takich przypadkach edukacyjna rola szkoły jest nie z winy uczniów realizowana w znacznie ograniczonym zakresie. O ile bowiem algorytmiczne umiejętności uczniów zdolnych zostają szybko i sprawnie wyćwiczone, o tyle poziom myślenia matematycznego może nie ulec postępowi. Dopóki bowiem będziemy sprawdzać jedynie opanowanie określonych umiejętności algorytmicznych uczniów, dopóty nie będziemy posiadać wystarczającej wiedzy na temat procesu rozwoju ich myślenia matematycznego. Nie badając postępów ucznia, tracimy okazję do stawiania przed nim zadań mieszczących się w strefie najbliższego rozwoju.

[29] D. Klus-Stańska, *Dziecko uzdolnione matematycznie. Adrian – odsłona pierwsza.* W: D. Klus-Stańska (red.), *Światy dziecięcych znaczeń.* Warszawa 2004.

Uczeń umie tylko to, co było przerabiane w szkole

Przyglądając się temu stwierdzeniu z różnych perspektyw musimy zgodzić się na pewną nieoczywistość. Istotnie, nazwy określające pojęcia matematyczne typu: „iloczyn”, „przemienność mnożenia”, „oś liczbowa”, „liczba pierwsza” i wiele innych pojawiają się przede wszystkim na lekcjach matematyki. W tym sensie uczeń poznaje matematykę głównie w szkole.

Druga perspektywa – nadawania znaczeń matematycznych zdecydowanie zaprzecza powyższemu stwierdzeniu. Na poziomie klas najmłodszych najczęściej jest tak, że uczniowie dzięki wielu doświadczeniom pozaszkolnym dostrzegają wiele zależności matematycznych, i choć nie potrafią ich nazwać, korzystają z nich w różnych sytuacjach. Uczeń, który dość szybko (najczęściej w momencie przejścia na poziom liczenia w pamięci w zakresie 10) orientuje się, że dodawanie 3 + 4 daje taki sam wynik jak 4 + 3 i nie musi znać określenia „przemienność dodawania”, żeby z niego korzystać. Tę wiedzę uzyskał samodzielnie dzięki wielu manipulacjom w rzeczywistym świecie i ich obserwowaniu.

Skoncentrowanie się nauczyciela jedynie na tych umiejętnościach, które są przedmiotem zabiegów dydaktycznych w szkole, zubaża jego wiedzę o uczniu. Ogranicza jednocześnie poznawczo uczniów, którzy nie mogą zajmować się interesującymi ich zagadnieniami, ponieważ *nie ma tego w programie tej klasy.*

Tego rodzaju przekonanie zwalnia również uczniów od uruchamiania strategii osobistych, tych „na chłopski rozum”, czyli podejmowania prób radzenia sobie z problemem z użyciem posiadanej wiedzy.

Badani w 2008 roku trzecioklasiści otrzymali w zestawie zadań oprócz kilku przykładów z algorytmami wszystkich działań, dwa przykłady dzielenia: **150 : 25** i **140 : 35**, które mieli obliczyć najwygodniejszym dla siebie sposobem[30]. Prawidłowe były wszystkie strategie, które dawały poprawny sposób liczenia i wynik. Uczniowie radzili sobie

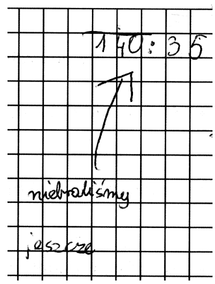
[30] M. Dąbrowski (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich …,* dz. cyt.

na różne sposoby, wykorzystując działanie mnożenia, dodawania czy odejmowania od dzielnej kolejno kilka razy po dzielniku.

Obliczenie okazało się jednak niemożliwe aż dla ponad połowy (51,6% w przykładzie pierwszym i 55,8% w przykładzie drugim) badanych uczniów.

Część dzieci nie podjęła żadnych prób posługując się na przykład tego typu usprawiedliwieniem:

140 : 35

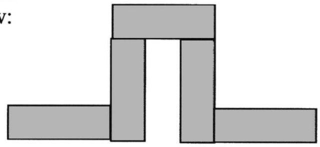


Fakt, że dzielenie przez liczbę dwucyfrową nie zostało wprowadzone na lekcji automatycznie wykluczył możliwość, zdaniem niektórych nauczycieli (i niestety ich uczniów), samodzielnego rozwiązania problemu.

Inaczej zachowywali się uczniowie trzecich klas w konfrontacji z problemem, którego nie potrafili zidentyfikować i przyporządkować do treści tematów lekcyjnych.

Wśród zadań proponowanych w testach w roku 2008 kilka miało nietypową strukturę – problemu matematycznego. Każde zawierało w sobie kilka pytań, które miały charakter drogowskazu ułatwiającego odkrycie prawidłowości i jej sformułowanie (do nich należały przywoływane już problemy z „piramidkami” oraz „tabelki dodawania”). Poniżej przywołane zostało kolejne.

Karol budował bramy z identycznych klocków.
Do zbudowania jednej bramy użył 5 klocków:



Do zbudowania dwóch takich
bram potrzebował 10 klocków:

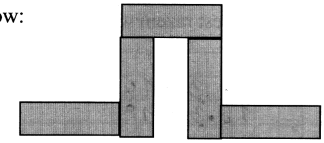
a) Ile klocków potrzebował Karol do zbudowania:

- trzech takich bram?
- czterech takich bram?
- dziesięciu takich bram?
- dwudziestu takich bram?

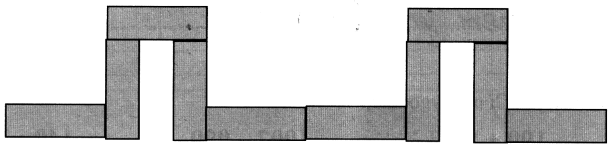
W tego rodzaju sytuacji nowej poznawczo uczniowie uruchamiali proces korzystania z wiedzy osobistej, obliczając dowolnymi sposobami liczbę klocków i tworząc „po drodze" nowe. Bogactwo radzenia sobie z tego rodzaju zadaniem jest naprawdę imponujące, szczególnie że w przypadku 80% rozwiązań poprawne.

Autor poniższego przykładu rozwiązania nieustannie weryfikował sposoby obliczania kolejnych bram, czyniąc je coraz bardziej ekonomicznymi.

Karol budował bramy z identycznych klocków.
Do zbudowania jednej bramy użył 5 klocków:



Do zbudowania dwóch takich
bram potrzebował 10 klocków:



a) Ile klocków potrzebował Karol do zbudowania:

- trzech takich bram? $5+5+5=15$
- czterech takich bram? $5+5+5+5=20$
- dziesięciu takich bram? $10+10+10+10+10=50$
- dwudziestu takich bram? $50+50=100$

Inny uczeń przełożył wyobrażenie dokładania klocków na bardziej zaawansowaną strategię – mnożenie.

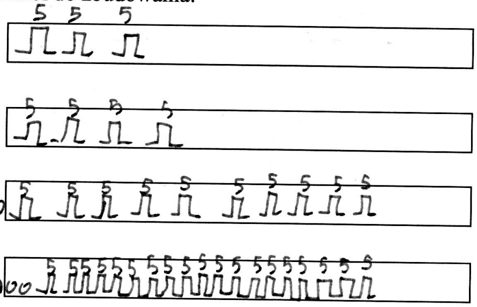
a) Ile klocków potrzebował Karol do zbudowania:

- trzech takich bram? $3 \cdot 5=15$
- czterech takich bram? $4 \cdot 5=20$
- dziesięciu takich bram? $10 \cdot 5=50$
- dwudziestu takich bram? $20 \cdot 5=100$

Cześć uczniów radziła sobie, rysując kolejne bramy oraz wykorzystując takie wyobrażenie do obliczania.

a) Ile klocków potrzebował Karol do zbudowania:

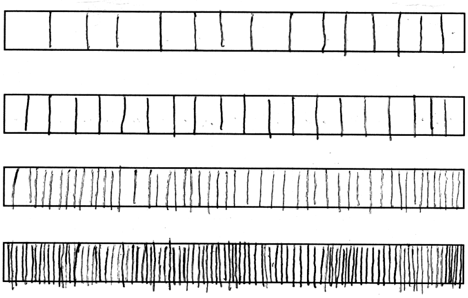
- trzech takich bram? 15
- czterech takich bram? 20
- dziesięciu takich bram? 50
- dwudziestu takich bram? 100



Interesująca wydaje się również konwencja posłużenia się ilustracją odpowiedniej liczby klocków. Tu uczeń najpierw obliczył, ile ich potrzeba do zbudowania budowli, a następnie przedstawił tę liczbę za pomocą swego rodzaju „kodu klockowego".

a) Ile klocków potrzebował Karol do zbudowania:

- trzech takich bram?
- czterech takich bram?
- dziesięciu takich bram?
- dwudziestu takich bram?



W niektórych rozwiązaniach uwidacznia się proces konstruowania strategii o wyższym poziomie ogólności, gdy uczeń dodając kolejne 5 klocków przeszedł do zapisu mnożenia, kontynuując już tylko taką postać.

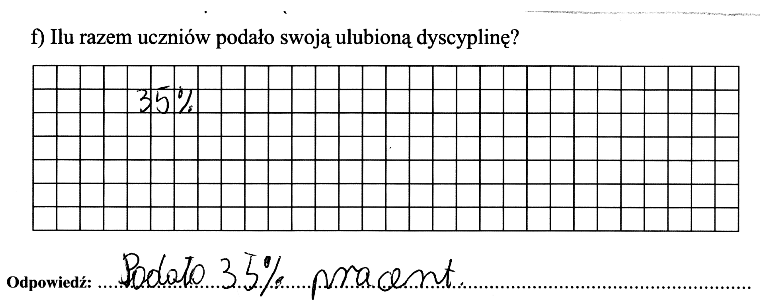
a) Ile klocków potrzebował Karol do zbudowania:

- trzech takich bram? $10+5=15$, $5\cdot3=15$
- czterech takich bram? $15+5=20$, $5\cdot4=20$
- dziesięciu takich bram? $5\cdot10=50$
- dwudziestu takich bram? $20\cdot5=100$

Już przywołane przykłady[31] uczniowskiego radzenia sobie w sytuacjach nowych zaskoczyć mogą swoim bogactwem i różnorodnością. O tym bowiem, jaką wiedzę matematyczną mają uczniowie, informują przede wszystkim ich strategie uruchamiane w nieznanych wcześniej problemach. Sprawdzanie jedynie tych umiejętności, które były ćwiczone na lekcjach, ogranicza wiedzę o uczniu do niemalże zero-jedynkowej informacji: *opanował ten temat lub nie*. Umiejętność wykonania przez ucznia dodawania pisemnego jest jedynie dowodem na pamięciowe opanowanie algorytmu. Nie pozwala jednak na dostrzeżenie, w jaki sposób została ona wykorzystana do budowania myślenia matematycznego ucznia.

Nauczyciel nie powinien więc *a priori* zakładać, że jego uczniowie nie umieją *tego, czego nie wprowadzał na lekcji*. Warto sprawdzić, jaka jest ich wiedza o tych zależnościach matematycznych, które jego zdaniem stanowią zupełnie czystą kartę w umysłach uczniów. Odkrywanie wiedzy osobistej uczniów może być fascynującym elementem wzajemnych interakcji, budującym szacunek dla myślenia dziecięcego.

Być może wyrazem niespełnionej tęsknoty do zadań wyzwalających wyższy poziom trudności są zaprezentowane poniżej odpowiedzi polskich trzecioklasistów uzyskane za pomocą czytania diagramu słupkowego (por. s. 28).


f) Ilu razem uczniów podało swoją ulubioną dyscyplinę?

35%

Odpowiedź: Podało 35% pracent.

Procentowa wielkość podana przez tego ucznia nie jest poprawna, ale wskazuje na potrzebę przenoszenia wiedzy pozaszkolnej na teren lekcji matematyki.

Podobnie inny uczeń wykorzystał swoje doświadczenia i skojarzył formę rysunku (diagram) z często współistniejącym (szczególnie w mediach) tekstem posługującym się pojęciem procenta.

[31] Nie wyczerpują one bynajmniej możliwości rozwiązań zastosowanych przez trzecioklasistów.

d) Którą dyscyplinę: skoki narciarskie czy siatkówkę wybrało więcej uczniów? O ilu więcej?

skoki narciarskie 15 procent

e) Które dwie dyscypliny wybrało łącznie 50 uczniów?

Matematyczna przedwiedza ucznia jest najczęściej pomijana i niedostrzegana nie tylko przez nauczycieli, ale także samych uczniów, którzy „nauczyli się”, że „wiedzieć” mogą tylko to, co już było na lekcjach.

Przywołam przykład uczennicy klasy trzeciej, która rozwiązywała zadanie: **Mama wysłała Janka po dwa litry wody ze studni. Janek wziął ze sobą dwa naczynia: wiadro o pojemności 8 litrów i garnek o pojemności 3 litry. Jak za pomocą przelewania odmierzyć ma dokładnie 2 litry?** Na moją prośbę, aby spróbowała sobie wyobrazić, co będzie robił Janek i gdzie może nabrać wody, wyjaśniła, że może nabrać do wiadra. Zapytałam, czy będzie miał wtedy odpowiednią ilość wody, a ona stwierdziła, że może przecież odlać do garnka trzy litry, a potem, gdy wyleje wodę z garnka, zrobić to jeszcze raz i zostanie mu w wiadrze właśnie dwa litry. Następnie powiedziała: *Wiem! To będzie 8 – 3 – 3 = 2.* W tym momencie dodała zdziwiona: *Skąd ja to wiedziałam?* Fakt posiadania wiedzy niezidentyfikowanej wcześniej okazał się dla niej największym zaskoczeniem.

Zadania „na szóstkę" nie są dla słabych uczniów

Powyższe stwierdzenie jest przykładem mitu, który mocno osadził się w przekonaniach nauczycieli wczesnej edukacji. W wielu przypadkach uczeń może zmierzyć się z tego typu zadaniem samodzielnie jedynie wówczas, gdy rozwiązuje je „na szóstkę". Uczniowie o niższych możliwościach matematycznego myślenia nie mają właściwie okazji do sięgania po tak wysoką ocenę, a więc również do samodzielnych prób poradzenia sobie z nietypowym problemem.

Rozwiązywaniu zadań matematycznych słusznie przypisuje się wiele pozytywnych aspektów. Korzyści osiągane dzięki rozwiązywaniu zadań matematycznych pojmowane są przez dydaktyków wielotorowo, poczynając od najprostszego przeniesienia w postaci „opanowania podstawowych pojęć matematycznych"[32], są znaczeniowo rozszerzane, aż po „rozwijanie postawy intelektualnej wyrażającej się w twórczym, logicznym i krytycznym myśleniu, samodzielnym pokonywaniu trudności i matematycznym analizowaniu zjawisk"[33].

Tak szerokie znaczenia nadawane funkcji zadań w procesie rozwijania matematycznego poznawania nie zawsze są wyrażane przez nauczycieli wczesnej edukacji. Wielu z nich ogranicza je raczej do „przerobienia" zadań dotyczących określonych oraz ściśle identyfikowalnych treści matematycznych w nadziei, że wyćwiczenie wielu schematycznych rozwiązań pozwoli uczniom w przyszłości poradzić sobie z każdą trudnością matematyczną[34], także tą pozaszkolną. Dlatego dzieci w klasach najmłodszych rozwiązują najczęściej zadania skorelowane z tematem lekcji (mogą to być zadania na przykład dotyczące porównania różnicowego czy dodawania w zakresie 100).

W tym kontekście zadania „na szóstkę" stanowią grupę ćwiczeń wyłamujących się z obszaru codzienności szkolnej matematyki, często ze względu na trudność przypisania ich do konkretnego tematu lekcji, choć oczywiście nie tylko dlatego.

Rozwiązywanie zadań problemowych jest rzadko doświadczaną działalnością uczniów. Przyczyny zbyt niskiej frekwencji pojawiania się tego rodzaju zadań na lekcjach w klasach najmłodszych opisują D. Klus-Stańska i M. Nowicka. Niedocenianie przez nauczycieli roli

[32] E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami …,* dz. cyt., s 103.
[33] Tamże.
[34] Negatywne skutki takiego rozumienia roli zadań w matematycznej edukacji wczesnoszkolnej opisują D. Klus-Stańska i M. Nowicka w książce *Sensy i bezsensy*… dz. cyt.

zadań problemowych w rozwoju myślenia matematycznego miewa swoje źródło w braku umiejętności identyfikowania zadań tego typu oraz w niskich kompetencjach twórczych nauczycieli w zakresie matematyki[35].

Zadania „na szóstkę" mają swoje miejsce w procesie edukacyjnym choćby za sprawą specjalnie wydawanych zbiorów w ramach niektórych programów szkolnych. Często są ciekawsze poznawczo, ale traktowane jako zbyt trudne stanowią barierę mentalną nie tylko dla uczniów, ale również wielu nauczycieli.

Są także przyczyną niepowodzeń studentów wczesnej edukacji zmagających się z ich rozwiązywaniem. Ci ostatni dla określenia zadań tej kategorii używają najczęściej pojęcia może nieco mniej profesjonalnego, ale dobrze oddającego meritum – zadania „na myślenie". Znamienne jest użycie wyrażenia „na myślenie", stanowiące tu cechę klasyfikującą. Różnicuje ona tego rodzaju zadania od typowych, które stanowią zdecydowaną większość propozycji w podręcznikach dla najmłodszych uczniów.

Zadania „na szóstkę" już w swojej nazwie zawierają atrybut ograniczający grupę uczniów, do których są skierowane. Dla każdej grupy wiekowej (klasy I, II lub III) można znaleźć wydawnictwa oferujące zadania przeznaczone dla najlepszych. Jednakże uczeń, który nie reprezentuje bardzo wysokiego poziomu wiedzy matematycznej jest pozbawiany z nimi kontaktu, ponieważ... są one „na szóstkę". Prawo wstępu do świata problemów matematycznych tego typu jest przez nauczyciela przyznane tylko wówczas, gdy jest on przekonany, że programowe umiejętności matematyczne zostały opanowane w stopniu idealnym.

W świadomości nauczycieli zadania, o których mowa, pełnią raczej funkcję nagrody dla ucznia, po którym należy się spodziewać, że jego wysokie kompetencje matematyczne (często związane bardziej ze zdolnościami ogólnymi, niż będące efektem dotychczasowej edukacji matematycznej w szkole) zostaną dzięki umiejętności rozwiązania potwierdzone.

Niezwykle rzadko (by nie powiedzieć wcale) zdarza się, aby nauczyciel zaproponował zadanie o takim charakterze poznawczym również uczniowi słabszemu. Problemowe zadania nie są więc postrzegane jako niezbędny stymulator rozwojowy słabszych intelektualnie uczniów.

[35] D Klus-Stańska, M. .Nowicka, *Sensy i bezsensy ...,* dz. cyt., s. 149 i dalsze.

Tę niekorzystną sytuację pogłębia dodatkowo przyporządkowanie zbiorów zadań do konkretnego poziomu nauczania. Wielu nauczycieli, których uczniowie przeszli do następnej klasy, nie interesuje się na bieżąco zbiorami z lat poprzednich. Zadaniom z tych aktualnych uczeń o niższych kompetencjach matematycznych nie jest często w stanie sprostać. W ten sposób potwierdza się przekonanie o niecelowości zajmowania się zadaniami typu problemowego przez uczniów, których rozwój myślenia matematycznego jest na nieco niższym poziomie. W efekcie są oni poddawani jeszcze silniej stymulacji opanowywania gotowych schematów i pozbawiani możliwości tworzenia własnych procedur postępowania.

Uczeń prezentujący w danym momencie nieco niższe kompetencje matematyczne, w sposób paradoksalny narażony jest więc tym bardziej na tworzenie wiedzy scholastycznej, skostniałej, niemożliwej do wykorzystania w sytuacjach pozaszkolnych. Postrzegany raczej jako bierny odtwórca staje się w pewien sposób ofiarą zaniechania stymulacji poznawczej w szkole. Nie ma okazji do **samodzielnych** eksploracji świata liczb, badania relacji między nimi oraz nadawania im znaczeń matematycznych.

Tymczasem konstruowanie pojęć matematycznych dzięki własnym doświadczeniom może być szansą na kształtowanie matematycznej wiedzy, która pozwoli uczniom rozumieć lepiej świat. Podobnego zdania jest amerykański matematyk W. Thurston, który uczenie matematyki uczniów słabo posługujących się językiem matematyki opiera przede wszystkim na ich osobistych i rzeczywistych doświadczeniach w przeciwieństwie do uczenia „suchej matematyki”[36].

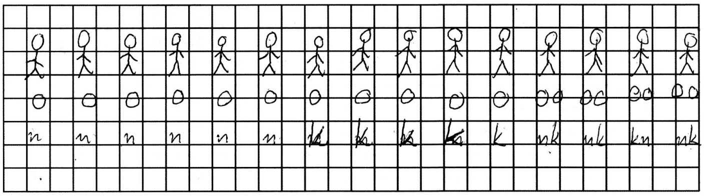
Tego rodzaju proces dostrzegalny był w samodzielnych rozwiązaniach trzecioklasistów, którzy po raz pierwszy zajmowali się jakimś problemem.

W przedstawionym poniżej przykładzie uczeń, odwołując się do własnych doświadczeń gry w piłkę i ustalania drużyny narysował, w jaki sposób przydzielić można chłopcom odpowiednie piłki, matematyzując sytuację. Wprowadzenie zapisu rozwiązania za pomocą formuły matematycznej uznał za zbędne, ponieważ znał już odpowiedź. Jednakże strategia jego myślenia jest tak klarowna, że działania nasuwają się same.

---

[36] Korzystam z tłumaczenia S. Turnaua artykułu W. Thurston *Matmatical Education*. „Notices of the American Matematematical Society” 1990 37/7,. www.wsp.krakow.pl/kdm/Thurston.pdf . 23.03.2007

6. W klasie III każdy chłopiec ma jedną albo dwie piłki. Piłkę do gry w nogę ma 10 chłopców, a piłkę koszykową ma 9. Czterej chłopcy mają obie piłki. Ilu chłopców jest w tej klasie?



Odpowiedź: Jest 15 chłopców

Konieczność odwoływania się do wiedzy osobistej oraz uświadamianie uczniom jej znaczenia dla rozumienia i rozwiązywania zadań, stanowią jedną z podstawowych wartości zadań „na szóstkę".

Rozwiązywanie ich przez uczniów stanowić może przykład doświadczeń poznawczych pozwalających uświadamiać sobie zależności i prawidłowości. Uczeń, który zajmuje się problemem: **Pomyśl jakąś liczbę. Dodaj do niej 7. Od wyniku odejmij 2 a następnie od wyniku odejmij 5. Co otrzymałeś? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?**, uruchamia „własne" działania na wybranych przez siebie liczbach, podejmuje próby odkrywania reguły, choć nie zawsze osiągnie sukces. Jednak tworzące się w trakcie tych badań intuicje stanowić będą bazę dla rozszerzania zakresu znaczeniowego pojęcia odwrotności dodawania i odejmowania.

W kontekście umożliwiania uczniom nadawania osobistych znaczeń matematycznych, zadania „na szóstkę" stanowią propozycję konstruktywistycznych działań edukacyjnych. Ich rolę w procesie nauczania B. Gołębniak postrzega następująco: „ułatwiają dzieciom łączenie nowych idei z posiadaną już wiedzą, umożliwiają ich «poprzeczną» integrację, zachęcają do rozwijania narzędzi przydatnych przy dokonywaniu następnych «konstrukcji»"[37].

W dobie natłoku informacyjnego już małe dzieci mają kontakt z wieloma ciekawymi zagadnieniami prezentowanymi w mediach. Powstaje jednak pytanie, w jakim zakresie poradzą sobie z przetwarzaniem tej wiedzy tak, aby stała się ona użyteczna w rozumieniu otaczającej rzeczywistości.

[37] B. D. Gołębniak, *Konstruktywizm – moda, „nowa religia" czy tylko/aż interesująca perspektywa poznawcza i dydaktyczna?* „Problemy Wczesnej Edukacji" 2005, nr 1(1), s. 14.

W kontekście tego rodzaju stymulowania poznawczego, edukacja szkolna ma niewiele do zaoferowania. Lekcja matematyki w klasach najmłodszych, to raczej ostoja wprowadzania i utrwalania podstawowych pojęć związanych z tą dziedziną, niż czas zaciekawiania otaczającym światem i jego złożonością.

Rozumienie rzeczywistości jest niemożliwe bez poznawania reguł ją porządkujących. Rozwijanie umiejętności klasyfikacyjnych i tworzenia kategorii jest kompetencją intelektualną, która determinuje powstawanie pojęć w umyśle jednostki. Zadania zaciekawiające ucznia, motywujące do szukania zależności, stawiania sobie pytań i szukania odpowiedzi są niezbędne dla kształcenia jego myślenia.

Problemy, których treść w sposób niestandardowy zmusza do szukania własnych dróg rozumienia, nie mogą więc być dostępne jedynie wybranym uczniom, którzy dysponują już stosunkowo wysokimi kompetencjami w tym zakresie. To właśnie uczniowie słabsi powinni takiego rodzaju stymulacji doświadczać.

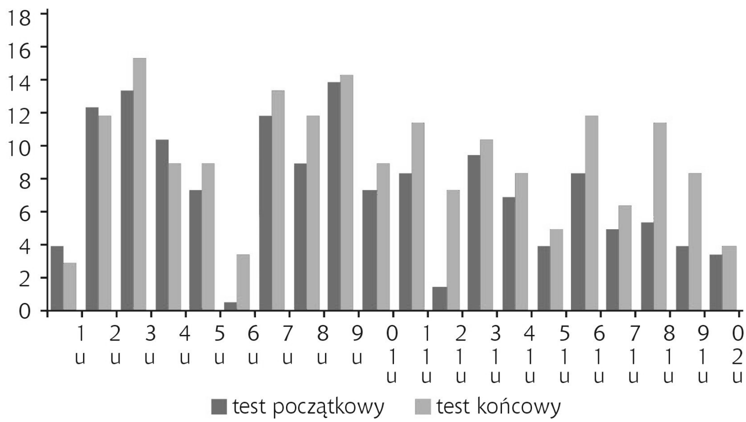
Na przykład odpowiedź na pytanie: **Jak zmieni się różnica, jeśli od odjemnika odejmę 6?** nie może być propozycją zagadki matematycznej skierowanej jedynie do ucznia najlepszego, ale niezbędną aktywnością badawczą ucznia słabszego. Ma on wówczas szansę, dzięki osobistemu rozumieniu działania odejmowania oraz badaniu konkretnych przykładów zmieniających się różnic, uczyć się kategoryzowania na poziomie uogólnionym. Uczeń, który potrafi takiej odpowiedzi udzielić po krótkim zastanowieniu się, osiągnął już wyższy poziom uogólniania i dla niego tego typu zagadka może mieć mniejszą wartość poznawczą.

Znaczenie zadań typu problemowego dla rozwoju myślenia matematycznego uczniów pokazują wyniki eksperymentu przeprowadzonego w klasie trzeciej. Uczniowie klasy eksperymentalnej w czasie jednej jednostki lekcyjnej w tygodniu (w ramach podstawowego czasu zajęć), tworzyli osobiste strategie rozwiązywania zadań problemowych. W klasie kontrolnej edukacja matematyczna miała charakter standardowy.

Przed przystąpieniem do trwającego 6 miesięcy eksperymentu oraz po jego zakończeniu, uczniowie klasy eksperymentalnej i kontrolnej zostali zbadani testem złożonym z 18 zadań, w tym z 10 zadań problemowych i z 8 zadań standardowych. Uczniowie obu klas prezentowali zbliżony poziom umiejętności w rozwiązywaniu zadań w teście wstępnym. Klasa eksperymentalna uzyskała średnią arytmetyczną w teście wstępnym na poziomie 6,52 punktu na 18 możliwych. Klasa kontrolna w teście początkowym uzyskała nieco wyższą średnią, tj. 7,40 punktu. Nie były to różnice istotne statystycznie, choć klasa kontrolna wykazywała pewną przewagę. Sytuacja zmieniła się po zakończeniu eksperymentu, a wyniki testu końcowego przedstawiały się następująco: średnia klasy kontrolnej w teście końcowym wyniosła 9,33 punktu, a średnia w klasie eksperymentalnej 12,14 punktu na 18 możliwych. Uczniowie z klasy eksperymentalnej osiągnęli wyniki wyższe w sposób istotny statystycznie niż uczniowie klasy kontrolnej.

Diagram 1 przedstawia, w jaki sposób zmieniły się wyniki punktowe uzyskane przez poszczególnych uczniów klasy kontrolnej w teście początkowym i końcowym.

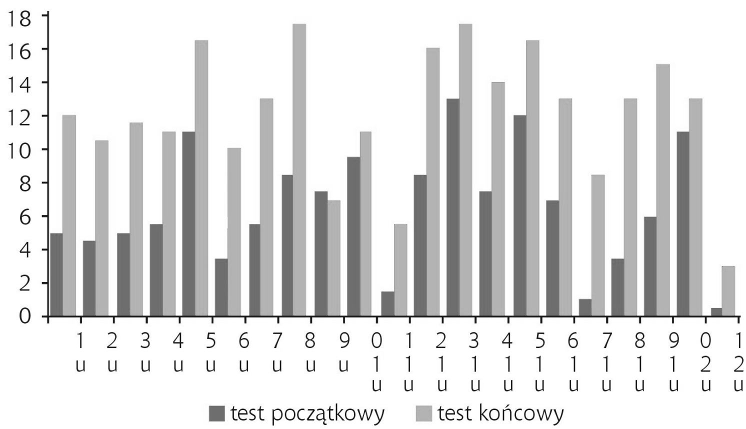
Diagram 1. Porównanie wyników punktowych poszczególnych uczniów klasy kontrolnej w teście początkowym i teście końcowym



W 20 osobowej klasie kontrolnej 16 osób poprawiło wyniki (średnio o 1,7 punktu), natomiast wyniki 3 uczniów się pogorszyły.

Na diagramie 2 przedstawione są wyniki punktowe uzyskane przez uczniów z klasy eksperymentalnej w teście początkowym i teście końcowym.

Diagram 2. Porównanie wyników poszczególnych uczniów klasy eksperymentalnej w teście początkowym i teście końcowym



W 21 osobowej klasie eksperymentalnej 20 uczniów poprawiło swoje wyniki (średnio o 3 punkty) a 1 uczeń osiągnął wynik niższy o 0,5 punktu.

Uczniowie klasy kontrolnej tylko w dziewięciu przypadkach uzyskali w teście końcowym wynik w wysokości powyżej 50% możliwych do otrzymania punktów. W przypadku klasy eksperymentalnej było aż 17 takich uczniów. W teście początkowym natomiast uczniów z wynikami powyżej 50% w klasie kontrolnej było 8, podczas gdy w klasie eksperymentalnej tylko 5.

Uczniowie z klasy eksperymentalnej, którzy mieli cotygodniową sposobność do samodzielnego badania relacji matematycznych w zadaniach nietypowych, zdecydowanie bardziej rozwinęli własne kompetencje matematyczne, niż było to możliwe w przypadku uczniów klasy kontrolnej. Postępy poczynili również uczniowie o niższych umiejętnościach matematycznych.

Istotne dla przeprowadzonego eksperymentu było założenie, że uczniowie będą samodzielnie lub w małych grupach poszukiwać własnych procedur rozwiązania zadań z zadanej im karty pracy. Z moich obserwacji wynika, że część uczniów nie potrafiła wielu z zadań rozwiązać do końca, a nawet ich rozpocząć w sposób prawidłowy. Ci uczniowie dokonywali różnych prób poradzenia sobie, często nieskutecznych, choć nie znaczy to, że bezwartościowych poznawczo.

Na tego rodzaju trudności narażeni byli w sposób oczywisty uczniowie słabsi. Znaczący jednak jest fakt, że pomimo wielu niepowodzeń w czasie indywidualnej pracy nad zadaniami, również uczniowie, którzy w teście wstępnym otrzymali najniższe wyniki, w efekcie poczynili postępy, rozwiązując więcej zadań w teście końcowym. Samodzielnie prowadzone doświadczenia pozwoliły im na efektywniejsze rozumienie wyjaśnień kolegów, którzy zadanie rozwiązali i prezentowali swoje wyniki. Ta sytuacja zdaje się potwierdzać duże znaczenie częstego kontaktu uczniów z zadaniami problemowymi. Wyniki eksperymentu wskazują, że możliwe jest, dzięki rozwiązywaniu zadań typu problemowego, rozwijanie kompetencji matematycznych wszystkich uczniów. **W klasie eksperymentalnej lepsze wyniki uzyskali nawet najsłabsi uczniowie**.

Rozwiązywanie zadań wymagających tworzenia własnych procedur, odpowiadających indywidualnemu poziomowi rozumienia, wspomaga rozwój matematycznego myślenia wszystkich uczniów, choć oczywiście przyrost kompetencji nie jest jednakowy. Każdy uczeń dysponuje nieco innym zasobem wiedzy osobistej, determinującej sposób radzenia sobie z problemem. W tym kontekście zadania „na szóstkę" o zróżnicowanym poziomie trudności stanowić powinny matematyczną propozycję edukacyjną dla **wszystkich uczniów.**

Nieistotne jest, czy proponowane zadanie znajduje się w zbiorze „przypisanym" do poziomu danej klasy. Czynnikiem decydującym powinien być poziom aktualnych umiejętności ucznia. Jeśli jego możliwości poznawcze nie są jeszcze wystarczające, może rozwiązywać zadania ze zbioru dla klasy niższej. Najistotniejsza jest możliwość nadawania matematycznym problemom wymiaru indywidualnego, osobistego, pomagającego uczniowi w doświadczaniu poczucia mocy sprawczej oraz kontroli poznawczej.

W tym kontekście niepokojąco brzmią głosy nauczycieli, którzy niechętnie postrzegają próby podejmowania przez słabszych uczniów wyzwań, na przykład chęć wzięcia udziału w konkursie matematycznym KANGUR.

Wielu nauczycieli dokonuje różnego rodzaju manipulacji mających na celu zniechęcenie słabego ucznia w obawie przed porażką, jaka niechybnie go spotka: *Wszyscy mamy głód sukcesu i dzieci też, a zadania z KANGURKA mogą to zniszczyć.*

Tymczasem lepiej jest, gdy uczniowie rozwiązują zadania trudniejsze, nawet nie dochodząc do końcowego wyniku, niż wówczas, gdy nie mają zupełnie okazji do zajmowania się nimi[38].

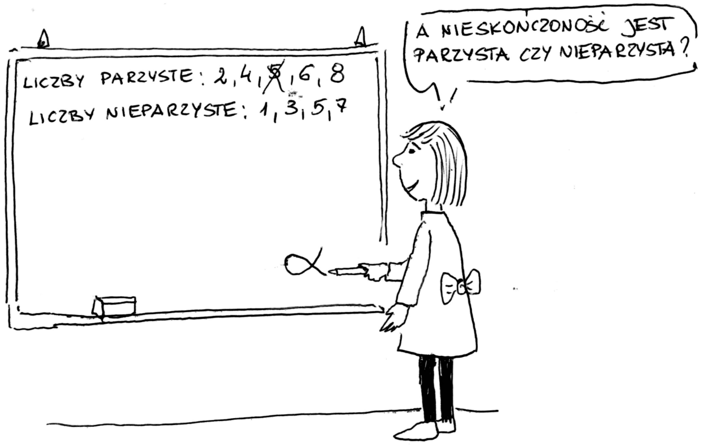
Podczas rozmów z nauczycielkami spotykam się z wypowiedziami promującymi udział w konkursach wszystkich chętnych dzieci: *Na wyrównawczych, jak pracuję teraz, to niektóre [dzieci] z zajęć wyrównawczych wysłałabym na konkurs. Jeśli dziecko chce to niech idzie. Wyniki nie są najważniejsze.* Należą one jednak do jednostkowych.

Jakże często reakcja nauczyciela jest następująca: *Jeśli zgłosi się dziecko, które moim zdaniem nie ma szans, to bardzo trudna sytuacja. Mówię wówczas, że przemyślę sprawę, ale po cichu podejmuję decyzję, że nie pójdzie.*

Niestety, przekonania tego typu, sygnalizowane (często nieświadomie i w dobrej wierze) dzieciom w klasach najmłodszych, mają charakter działań stygmatyzujących, ograniczających *a priori* możliwości uczniów. Nauczyciele są bowiem swego rodzaju lustrem, w którym przeglądają się uczniowie, nadając znaczenia swoim działaniom

[38] D. Klus-Stańska, M. Nowicka, *Sensy i bezsensy ...,* dz. cyt.

intelektualnym i osiągnięciom szkolnym. Niedostatek wiary w możliwości matematyczne kształtuje się przede wszystkim na lekcjach, ponieważ poza klasą uczenie się matematyki na sposób szkolny jest praktycznie nieobecne. Uczniowie kształceni w takiej ideologii oceniają przez jej pryzmat swoje kompetencje i moc sprawczą, zaniżając wiarę w umiejętności matematycznego myślenia.



Uczniowie w tym wieku nie są w stanie tworzyć własnych sprytnych metod wykonywania obliczeń

Ustosunkowując się do powyższego stwierdzenia badani w 2008 roku nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej w miażdżącej większości (97,4%) wypowiedzieli się akceptująco. Jest to wyraz powszechnego wśród nich braku zaufania do myślenia najmłodszych uczniów. Ogólne przekonanie o prawdziwości tego stereotypu generować może (i często tak właśnie się dzieje) nieobecność na lekcjach matematyki sytuacji sprzyjających umożliwianie tworzenia przez uczniów osobistych strategii liczenia.

Tymczasem już uczniowie najmłodszych klas powinni mieć okazję do liczenia na swój sposób, czyli zdobywania doświadczeń wspomagających konstruowanie różnych strategii, często zróżnicowanych w zależności od rodzaju przykładu. Proces tego typu powinien w umysłach dzieci mieć szansę zaistnienia już w przypadku wczesnych doświadczeń liczbowych.

Dodawanie i odejmowanie w zakresie 10 ma na tyle nieskomplikowany[39] (i w związku z tym powtarzalny w umysłach różnych ludzi) schemat postępowania, że nauczycielom może umknąć świadomość niejednorodności rozumienia tych operacji przez wszystkie dzieci w klasie, szczególnie w tym samym czasie. Komplikowanie się obliczeń w ramach kolejnych tematów zajęć może stać się obszarem konstruowania przez uczniów wiedzy związanej z indywidualnymi wyobrażeniami.

Na przykład sposób obliczania w pamięci wyniku dodawania czy odejmowania może być dostosowywany do liczb występujących w działaniu w sposób indywidualny. Jeśli mamy do czynienia z przykładem typu: **41 + 32,** można dodawać najpierw dziesiątki, a potem jedności i wszystko zsumować. Nie jest to jednak jedyny sposób. Równie poprawny proces obliczania mógłby mieć inną postać: **40 + 33** czy **43 + 30**. Jeszcze więcej możliwości może generować przykład innego typu: **28 + 37**. Strategia dodawania najpierw dziesiątek a potem jedności i sumowania całości wydaje się dużo mniej ekonomiczna niż na przykład obliczenie: **30 + 40 – 5**[40].

[39] Użyłam tu określenia „nieskomplikowany” jedynie w konfrontacji z tworzonymi w dalszym etapie nauczania operacji matematycznych, strukturalnie bardziej złożonymi.
[40] Przykłady różnych sposobów obliczania działań w pamięci można znaleźć między innymi w książce M. Dąbrowskiego, *Pozwólmy dzieciom…*, dz. cyt.

Nauczyciele często wyrażają przekonanie, że wyuczenie uczniów jednego, uogólnionego sposobu, zapewni tym ostatnim narzędzie o najogólniejszej możliwości wykorzystania. Choć tego rodzaju myślenie nie jest pozbawione racji, nie pozwala jednak na dostrzeżenie znaczenia wytwarzania przez uczniów własnych sposobów obliczeniowych dla rozwoju ich kompetencji rachunkowych (i nie tylko) we wczesnym okresie uczenia się matematyki.

Proponowanie jednej „najlepszej" metody staje się więc jednocześnie źródłem ograniczania poznawczego. Tworząc różne sposoby obliczania, uczniowie lepiej rozumieją rolę liczb w działaniach i ich wzajemne zależności. Próbując na przykład obliczyć w pamięci **31 – 16,** mogą korzystać z matematycznej reprezentacji odejmowania na bardzo różne sposoby. Mogą obliczyć następująco: **31 – 20 + 4.** Uczeń, który uruchomiłby taką procedurę, ujawnia rozumienie faktu, że odjęcie większej, niż zamierzano liczby, skutkuje mniejszą różnicą, więc trzeba ją powiększyć o brakującą wartość. Inaczej myślałby uczeń obliczający: **36 – 16 – 5**. Zastosowany sposób wskazuje na świadomość relacji między powiększeniem odjemnej a różnicą. Kolejny przykład wskazuje na zauważenie przez ucznia bardzo ciekawej zależności: **30 – 15**. Jest to ważna dla budowania rozumienia narzędzi matematycznych w starszych klasach zależność pokazująca, że jeśli zmniejszy się w taki sam sposób odjemną i odjemnik, to różnica nie zmieni się.

Dokonywanie przez uczniów obliczeń za pomocą osobistych strategii z jednej strony umożliwia nauczycielowi głębsze „wejrzenie" w sposoby rozumienia przez uczniów działań na liczbach, z drugiej korzystnie wpływa na rozwój ich myślenia. Pozwala bowiem na konstruowanie nowych sposobów liczenia, generując matematyczną wiedzę. Dzięki temu jest ona bardziej elastyczna i użyteczna, ponieważ sposoby obliczania mogą ulegać modyfikacjom, w zależności od „wyglądu" konkretnego przykładu.

Badani w zakresie umiejętności matematycznych w 2008 roku uczniowie klas trzecich dokonywali obliczeń w zakresie trzech działań na liczbach dobranych w taki sposób, żeby zniechęcały do obliczeń pisemnych.

W jednej wersji testu zadanie miało postać następującą:

Oblicz tak, jak Ci najwygodniej.

999 + 86 106 – 99 150 : 25

W drugiej wersji zmienione były liczby w przykładach do obliczenia.

Oblicz tak, jak Ci najwygodniej.

199 + 87 1007 – 999 140 : 35

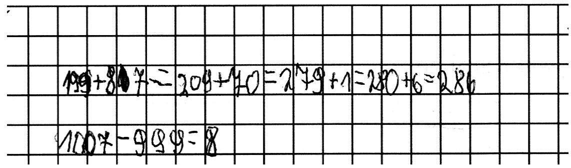
Sposoby liczenia uruchamiane przez uczniów odwoływały się przede wszystkim do jednej strategii. Okazało się, że wysoki stopień trudności wykonywania obliczeń pisemnych w tych przykładach, nie zniechęcił przeważającej części uczniów i w pierwszym działaniu ponad 80 % (średnio 85,15%) próbowało zastosować dodawanie pisemne.

Część uczniów jednak podjęła próbę obliczenia tych działań w inny sposób, uruchamiając z związku z tym interesujące strategie[41].

Jeden z badanych trzecioklasistów – autor poniższego przykładu, postanowił dodawać „po kawałku". Liczbę 87 zamienił na części i po kolei dodawał, jak mu było wygodniej. Najpierw dodał 10 i zostało jeszcze 77, z czego początkowo „wykorzystał" tylko 70, a następnie

[41] Por. M. Dąbrowski, (red.), *Badanie umiejętności podstawowych …,* dz. cyt.

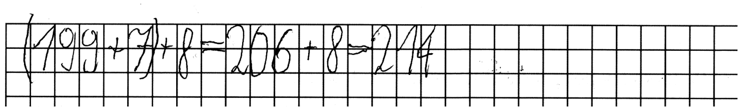
dopełnił do pełnej dziesiątki, dodając 1 i teraz zostało jedynie 6 do dodania.



Inny uczeń próbował zastosować podobną strategię, zapominając wprawdzie, że zostało mu do dodania 80 a nie 8. Cała procedura jest jednak poprawna.

Oblicz tak, jak Ci najwygodniej.

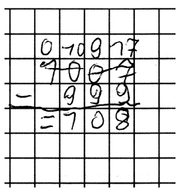
199 + 87 **1007 – 999** **140 : 35**



W przypadku działania odejmowania sytuacja była bardziej złożona, ponieważ stopień trudności obliczania sposobem pisemnym był bardzo wysoki. Odejmowanie, w którym odjemna zawiera zera, stanowi nie lada wyzwanie również dla starszych uczniów.

Podany niżej przykład ilustruje tę znaczną trudność.

1007 – 999



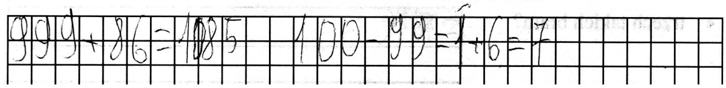
Zdecydowanie rozsądniejszym wyjściem byłoby więc obliczanie w inny sposób. Badani trzecioklasiści preferowali jednakże strategię, która wydała im się bezpieczniejsza. Przykład: **1007 – 999** próbowało obliczyć pisemnie aż 82% uczniów. Poprawnie obliczyło w ten sposób 50,6%. W przypadku **106 – 99** postępowało analogicznie nieco mniej osób (76,3%). Tu przyjęta strategia zakończyła się sukcesem dla 53,5% uczniów. Być może sama „długość” liczb w pierwszym przykładzie wywołała w umysłach uczniów natychmiastowe skojarzenie z obliczeniami pisemnymi. Podjęli więc ten trud, nie zastanawiając się nad specyfiką tego działania i liczb biorących w nim udział. W przypadku drugiego odejmowania liczby wydały się bardziej przystępne wielkością i łatwiej kojarzyły się ze strategiami obliczania w pamięci.

Podejmowane przez uczniów próby odejmowania w inny, niż pisemnie sposób, okazały się interesujące, choć były już mniej zróżnicowane niż w przypadku dodawania.

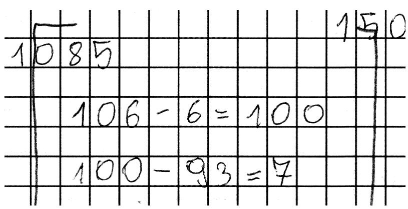
Autor pierwszego obliczenia ujawnił świadomość, że zmniejszenie odjemnej pomniejsza różnicę. Uczeń najpierw odjął 99 od liczby 100, a następnie różnicę powiększył o brakujące 6.

5. Oblicz tak, jak Ci najwygodniej.

999 + 86 106 – 99 150 : 25



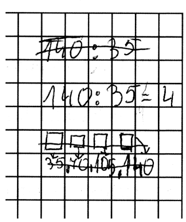
Kolejny przykład pokazuje strategię odejmowania „po kawałku". Uczeń najpierw odjął część liczby 99 w taki sposób, aby „wyrównać" odjemną do setki. Następnie odjął jeszcze to, co zostało z odjemnika, a więc 93.



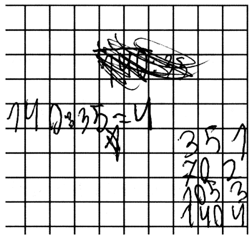
Najbardziej interesujące uczniowskie strategie pojawiły się w rozwiązaniach ostatnich przykładów – dotyczących dzielenia. Ponieważ dzieci w klasie trzeciej nie dysponują jeszcze kompetencją w zakresie dzielenia pisemnego przez liczby dwucyfrowe, założeniem badawczym było zmotywowanie uczniów do generowania osobistych strategii liczenia.

Autorzy poniższego rozwiązania doliczali kolejne „trzydziestki piątki", aż uzyskali 140. Inaczej mówiąc, badali za pomocą dodawania, ile razy liczba 35 „zmieści" się w 140.

140 : 35

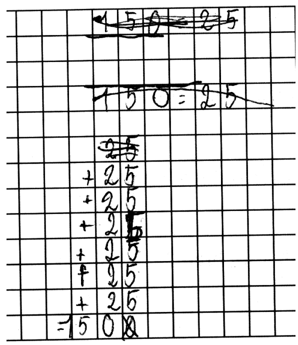


140 : 35

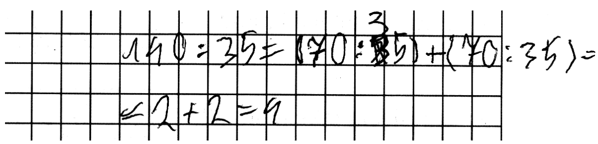


Podobnie radził sobie kolejny trzecioklasista, szukając, ile razy trzeba dodawać 25, żeby otrzymać 150.

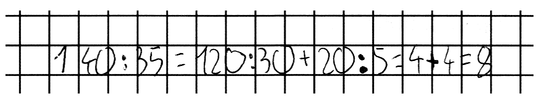
150 : 25



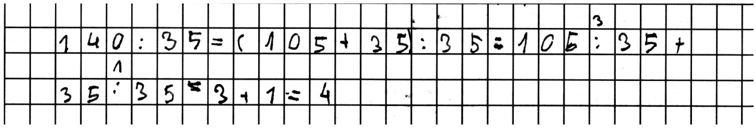
Bardzo dobrym pomysłem okazało się również skorzystanie z rozdzielności dzielenia względem dodawania. Autor tego obliczenia opisał formułą arytmetyczną wyjaśnienie, że dzieląc jakąś liczbę przez inną można ją dzielić częściami. Miał świadomość, że 70 dzieli się przez 35, więc dzielną 140 „rozerwał" na dwie części w taki sposób, żeby każda dała się podzielić na 35.



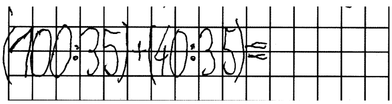
W kolejnym przykładzie, dla odmiany, widoczny jest brak rozumienia przez ucznia rozdzielności dzielenia. Autor próbował zastosować to prawo, kierując się jednak bardziej wyglądem liczb (120 łatwo dzieli się przez 30, a 20 dzieli się przez 5), niż rozumieniem, jakiego rodzaju operację powinien wykonać.



W rozwiązaniu innego trzecioklasisty widoczny jest wysoki poziom rozumienia relacji między liczbami w dzieleniu.



Następny uczeń również próbował odwoływać się do tej umiejętności, ale tu zdecydowanie widoczny jest jedynie jej asocjacyjny charakter. Rozdzielił liczbę 140 w sposób analogiczny do stosowanych najczęściej w klasie w przypadku rozdzielności mnożenia względem dodawania[42]. W tym jednak przypadku strategia zawiodła.



Przedstawione powyżej sposoby radzenia sobie przez uczniów klas najmłodszych z obliczaniem działań, wskazują na fakt, że są oni w stanie tworzyć własne sposoby obliczania, pod warunkiem, że mają do tego okazje na lekcjach matematyki. Powtórzę jeszcze raz, że taka możliwość stanowi doskonałą sposobność do pogłębiania rozumienia działań, relacji między liczbami oraz generowania elastycznego myślenia matematycznego.

[42] Na lekcjach dzieci uczone są najczęściej rozdzielania wielocyfrowego czynnika na setki, dziesiątki i jedności. Bardzo rzadko pojawia się inny sposób rozdzielania jednej z liczb na części. Tymczasem wiele obliczeń w zadaniach typu: **W małej zgrzewce wody mineralnej jest 8 butelek, a w dużej zgrzewce 14 butelek. Ile butelek jest razem w czterech małych i czterech dużych zgrzewkach?** wykonuje się dużo łatwiej dodając najpierw liczbę butelek w dużej i małej zgrzewce (8 + 14), mnożąc następnie przez liczbę zgrzewek (22 • 4 = 88).

Uczeń powinien wiedzieć, kiedy się odzywać

Nauczyciele często wyrażają przekonanie, że uczeń nie może odzywać się niepytany. Zdaniem wielu, w kanon kulturowy szkoły wpisane jest takie zachowanie ucznia na lekcji, które nie zaburza jej toku. U źródeł wspomnianego oczekiwania leży postrzeganie szkolnego procesu edukacyjnego bardziej jako nauczania niż uczenia się. Stąd nacisk na uważne słuchanie nauczyciela, nieprzerywanie mu, wykonywanie zadanej pracy ściśle według jego poleceń.

Jeśli uczeń wyraża jakieś wątpliwości, próbuje nadać znaczenie nowym treściom, słyszy w wielu wypadkach: *Kochanie, nad czym ty się zastanawiasz? Przecież ja to tłumaczyłam. Mam powtórzyć? Ja sądzę, że słyszałeś*[43].

Próby nawiązywania interakcyjnego procesu przez ucznia, zbywane są przez nauczycieli w taki sposób, żeby miał on świadomość niestosowności zachowania. Kiedy uczeń podaje na przykład gotowy obliczony przez siebie wynik, nauczyciel sygnalizuje: *Cieszę się, że wiesz, ale zgłoś się*. Mniej istotny jest fakt, że uczeń już obliczył, jest samodzielny, ma wiedzę. Na plan pierwszy wysuwa się konieczność zachowania narzuconej przez nauczyciela formy „zgłaszania się", tak obcej konwencji swobodnej rozmowy. Tymczasem swobodne wypowiadanie się uczniów rozwija język matematyczny, który jest przez niektórych dydaktyków traktowany jako rodzaj jednego z języków obcych: „Zatem powinniśmy spodziewać się, że uczniowie będą używać języka matematyki na różne sposoby, formalne i nieformalne, i nie powinniśmy niepotrzebnie ograniczać ich swobodnej ekspresji"[44].

Deklaratywne wypowiedzi nauczycieli wskazywałyby na podobne traktowanie wypowiedzi uczniów. Badani nauczyciele wczesnej edukacji poproszeni o ustosunkowanie się do stwierdzenia: *Należy pozostawić dzieciom pełną swobodę wypowiadania się w czasie lekcji*, w większości (55,7%) zadeklarowali jego akceptację. Nie jest do końca jasne, w jaki sposób respondenci rozumieją *swobodę wypowiadania się uczniów na lekcji.* Wbrew bowiem przytoczonym deklaracjom, obserwacje lekcji ukazują nieco inną rzeczywistość.

---

[43] Przytaczane wypowiedzi nauczycieli są autentyczne. Zostały zarejestrowane podczas obserwacji lekcji w klasach trzecich w 2008. Por. M. Dąbrowski, *Edukacyjna codzienność klasy trzeciej*. [w:] M. Dagiel, M. Żytko, *Badania umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008. Wiele różnych…*, dz. cyt.

[44] Z. Usiskin (tłumaczenie W. Zawadowski), *Matematyka jako język*. NiM+TI nr 71 2009, s. 27.

Uczniowie na lekcjach matematyki wypowiadają się jedynie wówczas, gdy odpowiadają na pytanie nauczyciela. Na obserwowanych zajęciach nie zauważono elementu dyskusji uczniów z nauczycielem, ani tym bardziej, uczniów między sobą. Dzieci odpowiadały jedynie na pytania nauczyciela, najczęściej krótko podając wyniki zadań. Jeśli więc dochodziło na lekcji do interakcji nauczyciel - uczeń, miała ona charakter jednokierunkowy.

Uczniowie z klas początkowych nieczęsto mają okazję do tego rodzaju doświadczeń, w których możliwe jest, a jeszcze lepiej, świadomie oczekiwane przez nauczyciela, zadawanie pytań przez ucznia na temat będący aktualnie w kręgu jego zainteresowania. Uczestnicząc w zajęciach matematycznych uczeń sporadycznie ma okazję do wypowiadania się w sytuacjach nowych poznawczo i zastanawiania się nad nową wiedzą.

Lekcje matematyki są głównie terenem pytań odwołujących się do wiedzy podanej wcześniej podobnie, jak w przytoczonym poniżej przykładzie z klasy drugiej.

N: *Za pomocą czego zapisane są liczby dwucyfrowe? Za pomocą czego?*

U1: *Liter.*

N: *Za pomocą liter? Za pomocą czego?*

U2: *Cyferek.*

N: *Tak. Za pomocą cyfr zapisuje się liczby.*

Sprawdzanie wiedzy za pomocą zadawania tego typu pytań (również przy okazji jakiegoś zadania), jest bardzo powszechną formą komunikacji na styku nauczyciel – uczeń. Nauczyciele często inicjują interakcję z uczniem przede wszystkim w celu postawienia dwuwartościowej diagnozy: umie albo nie umie. Umyka wówczas z pola widzenia coś najcenniejszego – sposób myślenia ucznia. Nawet w sytuacji bardzo sprzyjającej tego rodzaju rozmowie, szybko zostaje ona ograniczona do poziomu pogadanki sprawdzającej wiedzę.

Na jednej z obserwowanych przeze mnie lekcji w klasie drugiej uczniowie zajmowali się następującym problemem: **Wstaw odpowiednie znaki działań, aby całe działanie było poprawne: 2 2 2 = 2.** Jeden z uczniów napisał na tablicy rozwiązanie: 2 + 2 – 2 = 2, które zostało zaakceptowane przez nauczycielkę jako jedyne poprawne i satysfakcjonujące. Za chwilę jednak kolejny uczeń zapytał, czy może zapisać jeszcze jedno rozwiązanie.

U: *Ja znalazłem jeszcze taki sposób: 2 – 2 + 2 = 2.*

N: *Dlaczego jest dobry?*

U1: *Bo tylko się zmieniają znaki.*

N: *Tak? Ale spróbuj to policzyć.*

U1: *2 – 2 = 0 i dodać dwa, to jest równe 2.*

N: *Co robimy najpierw: dodawanie czy odejmowanie?*

Pytanie nauczycielki rozpoczynające się od słowa „dlaczego" wskazywałoby na chęć odkrycia sposobu myślenia ucznia. Jednak kierunek kontynuowanej rozmowy kanalizował zainteresowanie nauczycielki jedynie na uzyskaniu odpowiedzi na pytanie: *Jaka jest kolejność działań?* Charakterystyczne jest tu dość jednowymiarowe zainteresowanie nauczycielki myśleniem matematycznym ucznia. Przede wszystkim chodziło o informację, czy uczeń zna kolejność działań. Nauczycielka nie dostrzegała raczej, że w propozycji ucznia znajdować się może wiele intuicji oraz procedur dziecięcych, które są poprawne albo nie. Uczeń mógł na przykład poprawnie wstawić znaki działań, ale obliczać według błędnego schematu (na przykład od prawej do lewej).

Koncentrowanie się nauczyciela na sprawdzającej roli pytań nie rozwija jego wiedzy o myśleniu ucznia. Brak możliwości wyjaśniania własnego sposobu postępowania i uzasadniania go, nie pomaga też uczniowi. Jest to bowiem aktywność niezbędna dla rozwijania myślenia matematycznego uczniów klas początkowych. Zadawanie pytań głównie sprawdzających wiedzę nie generuje dyskusji, bowiem relacja między uczniem i nauczycielem natychmiast przyjmuje postać pogadanki, w której jedynie nauczyciel (najczęściej w sposób arbitralny) decyduje o poprawności odpowiedzi. Nie ma wówczas miejsca na merytoryczną dyskusję o problemie matematycznym. Niedostatek takich doświadczeń ogranicza rozwijanie twórczej aktywności dziecka.

Zupełnie inaczej ma szansę myśleć uczeń, którego nauczyciel stymuluje właściwie postawionymi pytaniami. I choć dziecięce znaczenia matematyczne nie zawsze poddają się werbalizacji, a często funkcjonują na poziomie intuicji, ich poznawcza siła przejawia się w możliwości ich „używania" w sposób twórczy.

W kolejnym przykładzie ukazana jest chęć odkrycia przez nauczyciela sposobu myślenia jego uczniów.

Podczas rozwiązywania zadania w klasie drugiej: **Powiedz bez obliczania, ile wynosi ćwiartka z iloczynu 4 · 7?** nauczycielka chciała przybliżyć rozumienie ćwiartki.

N: *Jak mam jabłko i chcę mieć jego ćwiartkę, to co muszę zrobić? Podzielić jabłko na cztery równe części* [kroi jabłko na ćwiartki]. *Paweł, choć, pokaż ćwiartkę.*

U1: [podchodzi i podnosi do góry jedną część].

N: *Świetnie. Ta jedna część, to jest ćwiartka.. Czyli jabłuszko składa się z ilu ćwiartek?*

UUU: *Z czterech.*

N: *Świetnie, czyli, żeby wskazać ćwiartkę, to muszę liczbę podzielić na...[zawiesza głos].*

U2*: Cztery.*

N: *A kto mi powie, ile wynosi ćwiartka z szesnastu?*

U3: *Cztery.*

N: *Cztery. A skąd wiesz?*

N: *Bo trzeba 16 podzielić na dwa, to będzie 8, a potem jeszcze raz podzielić na dwa.*

Uczniowie mieli tu, choć częściowo, ale jednak okazję do werbalizowania swoich pomysłów, ukazując sposób rozumienia pojęcia „ćwiartka" oraz pewną gotowość do postrzegania go jako części całości (intuicja niezbędna do rozumienia ułamka).

Interakcyjność nauczyciel – uczeń nawet na poziomie początkowych klas może więc mieć rzeczywiście charakter dwukierunkowy.

I tym razem odwołajmy się do przykładu z zajęć matematycznych z klasy drugiej. Uczniowie szukali wszystkich iloczynów, za pomocą których można przedstawić liczby: 6, 7, 11, 12. W zadaniu pojawiło się również pytanie, co sądzą o tych liczbach.

Wykorzystując te doświadczenia, nauczycielka po pewnym czasie podjęła następujący dialog:

N: *Dlaczego tak jest, że niektóre liczby można w postaci iloczynów przedstawić, a 11, chociaż tak blisko 12, zachowuje się inaczej?*

U1: *Dlatego, bo to są nieparzyste.*

Intuicja ucznia podpowiada mu prawidłowy kierunek myślenia, choć nie jest on do końca prawdziwy. Nauczyciel nie zanegował jego wypowiedzi, starając się jednak zwrócić uwagę uczniów na inne cechy określające liczby pierwsze.

N: *Świetnie, czyli uważacie, że liczby nieparzyste „gorsze” są do takiego przedstawiania?*

U2: *Tak.*

U3: *Ja chciałbym powiedzieć... dlatego, że jak jest na przykład 8, to da się podzielić na dwie czwórki na przykład, jak jest 11, to nie da się.*

N: *A czy 15, to jest liczba parzysta czy nieparzysta?*

U4: *Nieparzysta.*

N: *A czy da się inaczej niż 11 przedstawić? Poszukajcie.*

U4: *3 razy 5 to jest 15.*

N: *Aha, to znaczy, że są pewne liczby nieparzyste, które się dadzą jeszcze inaczej przedstawić, prawda? A czy ktoś z was potrafiłby podać jeszcze jedną taką liczbę, która się nie da przedstawić inaczej, jak tylko ta liczba razy 1 albo 1 razy ta liczba?*

U5: *17?*

N: *Dobrze Kacper pomyślał? Jak myślicie, czy Kacper ma rację?*

UUU: *Tak.*

Nauczycielka starała się cały czas tak prowadzić rozmowę, żeby uczniowie sami oceniali poprawność własnych pomysłów. Zachęcała również do wyszukiwania innych liczb pierwszych, nie definiując ich, ani nie nazywając. Jednocześnie starała się kierować myśleniem dzieci w taki sposób, aby miały okazję do tworzenia intuicji liczb pierwszych.

N: *Takie liczby, które właśnie nie dadzą się przedstawić inaczej, nazywają się... Może wiecie jak?*

U7: *19.*

U8: *Nieparzyste.*

N: *Owszem, w pewnym zakresie, ale pamiętasz, że 15 taka nie była.*

U8 [poprawia się]: *Niektóre tylko.*

U9: *Jeszcze liczba 1.*

N: *A na ile sposobów da się ją przedstawić?*

U9: *1 razy 1.*

N: *Dobrze, a ten drugi sposób?*

U9: *1 razy... Jeden tylko.*

N: *Tak. Liczba 1 da się przedstawić tylko na jeden sposób.*

U10: *Jeszcze chciałam powiedzieć, że 2 da się tak przedstawić. 2 razy 1 i 1 razy 2.*

N: *Świetnie. Macie ciekawe przemyślenia o tych liczbach.*

Nauczycielka w trakcie rozmowy z uczniami odwoływała się do ich doświadczeń osobistych z początku lekcji, starając się, aby drogą eliminacji uczniowie sami próbowali tworzyć zbiór liczb, któremu samodzielnie również nadają określone cechy. Uczniowie w końcu nie usłyszeli nazwy „liczby pierwsze". Nie było to ważne. Najistotniejsza była ich świadomość, że są liczby o pewnej własności, które tworzą określoną kategorię. Nazwa jest już kwestią umowną. Z punktu widzenia dziecięcego rozwijania myślenia matematycznego nazwa ma mniejsze znaczenie, choć oczywiście dziecko powinno w końcu ją poznać. Jednak proces klasyfikowania liczb i badania ich cech jest osobistym wytworem każdego umysłu, nadającym znaczenie nazwie. Określenie bez tych znaczeń jest tylko pustym słowem, nieprzydatną wiedzą.

Na przywołanych zajęciach matematycznych dzieci mogły sobie uświadamiać własną wiedzę dzięki autentycznej rozmowie o przeprowadzonych przez uczniów badaniach na liczbach. Było to zupełnie inne doświadczenie poznawcze, niż słuchanie i zapisywanie przekazywanej przez nauczyciela definicji, na przykład liczby pierwszej.

Pozorna dialogowość natomiast przedstawiona jest w innym przykładzie z zaobserwowanych zajęć w klasie trzeciej. Nauczycielka chciała wprowadzić sytuację nietypową związaną z próbą odwołania się do wiedzy uczniów. Jednak sposób prowadzenia „rozmowy" zniweczył potencjał twórczej aktywności tych ostatnich

N: *Przechodzimy do treści matematycznych. Pobawimy się w ministrów finansów.*

U1: *Minister ma od tego ludzi.*

N: *Jędrek nie jesteś ministrem, nie masz 18 lat.*

Po zakończeniu ćwiczenia:

N: *Kto już skończył? Pospieszcie się ministrowie. Każdy minister ma swojego księgowego. Waszym księgowym będzie kolega z ławki. Kto może być ministrem finansów – nie popełnił błędu?*

Na lekcjach matematyki w klasach najmłodszych trudno również zaobserwować sytuacje, w których uczniowie dyskutują między sobą, szczególnie, jeśli dzieje się to poza pełną kontrolą nauczyciela. Interakcje uczeń – uczeń są postrzegane przez nauczycieli dość wąsko, najczęściej jako praca w parach.

Na obserwowanych lekcjach propozycje pracy uczniów w grupach (pojawiające się jednostkowo) dotyczyły raczej aktywności mało twórczej. Uczniowie byli na przykład proszeni przez nauczyciela o wzajemne sprawdzenie poprawności wykonania obliczeń. Innym przykładem była sytuacja, w której nauczyciel prosił dobrego ucznia o wytłumaczenie jakiegoś zagadnienia słabszemu koledze. Poza tymi propozycjami nauczyciele pytani o pracę uczniów na matematyce w małych grupach najczęściej odpowiadali: *Klasa pierwsza jeszcze tego nie potrafi*; *Na matematyce jeszcze nie próbowałam;* czy wręcz: To *się nie sprawdza, bo jedno dziecko robi wszystko, a reszta nic*.

Niedostatek możliwości dyskutowania na lekcjach matematyki ogranicza chęć stawiania pytań. Uczeń, który nie może odzywać się niepytany, pozbawiony jest automatycznie prawa do spontanicznego zadawania pytań. Nierzadka jest sytuacja, gdy nauczyciel „gasi” tego typu próby, kategorycznie stwierdzając: *Ja zadaję pytanie.*

Charakterystyczne są wypowiedzi nauczycieli, którzy wspominali, jak ciężko pracowało im się na początku z tą klasą, ponieważ: *Każdy uczeń ciągle miał rękę w górze i o coś chciał zapytać. Teraz* – konstatowali z ulgą – *wreszcie nauczyły się i już nie pytają.*

Fakt, że dzieci przestały pytać, powinien być dla nauczyciela niepokojącym sygnałem ograniczania potrzeby interakcji ze strony uczniów oraz ich zmniejszającego się zainteresowania wiedzą. Jest to wszak rodzaj zachowania obcego prawidłowej rozwojowo aktywności intelektualnej dziecka w tym wieku.

Kiedy małe dziecko zadaje nam pytania wiemy, że weszło w okres samodzielnego analizowania otaczającej rzeczywistości. Każdy rodzic zna ten okres w życiu swojego dziecka, gdy „zadręczało” ono pytaniami bezustannie. Czas przedszkola jest najbardziej kojarzony z tego rodzaju aktywnością dziecka. Jesteśmy wówczas zaskakiwani interesującymi porównaniami, hipotezami czy prośbami o wyjaśnienie.

Pytań (również takich, na które nie umiemy odpowiedzieć) jest ogromnie dużo, ale cieszymy się, że nasze dziecko tak ciekawie myśli. Zadawanie pytań przez dzieci przedszkolne to aktywność, którą rozumiemy i akceptujemy.

Wiele jednak wskazuje na to, że z chwilą pójścia do szkoły wytraca ona zdecydowanie cały napęd – mały uczeń szybko przestaje pytać. Istotne więc wydaje się uświadomienie sobie, dlaczego tak się dzieje.

W powszechnym przekonaniu rozpoczęcie nauki w szkole jest często postrzegane jako koniec dzieciństwa. To wówczas dzieci zamieniają „niepoważne” zabawy na „prawdziwą” naukę. Tak naprawdę oznacza to koniec „samowolnych”, interesujących dziecko pytań. Kierunek ciekawości uczniowskiej wyznacza teraz nauczyciel i program nauczania. Wielu siedmiolatków[45] przekracza pierwszy raz próg szkoły z nadzieją na zaspokojenie własnej ciekawości oraz na poznanie wielu fascynujących zjawisk. Niestety, również wielu z nich mogłoby być bohaterami historyjki, która mając nas bawić, powinna jednocześnie głęboko niepokoić: *Jaś poszedł pierwszy raz do szkoły niezwykle podekscytowany. Po powrocie był nieco markotny i wcześnie położył się spać. Na drugi dzień rano mama budzi go – wstawaj, musisz iść do szkoły. Jaś odpowiedział – przecież wczoraj już tam byłem.*

Niektóre dzieci jeszcze przez jakiś czas próbują pytać o sprawy, które je zaciekawiły; tak trudno czasami się powstrzymać… Po pewnym czasie już wiedzą, że pani tego nie lubi.

Przytoczę słowa jednej z nauczycielek, w jej przekonaniu dowodzące profesjonalizmu: *Aczkolwiek najbardziej przeszkadzało mi to, że zanim zdążyłam dosłownie otworzyć dziennik, to dzieci zadawały każde z osobna tysiące pytań: a co dzisiaj będzie na lekcji? A czy sprawdzi pani pracę domową? A czy to czy tamto? Myślę, że największy sukces pedagogiczny to to, że nauczyły się troszeczkę dyscypliny. Wiedzą, że jest czas, żeby się odezwać.* Powstaje pytanie, czy uczeń wie, kiedy jest taki czas, jeśli zawsze decyduje o tym nauczyciel.

Dzieci w szkole są więc za pomocą specjalnych zabiegów pedagogicznych „oduczane” zadawania pytań. W efekcie kilkuletniego treningu przestają pytać o interesujące je zjawiska, a może nawet przestają je zauważać. Niemożność zadawania pytań jest jedną z przyczyn generowania bierności poznawczej uczniów.

Obserwacje zajęć w klasach trzecich ukazują dramatyczny efekt procesu „dyscyplinowania” uczniów. Na lekcji zadaje pytania przede wszystkim nauczyciel (głównie, jak wcześniej wspomniano, są to pytania

[45] Za chwilę, zgodnie z rozporządzeniem MEN, będą to sześciolatki.

sprawdzające wiedzę uczniów). Ponowne odwołanie do obserwacji lekcji prowadzonych w ramach badań w 2008 roku pomoże zilustrować tę tezę.

Obserwowano wówczas między innymi 1468 minut zajęć matematycznych. W tym czasie udało się zarejestrować 232 razy sytuację, w której uczniowie kierowali do nauczyciela pytanie. Należały one do jednej z trzech kategorii:

1. Pytania organizacyjne
2. Pytania o wyjaśnienie, uzasadnienie
3. Pytania inne – merytoryczne

Pytania o charakterze organizacyjnym były powszechnie akceptowane przez nauczycieli. Ujawniają one podporządkowanie się uczniów procedurom ustalonym przez nauczyciela. Wskazują również na całkowite uzależnienie od decyzji nauczyciela w zakresie drobnych i mało istotnych czynności lekcyjnych:

Poniżej przykłady takich pytań:

Jaki jest temat?

Lekcję zapisać?

Czy będzie potrzebne ćwiczenie do polskiego?

A mamy książki schować?

A jak się już przepisało?

Proszę Pani, a jak skończyło się piąte?

A teraz co mamy robić?

Proszę Pani, tu wpisać?

A jak piszemy te zdania, to piszemy od nowej linijki?

Proszę Pani, tutaj wynik?

Proszę Pani, gdzie się podpisujemy?

Wpisujemy tutaj, czy nie wpisujemy?

A to można pokolorować pisakami?

Czy mogę zatemperować kredkę?

Pytania zaliczane do drugiej kategorii (pytania o wyjaśnienie, uzasadnienie) dotyczyły zagadnień i treści związanych z tematem lekcji. Przykłady zadawanych wówczas pytań odsłaniają potrzebę uzyskania wiedzy na ten temat.

U: *A ja mam jedną wątpliwość: co jest większe od złotego?*

N: *Są tylko złote i grosze.*

U: *A dlaczego nie ma brązowych i srebrnych?*

N: *Tak ustalono.*

Trzecia grupa pytań zadawanych przez uczniów to inne – merytoryczne, a więc odpowiadające tematowi lekcji. Przykładowe pytania z tej grupy:

Mianownik to jest to na dole, tak?

A jak obliczyć 1/6 doby?

Niepokojący jest wniosek, że zajęcia matematyczne okazują się w szczególny sposób hamować uczniowską potrzebę zadawania pytań. W trakcie obserwowanych zajęć **jedno pytanie** (dowolnego rodzaju) pojawiało się **raz na 6 minut**.

Badani trzecioklasiści pytali zdecydowanie najczęściej o sprawy organizacyjne. Na obserwowanych zajęciach pojawiło się 186 pytań tego typu z częstotliwością jedno pytanie średnio co (niespełna) 8 minut. W czasie 45-minutowych zajęć pytanie organizacyjne zadaje więc 5 uczniów.

Sytuacja, w której uczniowie proszą nauczyciela o uzasadnienie czy wyjaśnienie, zdarzała się zdecydowanie rzadziej. Na obserwowanych zajęciach jedynie 15 razy padło pytanie tego rodzaju. Średnio działo się to raz na 98 minut. Praktycznie był to jeden uczeń w klasie na dwie godziny lekcyjne. Wynik taki budzi niepokój, szczególnie, że część z tych pytań spotkała się z dość zdawkową reakcją nauczyciela (jak w przytoczonym wcześniej przykładzie pytania ucznia o złote i grosze).

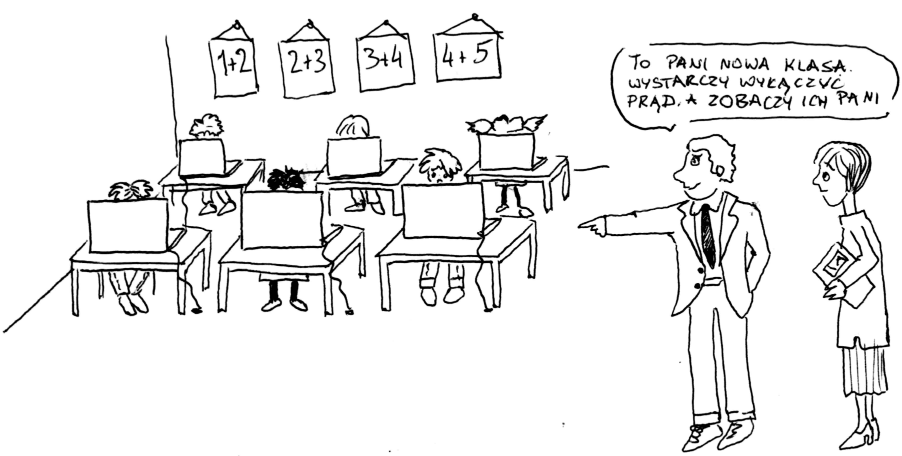
Pytania inne, ale związane z tematem lekcji, pojawiały się średnio raz na 47 minut, co wskazuje, że jeden uczeń zadawał w czasie pełnej godziny lekcyjnej jedno pytanie dotyczące treści przerabianych w klasie.

Wnioski z obserwowanych zajęć są trudne do zaakceptowania:

Badani uczniowie klasy trzeciej nie pytają, aby zdobyć wiedzę. Pytają (jeśli w ogóle), aby skrupulatnie wykonać zadanie, szczególnie w aspekcie organizacyjno-porządkowym. Nie uczą się zadawania pytań, nie próbują dociekać, jeśli coś ich zainteresuje, nie postrzegają swoich nauczycieli jako źródła wiedzy.

Na obserwowanych zajęciach nie pojawiły się wyraźne sygnały nauczyciela premiujące interesujące poznawczo pytania uczniów. Nie pojawiły się odpowiedzi zachęcające ucznia do dyskusji. Nie pojawiły się odpowiedzi odsyłające ucznia do samodzielnych poszukiwań intelektualnych.

Uczniowie zostali skutecznie „zdyscyplinowani”. A może zniewoleni?



Uczniowie w klasach początkowych nie umieją jeszcze argumentować

Mit wyrażony w powyższym stwierdzeniu znajduje swoje źródło w postrzeganiu myślenia koncepcyjnego młodszych uczniów w sposób nieco ograniczony. Aktywność twórcza tak małych dzieci może, zdaniem wielu nauczycieli, przejawiać się jedynie w kontekście działań o charakterze artystycznym. Nauczycielskie propozycje generujące dziecięcą twórczość intelektualną ograniczają się więc najczęściej do prac plastycznych. Bywają związane z edukacją językową, najrzadziej jednak stanowią przestrzeń kreowania twórczego myślenia matematycznego uczniów.

Uzasadnianie i argumentowanie należą do czynności intelektualnych, dla których aspekt samodzielności myślenia wydaje się kluczowy. Wskazane kompetencje kojarzą się również z pewną dojrzałością intelektualną, której w potocznym mniemaniu, brakuje jeszcze najmłodszym uczniom. Jest to, być może kulturowo uwarunkowany związek z nadal popularną koncepcją wychowania instytucjonalnego w naszym kraju. Dzieci najczęściej nie pyta się o zdanie, w przekonaniu, że wiedzą one tak niewiele. Nieuprawniony sąd o infantylności dziecięcego myślenia zniechęca dorosłych do dyskusji z dziećmi, motywowania ich do rzeczowej obrony własnego zdania.

Poniżej jeden z codziennych przykładów hamującej reakcji nauczyciela, gdy uczeń próbował być konsekwentny w swoich przekonaniach.

Nauczycielka oczekiwała na stwierdzenie uczniów, że największym przyjacielem każdego z nich jest książka. Jeden z chłopców zaprzeczył wskazując, że największym przyjacielem jest jego pies. Nauczycielka natychmiast starała się zdyskredytować opinię ucznia.

N: *Dobrze, to teraz ci coś powiem. W twoim pojęciu powstało coś takiego: bardziej kochasz psa, lubisz go, on jest twoim przyjacielem…, cenisz pieska jako wielkiego przyjaciela. A książka jest tak jakby na drugim miejscu, ponieważ ... Adrian, czy mało czytasz? Szczerze… Aha, no właśnie. Dlatego u ciebie w głowie nie rodzi się taki pomysł, że książka jest przyjacielem. Kochani, to jest ta tolerancja, o której wam zawsze mówię.*

Skłaniając ucznia do wyznania, że mało czyta, ukazała przyczynę odmienności jego zdania w kontekście niewłaściwego, z jej punktu widzenia, stosunku do czytania książek. W efekcie można odnieść wrażenie, że „ułomne” przekonanie ucznia zostało przyjęte jedynie dlatego, żeby nie robić mu przykrości.

Brak akceptacji nauczycieli dla osobistego punktu widzenia uczniów okazuje się szczególnie intensywny w przypadku znaczeń matematycznych. Przekonanie, że uczeń poznaje pojęcie matematyczne dopiero wówczas, gdy jest ono wprowadzane na lekcji, determinuje określone skutki mentalne wielu nauczycieli. Przyjmują *a priori* założenie, że najmłodsi uczniowie myślą dopiero wtedy, gdy dowiedzą się, **jak mają myśleć**.

Na jednej z obserwowanych lekcji w klasie trzeciej nauczycielka wprowadzała ułamek o wartości ½, polecając dzieciom zamalowanie na przygotowanych rysunkach połówek różnych figur.

N: *To jak powiemy? Jaką część zamalowaliście?*

U: *Dwie czwarte.*

N: *Bartek! Co ty wymyślasz? Skąd ty to wziąłeś, jeśli nie było jeszcze tego na lekcji?*

Reakcja nauczycielki odsłania również niepokój o rodzaj wiedzy ucznia, której pochodzenie wymyka się jej kontroli.

Infantylizowanie możliwości najmłodszych uczniów w zakresie matematycznego myślenia koncepcyjnego jest być może największą przyczyną nieobecności na lekcjach zadań wyzwalających myślenie twórcze oraz inspirujących uczniów do uzasadniania własnego stanowiska.

Przykładem takiego problemu matematycznego są zadania już przywołanego wcześniej typu[46]. Tak sformułowane zadania pozwalają przyjrzeć się sytuacji, w której dziecko ma do czynienia z nowym poznawczo problemem. W konfrontacji z zagadnieniem, do którego nie może „dopasować” gotowego schematu rozwiązania, uruchamia proces badawczy. Konstrukcja zadań-problemów pozwala na zauważenie przez ucznia prawidłowości matematycznych, które budują nową wiedzę. W ostatnim etapie zadania dziecko ma okazję do pokazania, w jaki sposób ją wykorzystało, przedstawiając uzasadnienie dla wybranego sposobu postępowania.

Argumentacje przytaczane przez poszczególnych uczniów różnią się poziomem używania języka, precyzji uzasadniania oraz myślenia matematycznego. W przywoływanym już zadaniu o budowaniu bram z klocków ostatni podpunkt odwoływał się do umiejętności opisania

[46] Por. rozdział: Uczeń umie tylko to, co było przerabiane w szkole.

przez uczniów, jaką strategię zastosowali do obliczenia kolejnych sekwencji bram.

b) Jak można szybko ustalić, ile klocków potrzeba, gdy się buduje takie bramy? Opisz, jak Ty to robisz.

Autor poniższego opisu posługuje się językiem potocznym, ale w sposób czytelny formułuje własne postępowanie obliczeniowe.

~~Pierw kładę jeden klocek~~

Pierw buduję jedną brame czyli 5 klocków.

Do tych 5 klocków dodaję jeszcze 5 klocków.

I tak w kółko dodaję jedną brame czyli 5 klocków.

~~5+5+5~~

Na przykład: 5+5+5+5+5+5=30

W kolejnym przykładzie uczeń uzasadnia swoje rozumowanie, odwołując się do propozycji konkretnych działań mnożenia ilustrujących, w jaki sposób obliczał. Pomimo sformułowania ogólniejszej strategii, nie miał pewności, że stanowi ona wystarczające wyjaśnienie, podał więc dodatkowe przykłady ilustrujące jego pomysł. Opisując sposób postępowania uzmysłowił sobie, jakie działania pozwoliły mu odkryć prawidłowość.

b) Jak można szybko ustalić, ile klocków potrzeba, gdy się buduje takie bramy? Opisz, jak Ty to robisz.

Po prostu mnoży się ~~przez~~ 5 (bo tyle klocków potrzeba do jednej bramy) przez liczbę bram np. 5·3, 5·4, itp

5·10 5·20

Autor następnego opisu ujawnia już tę pewność, ukazując rozumienie podanego uzasadnienia na poziomie uogólnionym. Miał on również świadomość wiedzy uzyskanej w konfrontacji z tym problemem, tworząc rodzaj ogólnej definicji.

b) Jak można szybko ustalić, ile klocków potrzeba, gdy się buduje takie bramy? Opisz, jak Ty to robisz.

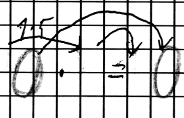
Wystarczy pomnożyć ilość bram przez ilość klocków potrzebnych do zbudowania jednej bramy.

Dwa ostatnie przypadki pokazują spontanicznie tworzone zapisy w języku symboli matematycznych. Obaj uczniowie wybrali ten sposób, uznając (być może) jego większą przydatność do precyzyjnego przekazania własnego pomysłu.

Autor pierwszego z nich próbuje zapisać za pomocą grafu operację obliczania liczby klocków potrzebnych do budowy kolejnych bram. Zapis nie jest do końca jasny, ale ujmuje pewną elegancją matematyczną.

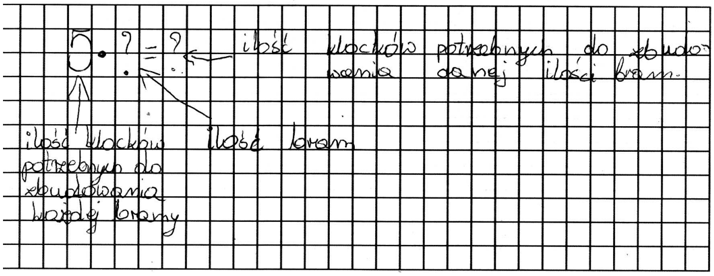
b) Jak można szybko ustalić, ile klocków potrzeba, gdy się buduje takie bramy? Opisz, jak Ty to robisz.

Z ~~15~~ pięciu klocków da się zbudować jedną bramę.

np. 

Drugi uczeń posłużył się językiem matematycznym w sposób niezwykle dojrzały, formułując właściwie wyrażenie algebraiczne i opisując dokładnie, co oznaczają niewiadome w jego wzorze.

b) Jak można szybko ustalić, ile klocków potrzeba, gdy się buduje takie bramy?
Opisz, jak Ty to robisz.



Nieco inny rodzaj badań prowadzili uczniowie rozwiązujący kolejne zadanie–problem. Zastanawiali się tu, jak zmieniają się sekwencje działań liczbowych, próbując opisywać, w jaki sposób wykorzystali zauważone prawidłowości.

a) Przyjrzyj się uważnie tej serii obliczeń. Zbudowano ją zgodnie z pewną regułą.

Odgadnij, jaka to reguła. Dopisz dwa kolejne działania z tej serii.

1 + 2 + 3 = 6

2 + 3 + 4 = 9

3 + 4 + 5 = 12

4 + 5 + 6 = 15

………………………………

………………………………..

b) A jak będzie wyglądało 32 działanie z tej serii? Zapisz je.

………………………………

c) Opisz, w jaki sposób można odgadnąć, jak wygląda 32 działanie z tej serii.

Prawie 40% (39,5%) badanych uczniów poprawnie podało trzydzieste drugie działanie. Odsetek stanowi całkiem pokaźną liczbę trzecioklasistów, którzy w nowej poznawczo sytuacji skorzystali z samodzielnego myślenia o problemie i zauważyli prawidłowości zawarte w kolejnych sekwencjach liczb. Dużo trudniejszą sztuką dla uczniów okazały się próby wyjaśnienia, w jaki sposób myśleli, szukając tego działania. W ostatnim podpunkcie jedynie niespełna co piąty uczeń (19,4%) podał sensowny argument.

Przytaczane poniżej przykłady argumentowania dziecięcego odsłaniają różne poziomy precyzji opisu, choć w większości z nich dostrzegamy poprawność myślenia.

Jako pierwszy przywołany został przykład, w którym uczeń, pomimo znalezienia trzydziestego drugiego działania nie potrafił uświadomić sobie, że w jakiś sposób znalazł to działanie. Sformułowanie „jak wygląda" odwróciło jego uwagę od prawidłowości, kierując w stronę dosłownego rozumienia. Sposób argumentowania odsłonił, w jaki sposób uczeń odwołał się do wcześniejszej wiedzy. Uznał, że najbardziej zbliżonym do rozwiązania „szkolnego" będzie wymyślenie takiego działania, w którym liczba 32 będzie miała „główną rolę".

b) A jak będzie wyglądało 32 działanie z tej serii? Zapisz je.

4 • 8 = 32.................

c) Opisz, w jaki sposób można odgadnąć, jak wygląda 32 działanie z tej serii.

~~32 + 33 + 34 = 99~~ Trzydzieści dwa na początku ~~t~~ musi być trzy. Trzy wygląda tak 3. Druga liczba jest dwa. Dwa wygląda tak 2. To jest trzydzieści dwa.

Autor następnego uzasadnienia już zupełnie inaczej poradził sobie z odpowiedzią. Widoczna jest sensowność jego myślenia, choć nie sprecyzował dokładnie, w jaki sposób powstało całe działanie, a co więcej, gdyby go wcześniej nie zapisał, wyjaśnienie znaczyłoby zupełnie co innego (raczej myślelibyśmy o takim działaniu: 7 + 8 + … + 32).

b) A jak będzie wyglądało 32 działanie z tej serii? Zapisz je.

..32+33+34=99....

c) Opisz, w jaki sposób można odgadnąć, jak wygląda 32 działanie z tej serii.

Trzeba dodawać po kolei liczby od od siedmiu do trzydziestu dwóch.

Podobny poziom precyzji myślenia dostrzegalny jest w następnym przykładzie, w którym uczeń wyjaśniał swoje rozumowanie, skupiając się na fakcie zwiększania się pierwszej liczby w każdej kolejnej sekwencji liczbowej.

c) Opisz, w jaki sposób można odgadnąć, jak wygląda 32 działanie z tej serii.

Każde działanie w każdej kolumnie różni o jedną liczbę.

Inny uczeń analizował zauważone prawidłowości, dokładniej wyjaśniając własne postępowanie. Opis podany słowami nabrał tu już bardziej zwięzłego charakteru (zbliżonego do języka matematycznego).

c) Opisz, w jaki sposób można odgadnąć, jak wygląda 32 działanie z tej serii.

Pierwsza liczba to numer działania. Druga liczba jest od pierwszej o 1 większa. Trzecia zaś jest o 1 większa od drugiej. Teraz wystarczy tylko obliczyć.

Dwa kolejne przykłady pokazują bardzo udaną próbę łączenia słownego wyjaśnienia z językiem symboli matematycznych. Ich precyzja jest imponująca i pokazuje dziecięcą gotowość nie tylko do uświadamiania sobie własnej strategii postępowania, ale również **potrzebę** posługiwania się językiem matematycznym.

c) Opisz, w jaki sposób można odgadnąć, jak wygląda 32 działanie z tej serii.

pierwszy stupek wzrasta od 1 o 1 = 32
drugi stupek wzrasta o 1 od 2 = 33
trzeci stupek zaczyna od 3 i wzrasta o 1 = 34
wynik wzrasta o 3 od szóstki = 99

c) Opisz, w jaki sposób można odgadnąć, jak wygląda 32 działanie z tej serii.

Łatwo można to odgadnąć ponieważ np.: pierwszy składnik pierwszego działania to 1, drugiego działania 2, trzeciego 3 itd. Następne składniki każdego dzia łania są większe o 1. Pierwszy składnik 32 działania to 32, drugi 33, trzeci 34.

Umiejętność uzasadniania, argumentowania jest kompetencją istotną w życiu jednostki, a w przypadku rozumienia pojęć matematycznych ma znaczenie szczególne. Konieczność wyjaśniania sposobu postępowania przez ucznia, wspomaga budowanie języka matematycznego, ukazując jego użyteczność i ekonomiczny charakter. Uczniowie mają okazję przekonać się, że wyrażanie własnych myśli za pomocą symboli matematycznych jest bardziej precyzyjne niż za pomocą języka słów. Ważne jest również, że pojęcia matematyczne nabierają wówczas osobistego charakteru, a ich używanie staje się bardziej naturalnym procesem.

Uzasadniając to przekonanie odwołam się ponownie do tezy Z. Usiskina, który uważa, że języka matematyki nie można poznawać jako języka martwego, a jego opanowywanie podobne jest do uczenia się każdego języka, który nie jest macierzystym: „Jak większość współczesnych języków, matematyka ma postać ustną i pisemną i może być traktowana zarówno formalnie, jak i nieformalnie. Jak każdy język, służy przede wszystkim do komunikowania i porozumiewania się. Jak każdy język, nie tylko opisuje pojęcia, ale pomaga je formować i kształtować w umysłach jej użytkowników”[47].

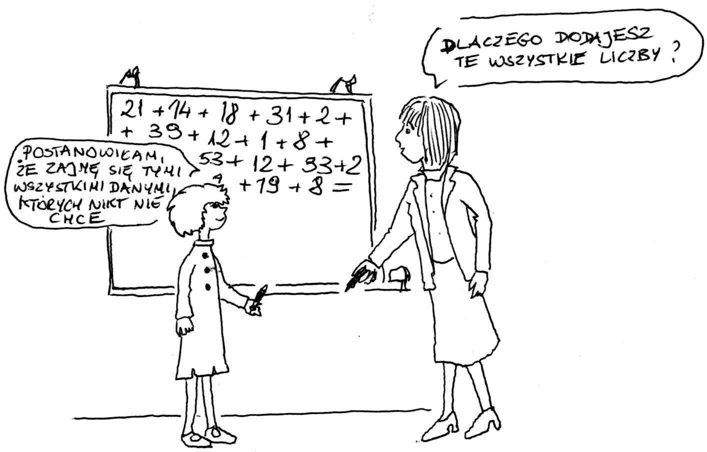
---

[47] Z. Usiskin (tłumaczenie W. Zawadowski), *Matematyka jako…*, dz. cyt., s. 21.

Dziecięce uzasadnienie i argumentowanie może stanowić doskonały materiał dla nauczyciela do rozpoznawania, jak uczeń rozumuje. Sposób argumentowania odsłania jakość jego reprezentacji matematycznych i poziom myślenia.

Zupełnie odmiennie przebiega proces wyjaśniania, gdy pytamy dziecko o strategię rozwiązywania zadania, którego model matematyczny był wcześniej wprowadzony na lekcji. Uczeń uruchamia wówczas przede wszystkim pamięć, żeby w miarę dokładnie powtórzyć wyjaśnienia nauczyciela. Rozmowa ma wówczas bardziej charakter sprawdzania wiedzy ucznia, niż rozpoznawania jego wiedzy osobistej. Uczeń z kolei nie stara się w sposób twórczy używać pojęć matematycznych, ponieważ dla osiągnięcia sukcesu (rozumianego tu jako pochwała nauczyciela), wystarczy powtórzyć jego słowa.

Mając więc na uwadze znaczenie swobodnej ekspresji słownej dla rozwoju myślenia matematycznego, pozwólmy uczniom już od początku nauczania w szkole konstruować własne znaczenia matematyczne, uzasadniać ich poprawność (lub nieprawdziwość), dyskutować o argumentach innych. Wprowadzanie symboli matematycznych do języka czynnego, ich precyzowanie oraz konstruowanie coraz wyższego poziomu złożoności, wspomaga możliwość werbalizowania własnych pomysłów i radzenia sobie z problemami matematycznymi.



PODSUMOWANIE

Nauczanie matematyki w klasach najmłodszych stanowi niezwykle ważny etap poznawania pojęć, ponieważ wiele z nich zapisuje się w umyśle po raz pierwszy. Znaczenia nadawane takim pojęciom jak „iloraz” czy „przemienność mnożenia” stanowią nie tylko podstawę wiedzy matematycznej, ale co równie ważne, **budują w umysłach uczniów rozumienie, na czym polega uczenie się matematyki.** Uczniowie polskiej szkoły właśnie już w klasach początkowych zaczynają dostrzegać (często nieświadomie), że wiedza matematyczna **musi być** przez kogoś dana. W logicznym wnioskowaniu przyjmują założenie, że ich poznawanie ma raczej charakter bierny, polegający głównie na zapamiętywaniu, w jaki sposób mówi i wykonuje działania nauczyciel. Konstruowane przez nich znaczenia są ograniczone również dlatego, że naturalnie pojawiającym się mechanizmem jest pewien minimalizm, a uczniowie szybko uczą się stosować zasadę: zapamiętać jedynie to, co jest niezbędne dla otrzymania oceny. Wiedza matematyczna dostępna w takim modelu edukacyjnym traci kontekst zaciekawiania oraz satysfakcji z samodzielnego pokonywania trudności.

W takich warunkach poznawczych jest prawie niemożliwe, aby uczniowie mogli w sposób adekwatny do możliwości intelektualnych rozwijać myślenie matematyczne. Ten proces wymaga bowiem samodzielnego konstruowania rozumienia pojęć matematycznych, szczególnie w początkowym okresie szkolnym.

Uczniowie w klasach najmłodszych muszą więc manipulować przedmiotami, samodzielnie zauważać prawidłowości związane ze swoimi działaniami oraz podejmować próby ich wyjaśniania.

Podsumowując niniejsze rozważania, zwracam się do nauczycieli, **którzy chcieliby zmienić** własne edukacyjne działania w zakresie nauczania matematyki.

Podejmowanie takich prób może być bardzo interesującym doświadczeniem pedagogicznym. Zajęcia matematyczne ukierunkowane na samodzielne odkrycia uczniowskie często nie mają charakteru „uładzonej” w formie lekcji. Przeciwnie, zdarza się rozgardiasz, gdy uczniowie pracują w małych grupach. Bywa, że przygotowane na potrzeby lekcji zadanie okazuje się mniej fascynujące dla uczniów, niż się wcześniej wydawało. Takie sytuacje są normalne, a ich pojawianie się powinno stanowić powód do dalszych poszukiwań propozycji mogących zainteresować poznawczo uczniów. Traktujmy informację zwrotną od uczniów jako rodzaj rzetelnej recenzji naszych działań edukacyjnych. **Zawsze przecież można zrobić coś lepiej.**

Nauczycielu:

– Spróbuj organizować uczniom zajęcia, w których **wykonują różne czynności, badając zależności** (ważenie, budowanie z klocków, wycinanie, granie w gry logiczne, szukanie prawidłowości w zbiorach przedmiotów i wiele innych). Postaraj się znaleźć w tych czynnościach znaczenia matematyczne.

– Spróbuj ustalić, jaka jest **rzeczywista wiedza i umiejętności matematyczne** każdego ucznia. Zbadaj, czy nie potrafią więcej niż Ci się wydaje.

– Jeśli masz w klasie uczniów o ponadstandardowej wiedzy matematycznej, pozwól im jak najczęściej (najlepiej zawsze) rozwiązywać zadania o **trudności adekwatnej** do ich poziomu myślenia.

– Spróbuj pytać swoich uczniów, jak poradziliby sobie z **nową** dla nich sytuacją matematyczną. **Słuchaj ich uważnie i pozwól działać zgodnie z ich pomysłami**. Nie ingeruj we wszystkie próby. Pozwól im samodzielnie przekonać się o nieprawdziwości postawionej hipotezy.

– Rozmawiaj z uczniami o ich pomysłach, ograniczając się przede wszystkim do pytań typu: **Dlaczego tak myślisz? Dlaczego tak się dzieje? A co by było, gdyby…?** Autentyczny dialog z uczniem (który nie ma nic wspólnego z pogadanką) uczy szacunku dla jego wiedzy, pomysłowości i wysiłku poznawczego.

– **Nie zdradzaj**, co chcesz usłyszeć. Bądź zaciekawiony tym, **co** uczniowie mówią, a nie **jakim językiem**.

– Spróbuj pozwalać na samodzielność uczniom słabszym. **Nie tłumacz wszystkiego od razu.** Nie martw się, że ich próby są tak niedoskonałe. Daj im czas na rozwijanie myślenia. Lepiej, gdy będą konstruować pojęcia matematyczne **wolniej ale samodzielnie,** niż gdy dostaną gotowy wzór postępowania, **uzależniając się coraz bardziej od pomocy nauczyciela**.

Podejmowane próby samodzielnych poszukiwań uczniowskich często mogą budzić **Twój** niepokój o ich edukacyjną skuteczność. Jest on naturalny. Pamiętaj jednak, że uczeń, który nauczy się radzić sobie w sytuacjach nowych poznawczo (rozwiązywać problemy), lepiej będzie opanowywał algorytmy, próbując je **rozumieć, a nie jedynie zapamiętać**.

Bibliografia

Bruner J., *W poszukiwaniu teorii nauczania*. Warszawa 1974.

Bruner J., *Poza dostarczone informacje*. Warszawa 1978.

Bruner J., *Kultura edukacji.* Kraków 2006.

Dagiel M., Żytko M. (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Nauczyciel kształcenia zintegrowanego* 2008. *Wiele różnych światów?* Warszawa 2009.

Dąbrowski M., *Pozwólmy dzieciom myśleć.* Warszawa 2008.

Dąbrowski M. (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa 2009.

Feynman R. P., *Pan raczy żartować, panie Feynman*. Kraków 2007.

Gołębniak B. D., *Konstruktywizm – moda, „nowa religia" czy tylko/aż interesująca perspektywa poznawcza i dydaktyczna?* „Problemy Wczesnej Edukacji" nr 1(1) 2005.

Gruszczyk-Kolczyńska E., *Dzieci z trudnościami w uczeniu się matematyki*. Warszawa 1997.

Kalinowska A., *Matematyczne zadania problemowe w klasach początkowych – między wiedzą osobistą a jej formalizacją.* Kraków 2010.

Klus-Stańska D., *Konstruowanie wiedzy w szkole*. Olsztyn 2000.

Klus-Stańska D., Nowicka M., *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej.* Warszawa 2005.

Klus-Stańska D. (red.), *Światy dziecięcych znaczeń.* Warszawa 2004.

Klus-Stańska D., Kalinowska A., *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów.* Warszawa 2004.

Nęcka E., *Inteligencja i procesy poznawcze*. Kraków 1994.

Pausch R., *Ostatni wykład.* Warszawa 2008.

Thurston W., *Matmatical Education*. „Notices of the American Matematematical Society" 37/7 1990.

Usiskin Z. (tłumaczenie W. Zawadowski), *Matematyka jako język*. NiM+TI nr 71 2009.

Wojciechowska K., *Zadania tekstowe w kształceniu zintegrowanym. Jak pomagać dzieciom budować i rozwiązywać zadania tekstowe*. Opole 2007.

Wygotski L. S., *Myślenie i mowa*. Warszawa 1989.

http://trzecioklasista.cke-efs.pl

NOTATKI

NOTATKI

NOTATKI