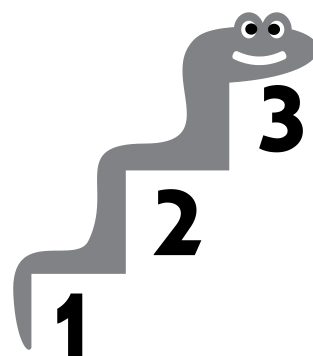


Mirostław Dąbrowski



**(Za) trudne,
bo trzeba myśleć?**

**O efektach nauczania matematyki
na I etapie kształcenia**

Warszawa 2013

Autor książki:

dr Mirosław Dąbrowski

Recenzenci:

prof. zw. dr hab. Dorota Klus-Stańska (prof. UG)

dr hab. Waclaw Zawadowski

Wydawca:

Instytut Badań Edukacyjnych

ul. Górczewska 8

01-180 Warszawa

Tel.(22) 241 71 00

www.ibe.edu.pl

© Copyright by Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2013

ISBN 978-83-61693-15-4

Autor opracowania okładki:

Stefan Drobner

Opracowanie DTP, korekta, druk i oprawa:

ARW A. Grzegorzcyk

www.grzeg.com.pl

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego – Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działania 3.2 Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych.

Publikacja opracowana w ramach projektu: „Badania uwarunkowań różnicowania wyników egzaminów zewnętrznych”.

Publikacja jest dystrybuowana bezpłatnie.

SPIS TREŚCI

WSTĘP	5
ROZDZIAŁ I: O UMIEJĘTNOŚCIACH MATEMATYCZNYCH	
TRZECIOKLASISTÓW	7
I.1. Sztuka rozwiązywania zadań tekstowych	8
I.1.1. Najbardziej typowe z możliwych	9
Zadania proste na porównywanie różnicowe i ilorazowe	10
Zadania złożone dotyczące porównywania różnicowego i ilorazowego	12
Zadania złożone na porównywanie różnicowe i ilorazowe – szukana suma ...	16
Zadanie proste na porównywanie różnicowe z nadmiarem danych	22
Zadanie złożone na porównywanie różnicowe – szyk i sposób podania danych ...	25
Zadania złożone – porównywanie różnicowe i ilorazowe ze znaną sumą	29
Podsumowanie	36
I.1.2. A gdy zadanie jest nietypowe?	37
Co to znaczy rozwiązać zadanie?	37
Co zrobić z tymi liczbami?	62
A gdy liczb jest więcej?	81
Podsumowanie	98
I.2. Arytmetyka szkolna – liczby, obliczenia ... i język symboliczny	99
Stosowanie algorytmów obliczeń pisemnych	100
Stosowanie przez uczniów własnych strategii wykonywania obliczeń	107
Gdy dominuje jedna metoda!	118
Rozumienie działań dodawania i odejmowania	120
Wykonywanie obliczeń złożonych	122
Porównywanie liczb naturalnych i rozumienie systemu dziesiętnego	128
Podsumowanie	137
I.3. Miary – w szkole i poza nią	138
Wykonywanie obliczeń pieniężnych	139
Wykonywanie obliczeń dotyczących czasu	148
Wykonywanie obliczeń dotyczących temperatury	159
Wykonywanie obliczeń dotyczących pojemności z użyciem prostych ułamków zwykłych	166
Obwód prostokąta	175
Podsumowanie	180

I.4.	Czytanki matematyczne	182
	Czytanka A: Ulubione dyscypliny sportu	183
	Czytanka B: O oszczędzaniu wody	187
	Czytanka C: Dyplomy	191
	Czytanka D: Co ciekawego w telewizji?	195
	Podsumowanie	202
ROZDZIAŁ II. RZUT OKA NA SZKOLNĄ CODZIENNOŚĆ		204
II.1.	Proces kształcenia?	206
	Sprawdzanie wiedzy	206
	Pogadanka czy dyskusja?	207
	Aktywność twórcza uczniów	212
	Gry i zabawy dydaktyczne	215
II.2.	Razem czy osobno?	216
II.3.	Kto pyta nie błądzi?	220
II.4.	Dwa końce tego samego kija?	227
II.5.	Wystarczy podpowiedzieć?	230
II.6.	Typowe czyli jakie?	243
II.7.	Skuteczny nauczyciel?	250
ROZDZIAŁ III. CZAS PODSTAW PROGRAMOWYCH		258
III.1.	Umiejętności kluczowe w polskich podstawach programowych	259
III.2.	Cele i treści edukacji matematycznej w podstawach programowych	269
	Cele edukacji matematycznej w podstawach programowych	270
	Treści edukacji matematycznej w podstawach programowych	275
	W ramach podsumowania	291
BIBLIOGRAFIA		294

W ciągu ostatnich lat wielokrotnie byłem uczestnikiem mniej więcej tak przebiegających dialogów z nauczycielami klas 1-3 w trakcie spotkań poświęconych rozwijaniu umiejętności matematycznych dzieci:

- *Jak Państwo uważacie, czy to zadanie jest, dla uczniów klasy trzeciej, łatwe czy trudne?*
 - *Trudne! Bardzo trudne!*
- *Tak? A dlaczego Państwo tak uważacie?*
 - *Bo trzeba myśleć!*
 - *Za trudne dla dzieci!*
 - *W szkole nie robimy zadań na myślenie.*

Niekiedy, sprowokowany takimi odpowiedziami, dorzucałem kolejne pytanie:

- *A w takim razie, jakie zadania Państwo robicie? I po co je robicie?*

W tym momencie często na sali zapadała cisza, gdyż sami nauczyciele uświadamiali sobie, jaki obraz polskiej szkoły początku XXI wieku wyłania się z ich wypowiedzi.

W tej książce chciałbym zastanowić się nad tym, jak jest z tym przywoływanym przez nauczycieli *myśleniem* podczas zajęć z edukacji matematycznej w klasie trzeciej, pod koniec pierwszego etapu kształcenia. Czy rzeczywiście *myślenie* sprawia naszym uczniom taką trudność? Jak to możliwe, że dziecko, które w okresie przedszkolnym zaskakuje swoją pomysłowością i kreatywnością, nagle, po rozpoczęciu nauki szkolnej, ma kłopoty z *myśleniem*? I jeśli tak rzeczywiście jest, to jakie mogą być tego ewentualne przyczyny?

Szukając odpowiedzi na te pytania odwołam się do wyników badań prowadzonych od 2006 roku przez Centralną Komisję Egzaminacyjną w ramach kierowanego przeze mnie projektu „Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzeciej klasy szkoły podstawowej”¹.

¹ Współfinansowanego przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego – Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet III „Wysoka jakość systemu oświaty”, Działanie 3.2 „Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych”.

W projekcie tym w obszarze badania umiejętności matematycznych wspierały mnie dr Alina Kalinowska i mgr Ewa Wiatrak, badaniem umiejętności językowych zajmowały się prof. UW dr hab. Małgorzata Żytka, dr Małgorzata Dągiel oraz dr Barbara Murawska, a nad stroną statystyczną całości czuwał mgr Bartosz Kondratek. W tym miejscu chciałbym im gorąco podziękować za wiele lat wspólnej pracy.

Rozdział I zawiera szczegółowe omówienie poziomu wybranych umiejętności matematycznych uczniów przed rozpoczęciem nauczania przedmiotowego. Umieściłem w nim m.in. blisko 600 prac uczniowskich, które są – moim zdaniem – najlepszą możliwą ilustracją uczniowskiego sposobu *myślenia* o matematyce. Rozdział II opisuje „zwykłą codzienność” zajęć pod koniec klasy trzeciej, w tym zajęć z edukacji matematycznej na podstawie prowadzonych w ramach wspomnianego wyżej projektu obserwacji lekcji. Tym razem odwołuję się do zanotowanych przez obserwatorów zdarzeń oraz wypowiedzi nauczycieli i, rzadziej, uczniów. Rysują one obraz zajęć typowy dla ogromnej większości polskich klas nauczania początkowego, w których nauczyciele i uczniowie mają ściśle wyznaczone role.

W rozdziale III m.in. analizuję zmiany, które zachodziły w ciągu ostatnich kilkunastu lat w kolejnych podstawach programowych w zakresie edukacji matematycznej.

Te dwa rozdziały w znacznej mierze wyjaśniają, dlaczego umiejętności matematyczne naszych trzecioklasistów są takie ... jakie są.

ROZDZIAŁ I: O UMIEJĘTNOŚCIACH MATEMATYCZNYCH TRZECIOKLASISTÓW

W roku 2005 Centralna Komisja Egzaminacyjna uruchomiła projekt, współfinansowany przez Europejski Fundusz Społeczny, pod tytułem: *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzeciej klasy szkoły podstawowej*, którego celem było zebranie informacji na temat poziomu umiejętności językowych i matematycznych uczniów kończących I etap kształcenia, a także czynników – szkolnych i rodzinnych – wpływających na te umiejętności. W badaniu wzięło udział 2510 uczniów ze 137 klas² z terenu całej Polski, a jego wyniki opublikowano m.in. w dwuczęściowym raporcie³. W roku 2007 uruchomiono kontynuację projektu – jej zasadniczym zadaniem było stworzenie narzędzia polityki edukacyjnej, pozwalającego na systematyczne i ciągłe doskonalenie jakości funkcjonowania szkoły na pierwszym etapie kształcenia oraz wspierającego podnoszenie jakości kształcenia i efektywności całej szkoły podstawowej. W tym okresie funkcjonowania projektu zrealizowano na reprezentatywnych próbach trzy badania umiejętności trzecioklasistów – w latach 2008, 2010 oraz 2011. Wzięło w nich udział:

- w 2008 roku: 4756 uczniów z 262 klas trzecich⁴,
- w 2010 roku 4924 uczniów z 288 klas trzecich⁵,
- w 2011 roku 3050 uczniów ze 170 klas trzecich⁶.

W ramach projektu zrealizowano także dwie edycje dobrowolnego Ogólnopolskiego Badania Umiejętności Trzecioklasistów: OBUT 2011⁷ oraz OBUT 2012⁸, w których uczestniczyło po około 10.000 szkół i prawie po 300.000 trzecioklasistów.

Z wyników tych badań skorzystam, analizując cztery wybrane obszary umiejętności matematycznych trzecioklasistów: rozwiązywanie zadań tekstowych, wykonywanie obliczeń i rozumienie zapisu liczb, posługiwanie się miarami oraz czytanie tekstu matematycznego.

² Zarówno w tym badaniu, jak i w pozostałych tego typu każda klasa była z innej szkoły.

³ Dąbrowski M., Żytko M. (red.) 2007a, 2008; por. także Dąbrowski M. 2008.

⁴ Por. Dąbrowski M. (red.) 2009a.

⁵ Por. Dąbrowski M. (red.) 2011a.

⁶ Por. Murawska B., Żytko M. (red.) 2012.

⁷ Por. Pregler A., Wiatrak E. (red.) 2011.

⁸ Por. Pregler A., Wiatrak E. (red.) 2012.

I.1. SZTUKA ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ TEKSTOWYCH

Opanowanie przez uczniów umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych powinno być najważniejszym celem nauczania matematyki w całej szkole podstawowej. Większość pozostałych umiejętności rozwijanych w procesie matematycznego kształcenia dziecka w klasach 1-3 oraz 4-6 ma charakter usługowy właśnie w stosunku do rozwiązywania zadań tekstowych, czy, szerzej, rozwiązywania problemów – są one narzędziami potrzebnymi do skutecznego radzenia sobie z zadaniami tekstowymi.

Zadania tekstowe mogą być potężnym narzędziem w ręku nauczyciela. Umiejętnie wykorzystane w procesie kształcenia mogą pełnić wiele ważnych funkcji, tworząc uczniom m.in. warunki i okazje do:

- rozwijania sprawności rachunkowej, a nawet budowania indywidualnych strategii obliczeniowych;
- stopniowego doskonalenia umiejętności czytania ze zrozumieniem;
- budowania coraz bardziej zaawansowanych strategii rozwiązywania zadań i problemów;
- systematycznego budowania motywacji do uczenia się.

Ten obszar kompetencji stanowił ważny składnik każdej kolejnej edycji badania umiejętności trzecioklasistów. Sprawdźmy więc, jak z rozwiązywaniem różnych typów zadań tekstowych radzą sobie nasi absolwenci I etapu kształcenia.

Na wstępie jeszcze dwie uwagi organizacyjne:

- w każdym badaniu wykorzystywano dwie lub cztery wersje każdego testu, co oznacza, że uczniowie siedzący obok siebie rozwiązywali albo inne zadania tekstowe, albo inne wersje⁹ tych samych zadań;
- a przy ich sprawdzaniu przyjęto zasadę, że o poprawności rozwiązania zadania tekstowego decyduje tok rozumowania ujawniony przez dziecko, a nie uzyskanie poprawnego wyniku – błędy rachunkowe czy notacyjne nie przeszkadzały w uznaniu rozwiązania za poprawne.

⁹ Np. różniące się danymi liczbowymi.

I.1.1. Najbardziej typowe z możliwych

Jednym z tradycyjnie ważnych tematów poruszanych w naszym nauczaniu początkowym matematyki były, i nadal są, **porównywanie różnicowe** oraz **porównywanie ilorazowe**. Już kilka lat temu¹⁰ porównywanie ilorazowe zostało przeniesione w podstawie programowej z I na II etap kształcenia, ale nadal jest jednym z istotniejszych zagadnień konsekwentnie „realizowanych” w klasach 1-3.

Popularność w naszej szkole obu tych typów porównań jest ciekawym zjawiskiem, gdyż matematycznie nie mają one specjalnego znaczenia.

W naszym codziennym życiu dość często porównujemy ceny: *to jest o 2 zł tańsze*, wzrost: *urosteś 3 cm*, wagę: *przytyłem pół kilograma*, liczbę przedmiotów: *masz o 2 kasztany mniej* – zatem obcujemy z sytuacjami, które prowadzą do porównywania różnicowego. I zupełnie sporadycznie mamy do czynienia z takimi, które przygotowują do porównywania ilorazowego – rzadko jeden towar jest trzy razy droższy od drugiego, albo jedna osoba dwa razy lżejsza od drugiej. Ta różnica w codziennym „kontakcie” jest, jak sądzę, najistotniejszym powodem trudności na jakie napotykają dzieci przy okazji porównywania ilorazowego w szkole i żadne przenoszenie tego tematu w czasie tego nie zmieni. Uczniowie mają mniej kłopotów na lekcjach z porównywaniem różnicowym, bo już mają pewne własne codzienne doświadczenia z nim związane, wykorzystywane przy tej okazji zwroty są dla nich czytelniejsze i bardziej jednoznaczne. Tak więc wartość praktyczna tych szkolnych tematów też nie jest specjalnie wielka, ponieważ najczęściej życie wyprzedza szkołę. Jednak, w polskiej tradycji edukacyjnej te dwa zagadnienia pełnią szczególną rolę, a uczniowie przez kolejne lata rozwiązują wiele zadań tekstowych do nich nawiązujących.

Dlatego też w badaniach umiejętności trzecioklasistów kilkakrotnie sięgano po zadania tego typu. Zobaczmy, co o rozwijaniu umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych u dzieci mogą one nam powiedzieć.

¹⁰ Sugestia taka pojawiła się w nowelizacji podstawy programowej z dnia 23.08.2007 roku, natomiast jawne „wykluczenie” porównywania ilorazowego z I etapu kształcenia nastąpiło w nowelizacji z 23.12.2008 roku.

Zadania proste na porównywanie różnicowe i ilorazowe

W badaniu w roku 2008¹¹ wykorzystano następujące cztery zadania:

- | | |
|-----------|--|
| 1A | Ewa i Piotrek zbierali w parku kasztany. Ewa zebrała ich 30, a Piotrek o 6 mniej. Ile kasztanów zebrał Piotrek? |
| 1B | Karol i Ela zbierali kasztany w parku. Karol zebrał ich 30, a Ela o 6 więcej. Ile kasztanów zebrała Ela? |
| 2A | Basia i Ania zbierały w parku kasztany. Basia zebrała ich 15, a Ania 3 razy mniej. Ile kasztanów zebrała Ania? |
| 2B | Bartek i Jurek zbierali w parku kasztany. Bartek zebrał ich 15, a Jurek 3 razy więcej. Ile kasztanów zebrał Jurek? |

Pierwsze dwa zadania to typowe zadania proste na porównywanie różnicowe o identycznej, dualnej w stosunku do siebie, strukturze – pierwsze w wersji *mniej*, drugie – *więcej*. Analogiczną parę dla porównywania ilorazowego stanowią dwa pozostałe zadania. W obu parach dane liczbowe są dobrane wedle tego samego kryterium – nie sugerują one typu wykonywanego obliczenia.

Jak już wspominałem, zadania takie pojawiają się w procesie kształcenia wielokrotnie w ciągu kolejnych lat – wracają, w miarę rozszerzania zakresu liczbowego używanego podczas zajęć. Nauczyciele sporo czasu poświęcają na nauczenie dzieci ich rozróżniania (!).

W badaniach wykorzystano cztery równoległe testy, zatem każde zadanie było rozwiązywane przez inną, w pełni porównywalną, grupę dzieci.

Poziom rozwiązań tych zadań jest dość zaskakujący (por. diagram 1.) – różnice wyników w obrębie tych samych par przekraczają 10%.

Najlepiej uczniowie poradzili sobie z zadaniem **2B**, czyli z porównywaniem ilorazowym w wersji *więcej* – 95,0% poprawnych rozwiązań to bardzo wysoki wynik. Natomiast porównywanie ilorazowe w wersji *mniej* (**2A**) wypadło najslabiej ze wszystkich czterech zadań: 78,0%. Różnica wyników dla tych, teoretycznie, identycznych zadań wynosi 17,0%. I nie jest to efekt tego, że dzielenie jest dla dzieci trudniejsze od mnożenia, bo błędy rachunkowe, jak już o tym wspominałem, nie wpływały na zaliczenie zadania – decydował tok rozumowania.

¹¹ Dąbrowski M., 2009c.

Analogicznie, w dwóch pozostałych zadaniach występują porównywanie różnicowe w wersji *więcej* oraz ilorazowe w wersji *mniej*, czyli dwa „gorsze”, z punktu widzenia wyników, porównania.

Jak zawsze, zadania były rozwiązywane przez różne, lecz porównywalne i reprezentatywne grupy uczniów. Zobaczmy, jakie są konsekwencje tych zestawień w odniesieniu do poziomu dobrych rozwiązań dla tych czterech zadań złożonych:

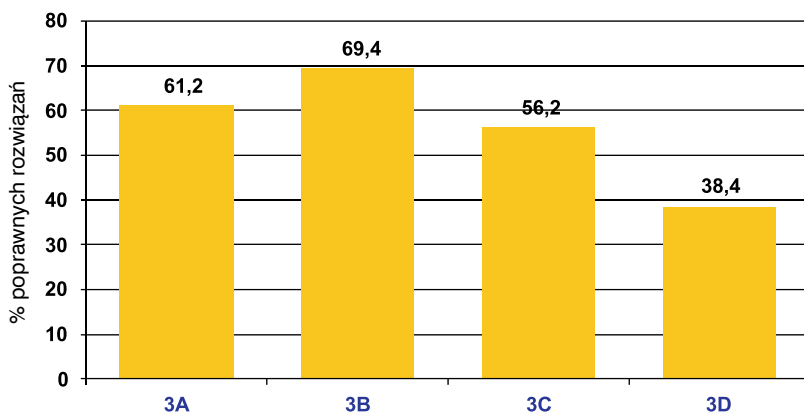


Diagram 2. Zadania złożone na porównywanie różnicowe i ilorazowe – procent poprawnych rozwiązań.

Zgodnie z oczekiwaniami wyniki są zróżnicowane, choć ich rozpiętość jest zaskakująca.

Najlepiej poradzili sobie uczniowie z zadaniem **3B**, w którym najpierw występuje porównywanie różnicowe w wersji *mniej*, po czym porównywanie ilorazowe w wersji *więcej*. Właśnie te dwa typy obu porównań sprawiają, jak pokazały wcześniejsze zadania, dzieciom najmniej kłopotów – połączenie obu tych porównań – jak widać – „utrwaliło” ten efekt.

W zadaniu **3C** mamy do czynienia z tą samą kolejnością obu porównań, tzn. najpierw różnicowe, potem ilorazowe, ale oba występują w ich trudniejszych wersjach, czyli w wersji *więcej* dla porównywania różnicowego oraz *mniej* dla ilorazowego. Efekt – wynik gorszy o 13,2% niż dla **3B**.

Zadanie **3A** różni się od **3B** kolejnością porównań – ta zmiana obniżyła wynik o 8,2%.

W zadaniu **3D** występują trudniejsze wersje obu porównań oraz – jak należy wnosić z powyższej różnicy – ich „gorsza” kolejność, ale poziom jego wykonania: 38,4%, czyli ponad 30% gorzej niż w przypadku zadania **3B**, jest jednak zaskakująco niski.

Reasumując:

- zadania, w których porównywanie ilorazowe występuje w wersji *więcej*, miały lepsze wyniki niż zadania z porównywaniem ilorazowym w wersji *mniej*;
- zadania, w których porównywanie różnicowe występuje w wersji *mniej*, miały lepsze wyniki niż zadania z porównywaniem różnicowym w wersji *więcej*;
- zadania, w których pierwszym porównywaniem było porównywanie różnicowe, wypadły lepiej od swoich „odpowiedników” rozpoczynających się od porównywania ilorazowego.

Takie reguły wydają się rządzić w klasie trzeciej zadaniami złożonymi na porównywanie różnicowe i ilorazowe.

Spójrzmy na przykładowe błędne rozwiązania.

Najczęściej pojawiającym się błędem było „ujednoczenie” typu obu porównań występujących w zadaniu, zgodnie z tym, jakie było pierwsze:

Marta, Ela i Dorota zbierały na plaży muszki. Marta zebrała ich 12, Ela 3 razy więcej niż Marta, a Dorota o 2 mniej niż Ela. Ile muszek zebrała Ela, a ile Dorota?

$12 \cdot 3 = 36$, $36 : 2 = 18$

Ela	Dorota
36	18

zadanie 3A:
12,6%

Odpowiedź: Dorota zebrała 36 muszek, a Ela 18 muszek.

Ania, Jola i Marysia zbierały muszki na plaży. Ania zebrała ich 12, Jola o 6 więcej niż Ania, a Marysia 2 razy mniej niż Jola. Ile muszek zebrała Jola, a ile Marysia?

Ania - 12 muszek
Jola - $12 + 6 = 18$ muszek
Marysia - $18 : 2 = 9$ muszek

zadanie 3C:
8,7%

Odpowiedź: Jola zebrała 18 muszek, a Marysia 9 muszek.

Ania, Jola i Marysia zbierały muszelki na plaży. Ania zebrała ich 18, Jola 6 razy mniej niż Ania, a Marysia o 3 więcej niż Jola. Ile muszelek zebrała Jola, a ile Marysia?

zadanie 3D:
21,8%

Odpowiedź: Jola zebrała 3 muszelki a Marysia 9

W zadaniu **3B** błąd ten popełniło 4,4% dzieci, czyli wyraźnie mniej niż w **3A** i pozostałych.

Widać, że dużo częściej uczniowie postępują w ten sposób, gdy zadanie rozpoczyna się od porównywania ilorazowego (**3A** i **3D**).

W przypadku zadania **3D** dość często: 11,6% pojawiała się także zamiana „w drugą stronę”, tzn. przeniesienie typu drugiego porównania na pierwsze:

Ania, Jola i Marysia zbierały muszelki na plaży. Ania zebrała ich 18, Jola 6 razy mniej niż Ania, a Marysia o 3 więcej niż Jola. Ile muszelek zebrała Jola, a ile Marysia?

Odpowiedź: Jola zebrała 12 muszeli, a Marysia 15.

Co ciekawe, dla trzech pozostałych zadań błąd ten nie przekroczył poziomu 4% (odpowiednio: 3,8%, 2,5%, 3,4%).

Zadanie **3D** zostało ponownie wykorzystane (z nieco zmienionymi danymi liczbowymi) w badaniu w roku 2011¹³. Jego poziom wykonania wyniósł 41,2%. Także rozkład błędnych rozwiązań był bardzo podobny do przedstawionego powyżej:

¹³ Dąbrowski M., 2012a.

- 18,3% trzecioklasistów przeniosło typ pierwszego porównania na drugie:

Ania, Jola i Marysia zbierały muszki na plaży. Ania zebrała ich 24, Jola 6 razy mniej niż Ania, a Marysia o 3 więcej niż Jola. Ile muszelek zebrała Jola, a ile Marysia?

$24 : 4 = 6$ $6 + 3 = 9$

Odpowiedź: Jola zebrała 6, a Marysia 9 muszelek.

- a 13,8% drugiego na pierwsze:

$24 - 6 = 17$
 $17 + 3 = 20$

Odpowiedź: Jola zebrała 17 muszelek, a Marysia 20.

Zatem pełna analogia wyników.

Zadania złożone na porównywanie różnicowe i ilorazowe – szukana suma

W badaniach w roku 2008¹⁴ uczniowie rozwiązywali także cztery inne, bardzo typowe dla I etapu kształcenia, zadania tekstowe złożone dotyczące porównywania różnicowego i ilorazowego:

4A W kinie są dwie sale. W pierwszej jest 156 miejsc, a w drugiej o 24 miejsca mniej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

4B W kinie są dwie sale. W pierwszej są 122 miejsca, a w drugiej o 35 miejsc więcej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

5A Adam trzyma swoje książki na dwóch półkach. Na górnej ma ich 36, a na dolnej 4 razy mniej. Ile Adam ma łącznie książek?

5B Ania trzyma swoje książki na dwóch półkach. Na górnej ma ich 12, a na dolnej 3 razy więcej. Ile Ania ma łącznie książek?

Układ tych zadań jest analogiczny, jak w przypadku zadań prostych na porównywanie: dwa pierwsze to dualne w stosunku do siebie zadania na porównywa-

¹⁴ Dąbrowski M., 2009c.

nie różnicowe o identycznej strukturze oraz analogicznym doborze liczb¹⁵. Dwa pozostałe dotyczą porównywania ilorazowego i też wzajemnie się dopełniają. A jaki był ich poziom rozwiązań?

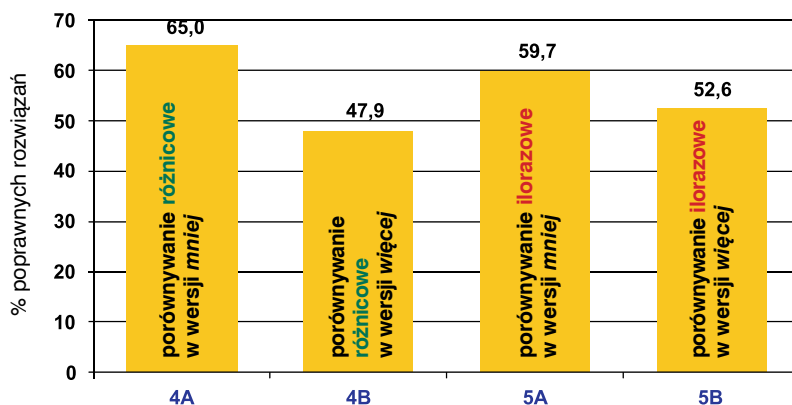


Diagram 3. Zadania złożone na porównywanie różnicowe i ilorazowe typu *szukana suma* – procent poprawnych rozwiązań.

I tym razem mamy zaskakującą różnicę wyników – w parze na pozór identycznych zadań **4A** i **4B** różnica poziomów wykonania wyniosła 17,1%. W drugiej parze jest znacznie mniejsza: 7,1%.

Warto zwrócić uwagę na to, że zachowany jest „kierunek” tej różnicy – w obu przypadkach niższe wyniki dotyczą zadania w wersji „więcej”.

Po raz kolejny warto zadać sobie pytanie, skąd ta rozpiętość wyników w zadaniach **4A** i **4B**.

W zadaniu **4A** najczęstszy błąd polegał na ograniczeniu się przez ucznia do odjęcia liczb podanych w treści zadania:

W kinie są dwie sale. W pierwszej jest 156 miejsc, a w drugiej o 24 miejsca mniej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

$$156 - 24 = 132$$

Odpowiedź: W kinie jest łącznie 132 miejsca.

W ten sposób postąpiło 26,2% uczniów, czyli ponad ¼ badanych trzecioklasistów.

¹⁵ Tzn. takim, że pasują do nich te same działania, w tym przypadku dodawanie i odejmowanie.

W kinie są dwie sale. W pierwszej są 122 miejsca, a w drugiej jest o 35 miejsc więcej.
Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

$$\begin{array}{r} 122 \\ + 35 \\ \hline 157 \end{array}$$

Odpowiedź: *W kinie jest 157 miejsc łącznie.*

$$122 + 35 = 157$$

Odpowiedź: *W tym kinie łącznie jest 157 miejsc.*

$$122 + 35 = 157$$
$$\begin{array}{r} 122 \\ + 35 \\ \hline 157 \end{array}$$

Odpowiedź: *W tym kinie jest łącznie 157 miejsc.*

Zwróćmy uwagę na sposób sformułowania odpowiedzi. Nie ma: *W drugiej sali jest ...*, odpowiedź zawsze brzmi podobnie: *W tym kinie jest ...* albo *W tym kinie jest łącznie ...* **Autorzy tych rozwiązań są przekonani, że dobrze rozwiązali zadanie złożone** i dlatego tak właśnie formułują swoje odpowiedzi.

Dlaczego tak się dzieje?

Być może „doszło do głosu” słowo-klucz *łącznie* występujące w obu pytaniach – **łącznie, czyli trzeba dodać, wykonanym działaniem ma być dodawanie.**

W zadaniu **4A** proces rozwiązywania zadania rozpoczyna się od odejmowania, no to jeszcze trzeba dodać. Ale w zadaniu **4B** pierwsze wykonywane działanie to dodawanie – najprawdopodobniej część uczniów uznała, że to kończy proces rozwiązania. Odpowiednia reakcja na hasło *łącznie* nastąpiła.

W przypadku zadania 5A wystąpiła duża różnorodność błędów, choć najbardziej popularny: 12,6% był analogiczny, jak dla obu poprzednich zadań – wykonane dzielenie liczb podanych w treści zadania i odpowiedź pasująca do postawionego pytania:

Adam trzyma swoje książki na dwóch półkach. Na górnej ma ich 36, a na dolnej 4 razy mniej. Ile Adam ma łącznie książek?

$$36 : 4 = 9$$

Odpowiedź: Adam ma łącznie 9 książek.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 3 \overline{) 36} \\ \underline{-36} \\ 0 \end{array}$$

Odpowiedź: Adam ma 9 książek.

Ten sam typ błędu wręcz dominował: 36,8% w zadaniu 5B:

Ania trzyma swoje książki na dwóch półkach. Na górnej ma ich 12, a na dolnej 3 razy więcej. Ile Ania ma łącznie książek?

$$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

Odpowiedź: Ania ma łącznie 36 książek.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

Odpowiedź: Ania ma 36 książek.

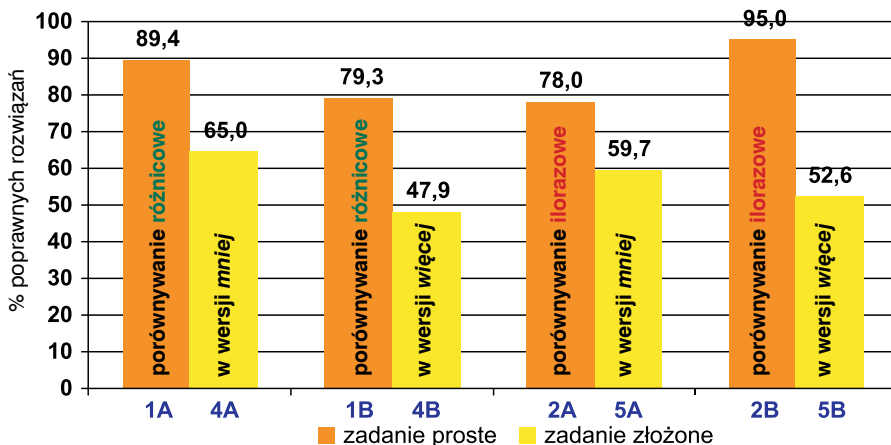


Diagram 4. Zadania proste na porównywanie różnicowe i ilorazowe oraz zadania złożone typu *szukana suma* – zestawienie poziomów poprawnych rozwiązań.

Oprócz zadań typowych w badaniach sięgnięto także po zadania nietypowe dotyczące porównywania różnicowego i ilorazowego – znacznie rzadziej pojawiające się w procesie kształcenia, czy nawet niepojawiające się w nim wcale. Zobaczmy, co nowego mogą one powiedzieć o rozwiązywaniu zadań tekstowych przez absolwentów I etapu kształcenia.

Zadanie proste na porównywanie różnicowe z nadmiarem danych

W badaniach 2008¹⁶ uczniowie rozwiązywali jeszcze jedno zadanie proste dotyczące porównywania różnicowego, choć raczej nie zdawali sobie z tego sprawy:

- 6 Adam narysował szlaczek złożony z kólek, trójkątów i kwadratów.
 Kólek narysował 50. Trójkątów było o 7 więcej, a kwadratów o 14 mniej niż kólek.
 Ile kwadratów narysował Adam?

Jest to tzw. zadanie z nadmiarem danych – informacja o liczbie trójkątów jest, z punktu widzenia postawionego w nim pytania, zbędna. Po jej wykreśleniu:

Adam narysował szlaczek złożony z kólek, trójkątów i kwadratów.

Kólek narysował 50. Trójkątów było o 7 więcej, a kwadratów o 14 mniej niż kólek.

Ile kwadratów narysował Adam?

powstaje zadanie identyczne z zadaniem 1A, czyli typowe zadanie na porównywanie różnicowe w wersji *mniej* – 89,4% poprawnych rozwiązań (por. wcze-

¹⁶ Dąbrowski M., 2009c.

śniej). Tymczasem to zadanie rozwiązało poprawnie 48,9% trzecioklasistów, zatem o ponad 40% mniej!

Dobre rozwiązania były dwójakiego rodzaju: uczeń wykonywał tylko właściwe działanie (22,4%) albo wykonywał kilka obliczeń i poszukiwany wynik wskazywał w odpowiedzi (26,5%):

Adam narysował szlaczek złożony z kólek, trójkątów i kwadratów. Kólek narysował 50. Trójkątów było o 7 więcej, a kwadratów o 14 mniej niż kólek. Ile kwadratów narysował Adam?

$$50 - 14 = 36$$

Odpowiedź: Adam narysował 36 kwadratów.

$$50 + 7 = 57$$

$$50 - 14 = 36$$

Odpowiedź: Adam narysował 36 kwadratów.

Adam narysował szlaczek złożony z kólek, trójkątów i kwadratów. Kólek narysował 50. Trójkątów było o 7 więcej, a kwadratów o 14 mniej niż kólek. Ile kwadratów narysował Adam?

$$50 + 7 = 57 \text{ trójkątów}$$

$$50 - 14 = 36 \text{ kwadratów}$$

Odpowiedź: Adam narysował 36 kwadratów.

Ta druga grupa rozwiązań była, jak widać, nieco liczniejsza.

Najczęściej powtarzającym się dla tego zadania błędem było wykorzystanie w obliczeniu wszystkich liczb podanych w jego treści:

Adam narysował szlaczek złożony z kóelek, trójkątów i kwadratów. Kóelek narysował 50. Trójkątów było o 7 więcej, a kwadratów o 14 mniej niż kóelek. Ile kwadratów narysował Adam?

$$50 + 7 = 57 - 14 = 43$$

Odpowiedź: Adam narysował 43 kwadraty.

$$50 + 7 = 57$$
$$57 - 14 = 43$$

Odpowiedź: ~~kwadratów~~ ^{ile} Były 43 kwadraty.

$$50 + 7 - 14 = 57 - 14 = 43$$

Odpowiedź: Adam narysował 43 kwadraty.

$$50 + 7 = 57 \rightarrow 50 + 7 = 57 - 14 = 43$$

Odpowiedź: Adam narysował 43 kwadraty.

Postąpiło w ten sposób 26,9% uczniów, czyli ponad $\frac{1}{4}$ trzecioklasistów. Jak do tego doszli?

Bardzo prawdopodobne wydaje się, że dokonali mniej więcej takiej analizy treści zadania:

$$50, 7, \text{więcej, zatem } 50 + 7 = 57$$

$$14 \text{ mniej, czyli } 57 - 14 = 43.$$

W dwóch z przytoczonych wyżej rozwiązań uczniowie zastosowali notację, którą często można zobaczyć przy okazji zadań tekstowych złożonych czy kilkietapowych obliczeń – przedstawili sekwencyjnie w jednym zapisie kolejne operacje arytmetyczne wykonywane w pamięci. Ten sposób zapisu jest bardzo popularny wśród trzecioklasistów – wróć jeszcze do tego tematu dalej.

Reasumując: **dodanie zbędnej informacji do typowego zadania tekstowego prostego pogorszyło jego wyniki prawie dwukrotnie**. Dla aż 40,5% trzecioklasistów na tyle skomplikowało to treść tego zadania, że ich próby jego rozwiązania zakończyły się niepowodzeniem.

Zadanie złożone na porównywanie różnicowe – szyk i sposób podania danych

W tych samym badaniach¹⁷ trzecioklasiści rozwiązywali także następujący „pakiet” zadań dotyczących porównywania różnicowego:

7A Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Janek ma już 24 modele. Piotr ma o 8 więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał?

7B Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Janek ma już 40 modeli. Piotr ma o osiem więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał?

7C Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Piotr ma o 8 modeli więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał, jeśli Janek ma 16 modeli?

7D Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Piotr ma o osiem modeli więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał, jeśli Janek ma już 32 modele?

Każde z zadań rozwiązywała inna, w pełni porównywalna, grupa uczniów.

Pierwsze z nich: **7A** jest typowym, często rozwiązywanym w szkole, zadaniem złożonym, w którym uczeń dokonuje dwukrotnego porównywania różnicowego.

¹⁷ Dąbrowski M., 2009c.

Zadanie **7B** różni się od poprzedniego tylko tym, że jedna z potrzebnych danych: *osiem* jest podana nie cyfrą, do czego szkoła konsekwentnie przyzwyczajają dzieci, lecz za pomocą słowa.

Zadanie **7C** ma zmieniony, w stosunku do **7A**, szyk podawania danych – informacja, od której rozpoczyna się typowe arytmetyczne rozwiązanie tego zadania znajduje się na końcu pytania.

Ostatnie zadanie: **7D** łączy „anomalie” obu poprzednich: ma zmieniony szyk i jedną z informacji podaną słownie.

We wszystkich czterech zadaniach liczby są dobrane w pełni analogicznie – ich postać nie eliminuje żadnej z operacji arytmetycznych.

Poziom rozwiązań tych czterech zadań prezentuje diagram 5.

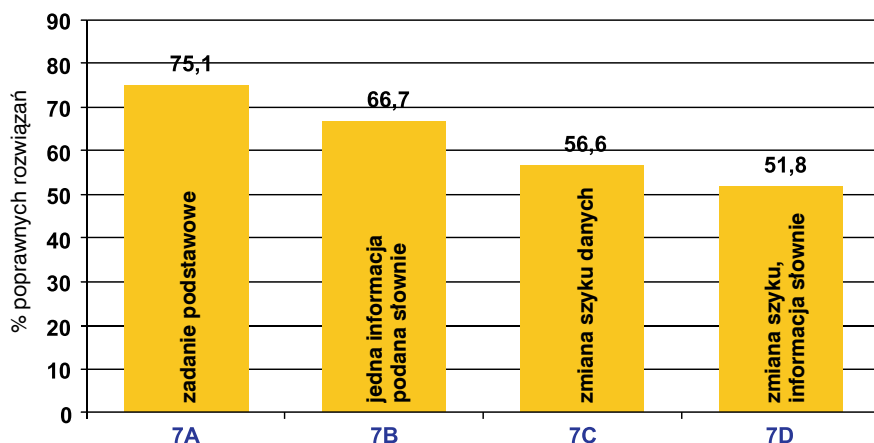


Diagram 5. Zadania złożone na porównywanie różnicowe: dane i ich szyk – procent poprawnych rozwiązań.

Zadanie **7A**, będące punktem odniesienia dla pozostałych zadań, rozwiązało poprawnie 75,1% uczniów, czyli ponad $\frac{3}{4}$. Jest to wynik niższy jedynie o 3-4% od rezultatów obu trudniejszych wersji zadań prostych (por. wcześniej), zatem trzeba uznać, że trzecioklasiści poradzi sobie z nim równie łatwo, jak z najprostszymi rozwiązywanymi zadaniami tekstowymi.

W zadaniu **7B** sukces odniosło 66,7% dzieci, zatem „ukrycie” jednej potrzebnej informacji w tekście zadania, poprzez zapisanie jej słowem, obniżyło wyniki o 8,4%.

Jest to mniejszy spadek, niż w przypadku zmiany szyku podawania danych – zadanie **7C** rozwiązało poprawnie 56,6% trzecioklasistów, czyli o 18,5% mniej niż zadanie podstawowe.

To zadanie, podobnie jak bardzo wiele innych zadań z pakietów edukacyjnych i zajęć, dzieci mogą rozwiązać, zupełnie nie rozumiejąc, czy nie czytając, jego treści – wystarczy dobrać do kolejnych podawanych w niej liczb i słów-kluczy odpowiednie działania.

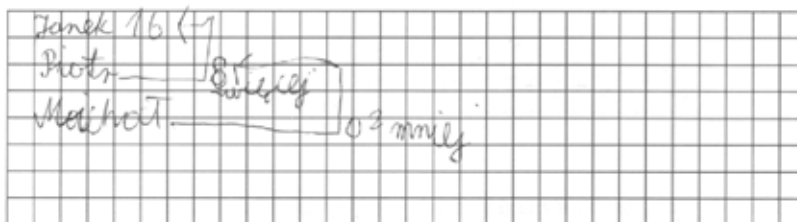
W zadaniu 7C ten manewr zawodzi – i to jest, prawdopodobnie, podstawowy powód aż tak dużego spadku poziomu rozwiązań.

Popatrzmy, jak ze zmienionym szykiem radzili sobie ci uczniowie, którzy treść zadania 7C przeczytali ze zrozumieniem:

Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Piotr ma o 8 modeli więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał, jeśli Janek ma 16 modeli?

$$8 + 16 - 2 = 22$$

Odpowiedź: Michał ma 22 modele samochodów.



Odpowiedź: Michał ma 22 modele samochodów.

$$\begin{aligned} \text{Janek} &= 16 \\ \text{Piotr} &= 16 + 8 = 24 \\ \text{Michał} &= 24 - 2 = 22 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Michał ma 22 modele.

I przykład tego, jak zdrowy rozsądek przegrywa z nawykiem (odruchem? strategią? ...) brania do obliczeń liczb w takiej kolejności, w jakiej są one podawane w treści zadania – tym razem z wykorzystaniem zadania **7D**:

Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Piotr ma o osiem modeli więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał, jeśli Janek ma już 32 modele?

$$8-2=6 \quad 32:6=5+2$$

Odpowiedź: Michał ma 5+2 samochodów.....

Zadania złożone – porównywanie różnicowe i ilorazowe ze znaną sumą

I ostatnie dwa zadania z tej grupy, także wykorzystane w 2008 roku¹⁸:

8A

Ania i Bożena pojechały z rodzicami na grzyby. Ania zebrała o 8 grzybów więcej od Bożeny. Razem zebrały ich 50. Ile grzybów zebrała Ania?

8B

Na dwóch półkach w sklepie stoją modele samochodów. Na górnej półce jest ich trzy razy więcej niż na dolnej. Razem na tych dwóch półkach stoi 120 modeli. Ile modeli stoi na górnej półce?

Strukturalnie, zadania te są modyfikacją zadań **4B** i **5B** – zamiast informacji o liczbie grzybów zebranych przez Anię (miejsce w pierwszej sali, liczby książek na górnej półce), podana jest informacja o łącznej liczbie zebranych grzybów (miejsce w obu salach, łącznej liczbie książek). Dobór liczb w obu zadaniach sprawia, że dają się one rozwiązać z użyciem bardzo prostych narzędzi, także dzięki zwykłemu odgadnięciu wyników. Można więc uznać, że badają one *zaradność matematyczną* dzieci w zakresie rozwiązywania bardziej złożonych zadań tekstowych dotyczących porównywania różnicowego i ilorazowego.

Zadanie **8A** rozwiązało poprawnie 9,8% trzecioklasistów. Poziom sukcesu dla zadania **8B** był nieznacznie wyższy: 12,4%.

¹⁸ Dąbrowski M., 2009c.

Wyniki obu zadań w zestawieniu z innymi typami zadań tekstowych na porównywanie różnicowe i ilorazowe w wersji *więcej* prezentuje diagram 6.

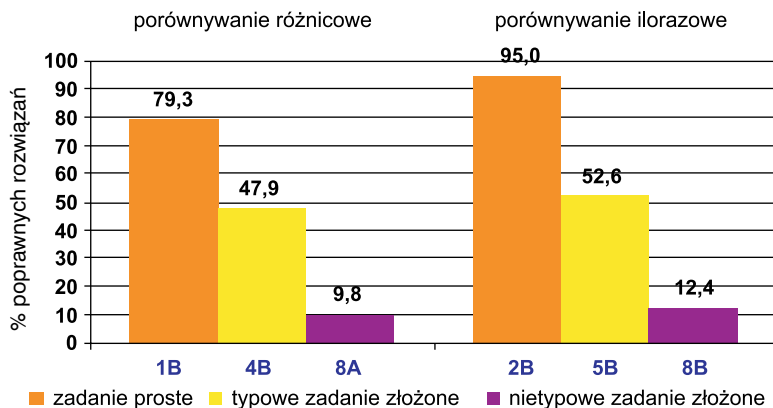


Diagram 6. Różne typy zadań na porównywanie różnicowe i ilorazowe w wersji *więcej* – zestawienie poziomów poprawnych rozwiązań.

Jak widać, w układzie: typowe zadanie proste, typowe zadanie złożone, nietypowe zadanie złożone spadek wyników jest bardzo znaczący. Warto zwrócić uwagę na to, że przypadku każdego typu zadań rezultaty dotyczące porównywania ilorazowego, w dość powszechnej opinii znacznie trudniejszego od porównywania różnicowego, są wyższe.

Jak już o tym wspominałem, oba zadania dają się rozwiązać za pomocą bardzo prostych środków:

Ania i Bożena pojechały z rodzicami na grzyby. Ania zebrała o 8 grzybów więcej od Bożeny. Razem zebrały ich 50. Ile grzybów zebrała Ania?



Odpowiedź: Ania zebrała 29 grzybów

Tu wystarczył rysunek – być może poprzedzony jakimiś dodatkowymi próbami.

A w tym rozwiązaniu, po rezygnacji z rysunku, uczeń zastosował *strategię prób i poprawek*¹⁹ – do celu doprowadził, prawdopodobnie, już drugi „strzał”:

Ania i Bożena pojechały z rodzicami na grzyby. Ania zebrała o 8 grzybów więcej od Bożeny. Razem zebrały ich 50. Ile grzybów zebrała Ania?

Odpowiedź: *Ania ma 29 grzybów.*

Ten uczeń „oddął cztery strzały”, w każdym kroku konsekwentnie przybliżając się do celu:

Odpowiedź: *Ania zebrała 29 grzybów.*

W tym rozwiązaniu drugiego z zadań strategia prób i poprawek została wsparta sporządzeniem tabelki²⁰ – i znowu wystarczyły dwa „strzały”:

Na dwóch półkach w sklepie stoją modele samochodów. Na górnej półce jest ich trzy razy więcej niż na dolnej. Razem na tych dwóch półkach stoi 120 modeli. Ile modeli stoi na górnej półce?

Odpowiedź: *Na górnej półce jest 90 modeli samochodów.*

¹⁹ Por. Dąbrowski M., 2008, s. 94-97.

²⁰ Por. Dąbrowski M., 2008, s. 102-104.

W kolejnym prób było dużo więcej, ale tabelka pozwoliła je wygodnie uporządkować:

	G	D	R	D	G	R	D	G	R	
	240	80	320	21	183	104	287	30	90	120
	63	21	84	50	150	200				
	240	70	280	40	180	160				

Odpowiedź: Na...górną...dolną...stoi 90 modeli.

Oczywiście, były także rozwiązania bliższe tego, czego oczekuje nasza szkoła:

Handwritten work on grid paper showing a diagram of a circle with arrows and several calculations:

$$50 - 8 = 42$$

$$42 : 2 = 21$$

$$21 + 8 = 29$$

Other scribbled-out calculations include $50 - 2 = 48$, $48 : 2 = 24$, $24 + 8 = 32$, and $32 + 8 = 40$.

Odpowiedź: Ania zebrała 29 grzyby.

$50 - 8 = 42$
$42 : 2 = 21$
$21 + 8 = 29$

$$(50 - 8) : 2 + 8 = 29$$

Na dwóch półkach w sklepie stoją modele samochodów. Na górnej półce jest ich trzy razy więcej niż na dolnej. Razem na tych dwóch półkach stoi 120 modeli. Ile modeli stoi na górnej półce?

Handwritten work on grid paper showing calculations:

$$120 : 2 = 60$$

$$60 - 30 = 30$$

$$30 \cdot 3 = 90$$

Odpowiedź: Na górnej półce stoi 90 modeli.

120 : 4 = 30	90 : 30 = 3
30 · 3 = 90	
30 · 1 = 30	

Odpowiedź: Na górnej półce stoi 90 modeli.

Moim zdaniem, takie właśnie „arytmetyczne” oczekiwania są jedną z głównych przyczyn tego, że poprawnych rozwiązań było tak mało. Do tej kwestii będę jeszcze wielokrotnie wracał.

Popatrzmy teraz na najbardziej typowe błędy.

Uczniowie, próbując rozwiązać zadania **8A** i **8B**, najczęściej wyszukiwali w tekście dane liczbowe i wykonywali na nich jakies proste operacje arytmetyczne – zrobiło tak odpowiednio 46,6% oraz 48,4% dzieci, czyli w przypadku każdego z zadań blisko połowa:

Ania i Bożena pojechały z rodzicami na grzyby. Ania zebrała o 8 grzybów więcej od Bożeny. Razem zebrały ich 50. Ile grzybów zebrała Ania?

$50 + 8 = 58$

Odpowiedź: Ania zebrała 58 grzybów.

Ania i Bożena pojechały z rodzicami na grzyby. Ania zebrała o 8 grzybów więcej od Bożeny. Razem zebrały ich 50. Ile grzybów zebrała Ania?

$$50 - 8 = 42$$

Ania i Bożena pojechały z rodzicami na grzyby. Ania zebrała o 8 grzybów więcej od Bożeny. Razem zebrały ich 50. Ile grzybów zebrała Ania?

$$50 - 8 = 42$$

Na dwóch półkach w sklepie stoją modele samochodów. Na górnej półce jest ich trzy razy więcej niż na dolnej. Razem na tych dwóch półkach stoi 120 modeli. Ile modeli stoi na górnej półce?

$$\begin{array}{r} 120 \\ : 3 \\ \hline 40 \end{array}$$

Odpowiedź: Na górnej półce jest 363 modeli samochodów.

$$120 : 3 = 40$$

Odpowiedź: Na górnej półce stoi 40 modeli.

$$3 \cdot 120 = 360$$

Odpowiedź: Na górnej półce stoi 360 modeli samochodów.

$$120 : 2 = 60$$

Odpowiedź: Na górnej półce stoi 60 modeli samochodów.

Na dwóch półkach w sklepie stoją modele samochodów. Na górnej półce jest ich trzy razy więcej niż na dolnej. Razem na tych dwóch półkach stoi 120 modeli. Ile modeli stoi na górnej półce?

$$120 : 2 = 120$$

Odpowiedź: Na górnej półce stoi 120 modeli.

$120 : 3 = 40$	$120 : 3 = 40$	$12 : 3 = 4$
	$- 12$	$4 \cdot 3 = 12$
	000	$12 - 12 = 0$

Odpowiedź: Na górnej półce stoi 40 modeli.

$$120 : 3 = 114$$

Odpowiedź: Na jednej półce jest 114 samochodów.

Podsumowanie

Wszystkie dotychczas opisane zadania to zadania dotyczące porównywania różnicowego i/albo ilorazowego, zatem reprezentują one obszar tematyczny, na który – tradycyjnie – w procesie kształcenia matematycznego w klasach 1-3 przeznaczona jest duża część czasu.

W pierwszych trzech paragrafach omówiono zadania, które są typowe, czy wręcz bardzo typowe dla naszego nauczania początkowego. W ciągu wielu ostatnich lat kolejne roczniki uczniów wielokrotnie się z nimi spotykały w procesie kształcenia i rozwiązywały ich całe serie.

A równocześnie, w wielu miejscach wyniki badań dotyczących tych zadań okazują się „nietypowe”:

- porównywalne, przynajmniej teoretycznie, zadania dają nieporównywalne wyniki – i dotyczy to zarówno zadań prostych, jak i złożonych;
- nie widać związków poziomu wyników tam, gdzie można by ich oczekiwać;
- a uczniowie masowo popełniają „dziwne” błędy, które zaczynają rodzić podejrzenie, że wielu z nich rozumie proces rozwiązywania zadań tekstowych zupełnie inaczej, niż byśmy tego chcieli.

Zadania zaprezentowane w kolejnych trzech paragrafach to zadania nietypowe dla naszej szkoły – na ogół w niej nieobecne albo rzadko goszczące (z wyjątkiem 7A). Zaowocowało to nie tylko znacznym spadkiem poziomu wyników, ale także nowymi obserwacjami dotyczącymi uczniowskiej sztuki rozwiązywania zadań tekstowych. Okazuje się, że:

- na poziom wyników zadania istotny wpływ ma kolejność i sposób podawania danych;
- obecność zbędnych danych, nawet w bardzo prostym zadaniu, zdecydowanie zaburza postępowanie sporej części uczniów;
- a trzecioklasiści jeszcze częściej niż przy typowych zadaniach wykonują na liczbach podawanych w treści zadania obliczenia zupełnie niezwiązane z sytuacją opisaną w zadaniu;
- ale nawet wówczas podawana odpowiedź najczęściej precyzyjnie nawiązuje do postawionego w zadaniu pytania.

Widać, że w miarę wzrostu oryginalności zadania, i to nawet z dobrze „oswojonego” obszaru tematycznego, zaczynają coraz silniej ujawniać się uczniowskie strategie pokonywania trudności, które mają niewiele wspólnego z faktycznym procesem rozwiązywania zadania tekstowego.

I.1.2 A gdy zadanie jest nietypowe?

Zadania tekstowe o nietypowej strukturze czy tematyce pojawiały się w każdej edycji badania umiejętności trzecioklasistów. Odniosę się tylko do części z nich. Ze względu na różnorodność struktur zadań, a w przypadku niektórych nawet niepowtarzalność, zostały one pogrupowane zgodnie z tym, czego nas uczą o rzeczywistym rozwiązywaniu zadań przez dzieci.

Co to znaczy rozwiązać zadanie?

Spójrzmy na następujące zadania:

- A** Rano dostarczono do sklepu 150 kajerek. Do południa sprzedano ich 112. Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajerek. Ile kajerek dowieziono?
- B** Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała. Ile wróbli zostało na drzewie?
- C** Małgosia, Janek, Zosia i Adam postanowili zagrać w karty. Usiedli przy kwadratowym stoliku tak, że przy każdym jego boku siedziała jedna osoba. Gdzie usiadł Adam, jeśli z jednej strony Zosi siedzi Janek, a z drugiej Małgosia?
- D** Basia i Ola miały po 20 złotych. Basia dała Oli 5 złotych. Teraz Ola ma więcej pieniędzy niż Basia. O ile więcej?
- E** Ewa i Paulina miały po tyle samo pieniędzy. Ewa dała Paulinie 4 złote. Teraz Paulina ma więcej pieniędzy niż Ewa. O ile więcej?

Zadania **A** i **B** to przykłady zadań²¹ z odpowiedzią podaną w treści:

- z piekarni dowieziono tyle kajerek, ile sprzedano, czyli 112;
- odleciała większość wróbli oprócz 8 – tyle zatem zostało.

Sytuacja opisana w zadaniu **C**²² dotyczy przestrzeni, jego rozwiązanie wymaga albo jej precyzyjnego wyobrażenia sobie, albo sięgnięcia po jakiś model, np. po odpowiedni rysunek, czyli jej zmatematyzowania. Zadanie nawiązuje do wiedzy nieformalnej uczniów – w procesie kształcenia w klasach 1-3 w polskiej szkole geometria przestrzenna jest nieobecna.

Zadania **D** i **E** stanowią dopełniającą się parę. W pierwszym zawarta jest informacja o początkowej kwocie posiadanej przez dziewczynki. Nie jest ona niezbędna do rozwiązania zadania, ale zdecydowanie powinna je upraszczać – jej obecność

²¹ Oba zadania wykorzystano w badaniach w 2010 roku, por. Dąbrowski M., 2011c.

²² Zadanie, podobnie jak oba kolejne, pochodzi z badań w 2011 roku, por. Dąbrowski M., 2012a.

sprawia, że zadanie staje się dość banalnym zadaniem złożonym, w którym trzy proste operacje arytmetyczne prowadzą do sukcesu. W drugim zadaniu tej informacji nie ma – uczniowie muszą albo samodzielnie przyjąć jakąś początkową kwotę, albo próbować radzić sobie bez niej, co – oczywiście – jest możliwe. Jak widać, zadania rzeczywiście „nie pasują” do kanonu zadań tekstowych rozwiązywanych tradycyjnie w klasach 1-3 w naszych szkołach. Ale równocześnie, **rozwiązanie każdego z nich wymaga absolutnie elementarnych narzędzi matematycznych** (por. dalej)!

Zobaczmy, jak sobie z nimi poradzili trzecioklasiści:

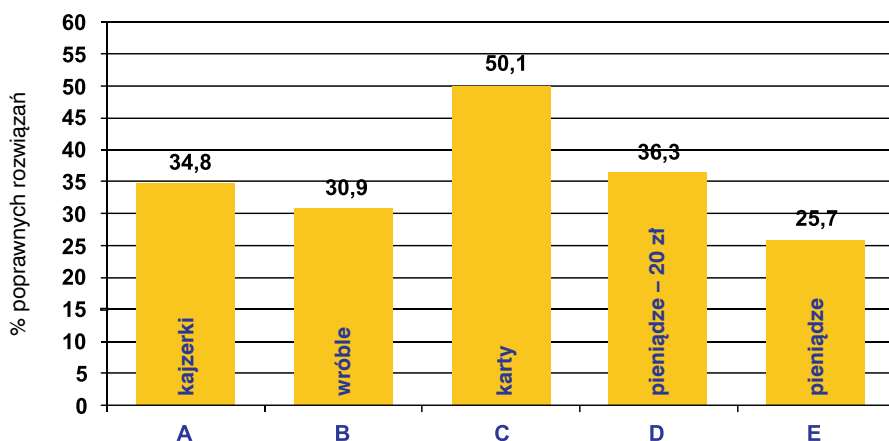


Diagram 7. Zadania o nietypowej strukturze I – procent poprawnych rozwiązań.

Jedynie w przypadku zadania **C** o grze w karty poziom poprawnych rozwiązań przekroczył bardzo nieznacznie barierę 50% – poradziło sobie z nim 50,1% trzecioklasistów. Dla pozostałych zadań waha się on od 36,3% dla zadania **D** do 25,7% dla **E**, zatem rezultaty są zbliżone i raczej niskie.

Przyjrzyjmy się dokładniej, jak uczniowie rozwiązywali te zadania.

W zadaniu **A** tylko trzech uczniów (0,3%) podało samą poprawną odpowiedź, reszta autorów dobrych rozwiązań, czyli 34,5% trzecioklasistów, liczyła:

Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie bylo 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?

$$\begin{array}{r} 150 \\ - 112 \\ \hline 38 \end{array} \quad 150 - 112 = 38 \quad 150 - 38 = 112$$

Odpowiedź: Dowieziono 112 kajzerek.

$$\begin{array}{r} 150 \\ - 112 \\ \hline 38 \end{array} \quad \begin{array}{r} 150 \\ - 38 \\ \hline 112 \end{array}$$

Odpowiedź: Do sklepu dowieziono 112 kajzerek.

Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie bylo 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?

$$\begin{array}{r} 150 \\ - 112 \\ \hline 38 \end{array}$$

Odpowiedź: Dowieziono 112 kajzerek.

$$\begin{array}{r} 150 \\ - 112 \\ \hline 38 \end{array} \quad \begin{array}{r} 112 \\ + 38 \\ \hline 150 \end{array}$$

Odpowiedź: Dowieziono 112 kajzerek.

Najczęściej zapisywali oni dwa odejmowania, rzadziej tylko jedno. Niekiedy pojawiało się jeszcze dodawanie, które, najprawdopodobniej, sprawdzało poprawność wcześniejszego odejmowania – do tego zwyczaju uczniów będą jeszcze wracać.

W przypadku zadania **B** trzecioklasiści byli śmielsi – aż 11,3% z nich, czyli mniej więcej co dziesiąty uczeń powtórzył, bez arytmetycznych „zabiegów”, odpowiedź podaną w treści:

Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?

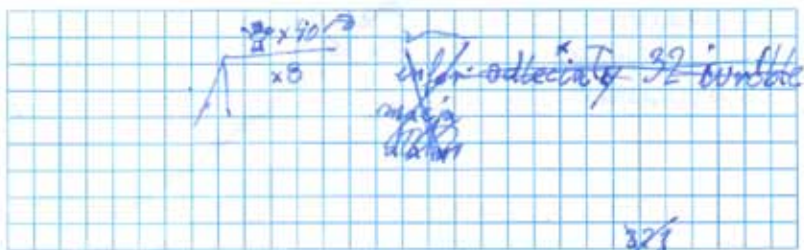


Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli.

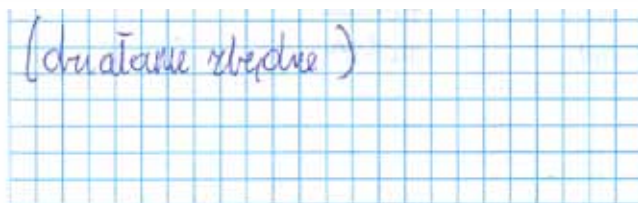


Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli.

Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?



Odpowiedź: Na drzewie zostało 8 wróbli.



Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli.

Jak widać, na ogół pierwszy krok rozwiązania zadania to próba napisania jakiegoś obliczenia. Czasami, po jego napisaniu uczeń, najprawdopodobniej, uświadamiał sobie, że nic nowego ono nie wnosi i wtedy prawie zawsze starannie je zamazywał. Autor jednego z pokazanych wyżej rozwiązań dodał, na wszelki wypadek, komentarz, który wyjaśniał (a może usprawiedliwiał?), dlaczego w rozwiązaniu nie ma żadnych obliczeń.

Ale czy muszą być? Czy rozwiązywanie zadania tekstowego polega na wykonywaniu jakiś obliczeń?

Jeśli wierzyć autorom kolejnych rozwiązań, to tak:

Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?

He wróbli odle

Zadanie nie do rozwiązania

Odpowiedź: ..zostało 8 wróbli.....

Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?

~~40-8=32~~
~~40-8=32~~
~~40-8=32~~
~~40-8=32~~
myśle że nie trzeba rozwiązywać tego zadania
gdym jego treść jest już podana

Odpowiedź: ..Na tym drzewie zostało 8 wróbli.....

Zadanie nie do rozwiązania, nie trzeba rozwiązywać tego zadania, bo nie ma czego liczyć.

Autor pierwszego z tych rozwiązań nawet, w „naturalnym” odruchu, chciał poprawić zadanie tak, aby jednak „dało się rozwiązać” (czyli aby dało się w nim coś policzyć), ale w końcu z tego zrezygnował.

Byli jednak tacy, którzy nie rezygnowali i – w efekcie – rozwiązali zupełnie inne zadanie:

Na drzewie siedziało 40 wróble. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróble zostało na tym drzewie?

Ile wróble odleciało?

$$\begin{array}{r} 40 \\ - 8 \\ \hline 32 \end{array}$$

Odpowiedź: *Odleciało 32 wróble*

Wydaje się, że **uczniowie ujawniają, przy okazji swoich komentarzy, jak faktycznie rozumieją proces rozwiązywania zadania tekstowego:**

rozwiązać = coś obliczyć!

I zgodnie z tą (bardzo powszechną) wiarą trzecioklasiści konsekwentnie coś liczyli.

Np. tak:

Na drzewie siedziało 40 wróble. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróble zostało na tym drzewie?

$$40 - 8 = 32$$

Odpowiedź: *Na tym drzewie zostało 32 wróble*

Albo tak:

Na drzewie siedziało 40 wróble. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróble zostało na tym drzewie?

$$40 - 8 = 32$$

$$40 - 32 = 8$$

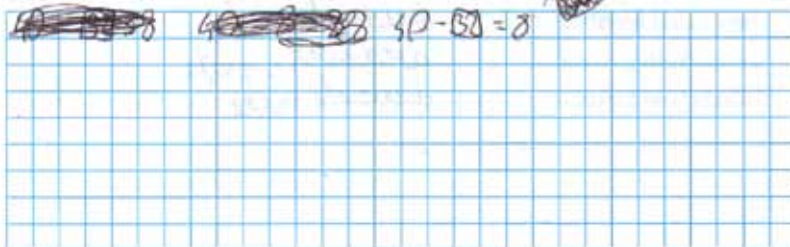
Odpowiedź: *Na drzewie zostało 8 wróble*

Któreś z tych dwóch odejmowań, wraz z dobrą odpowiedzią, podało 18,0% uczniów.

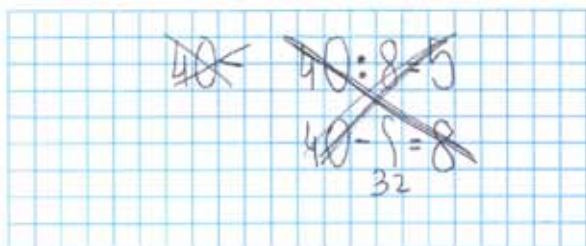
Tylko, co wynika z obliczenia $40 - 8 = 32$? I skąd się wzięło 32 w obliczeniu $40 - 32 = 8$? A w ogóle: po co obliczać to, co się już wie?

Być może niektórzy uczniowie też mieli podobne wątpliwości:

Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?

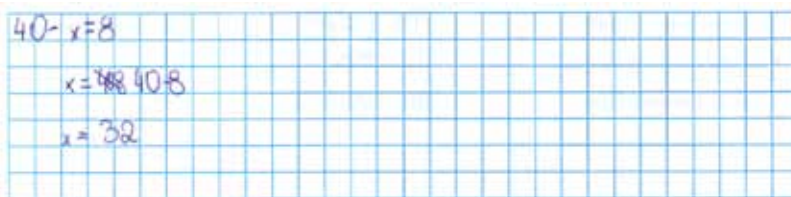


Odpowiedź: ~~Na tym drzewie zostało 32 wróbli~~
zostało 8 wróbli



Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli.

Pojedynczy uczniowie sięgali w swoich rozwiązaniach nawet po równanie:

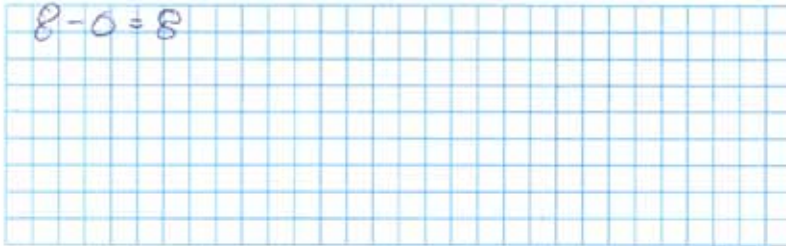


Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli.

Tylko co z jego pomocą liczyli? I co to ma wspólnego z matematyką?

Ta presja na zapisanie obliczenia owocowała niekiedy ciekawymi pomysłami:

Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?



Odpowiedź: Na drzewie zostało 8 wróbli

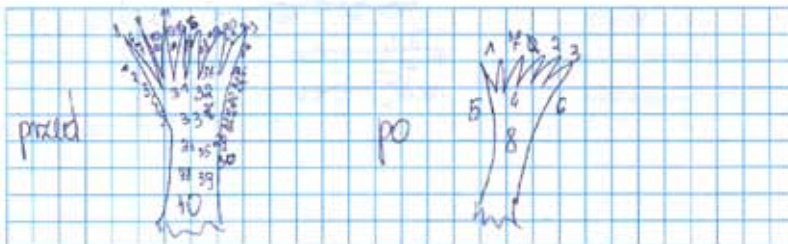
Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?



Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli

I na koniec jeszcze jedno dobre rozwiązanie tego zadania, które zachwyca mnie swoją oryginalnością:

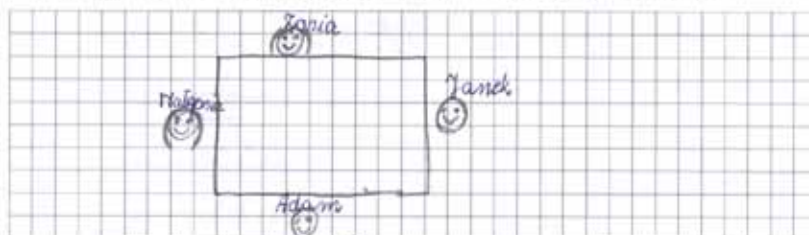
Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?



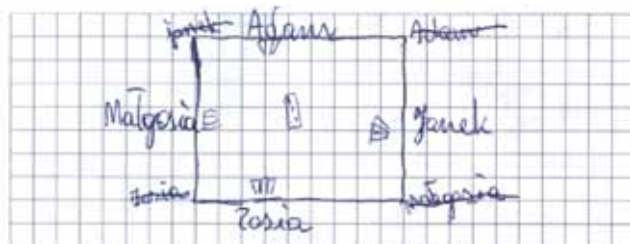
Odpowiedź: Na drzewie zostało 8 wróbli.

W zadaniu C znaczna część trzecioklasistów zaczynała od zrobienia rysunku. Przy tej okazji najczęściej „patrzyli” na ten stół z góry, czyli dokonywali dokładnie takiej samej matematyzacji jak większość ludzi dorosłych, gdy ma do czynienia z tego typu sytuacją. Niektóre rysunki były bardzo konkretne i szczegółowe:

Małgosia, Janek, Zosia i Adam postanowili zagrać razem w karty.
Usiedli przy kwadratowym stoliku tak, że przy każdym jego boku siedziała jedna osoba.
Gdzie usiadł Adam, jeśli z jednej strony Zosi siedzi Janek, a z drugiej Małgosia?



Odpowiedź: Adam usiadł ~~wprost~~ od strony Zosi.



Odpowiedź: Adam usiadł na północnej stronie przeciwko Zosi.

Inne bardziej uproszczone i schematyczne²³:

Janek, Ela, Beata i Piotrek postanowili zagrać razem w karty.
Usiedli przy kwadratowym stoliku tak, że przy każdym jego boku siedziała jedna osoba.
Gdzie usiadł Piotrek, jeśli z jednej strony Eli siedzi Janek, a z drugiej Beata?



Odpowiedź: Piotrek usiadł na zachodzie, Ela usiadła na zachodzie, Janek usiadł na północy, a Beata usiadła na południu.

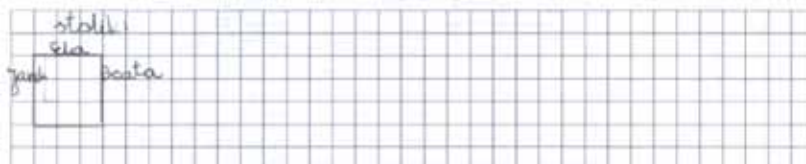
²³ To wersja tego samego zadania z równoległego tekstu – inne imiona dzieci, ale identyczna struktura zadania.

I jeszcze jeden podobny przykład, który bardzo ładnie pokazuje, jak zrobienie rysunku wydobywa z treści zadania to, co w niej jest najważniejsze:

Janek, Ela, Beata i Piotrek postanowili zagrać razem w karty.

Usiedli przy kwadratowym stoliku tak, że przy każdym jego boku siedziała jedna osoba.

Gdzie usiadł Piotrek, jeśli z jednej strony Eli siedzi Janek, a z drugiej Beata?



Odpowiedź: Piotrek siedzi na przeciwko Eli.

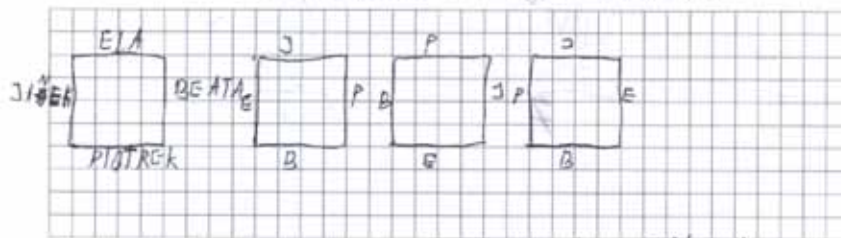
Uczeń przerwał „rysowanie” zadania w chwili, gdy wszystko stało się jasne – piękny przykład zwięzłości.

Niektóre rozwiązania zaskakiwały swoją kompletnością i dojrzałością:

Janek, Ela, Beata i Piotrek postanowili zagrać razem w karty.

Usiedli przy kwadratowym stoliku tak, że przy każdym jego boku siedziała jedna osoba.

Gdzie usiadł Piotrek, jeśli z jednej strony Eli siedzi Janek, a z drugiej Beata?

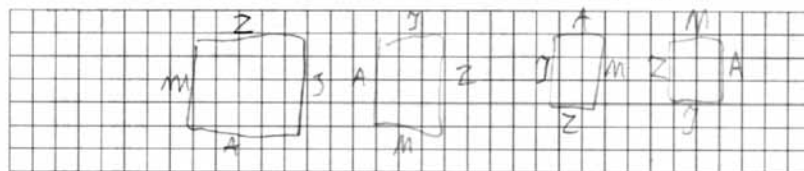


Odpowiedź: Piotrek mógł siedzieć z każdej strony z której strony siedzą się karty.

Małgosia, Janek, Zosia i Adam postanowili zagrać razem w karty.

Usiedli przy kwadratowym stoliku tak, że przy każdym jego boku siedziała jedna osoba.

Gdzie usiadł Adam, jeśli z jednej strony Zosi siedzi Janek, a z drugiej Małgosia?



Odpowiedź: To zależy gdzie usiadł Zosia.

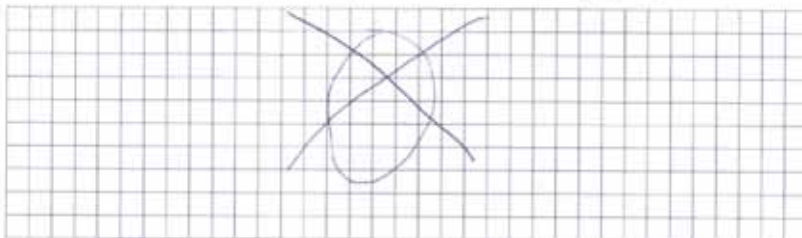
Z pomocą rysunku zadanie to rozwiązało poprawnie 40,0% trzecioklasistów.

10,1% uczniów poradziła sobie z nim bez rysunku, podając po prostu właściwą odpowiedź, czasami z jakimiś, niekiedy zaskakującymi, „dodatkami”:

Małgosia, Janek, Zosia i Adam postanowili zagrać razem w karty.

Usiedli przy kwadratowym stoliku tak, że przy każdym jego boku siedziała jedna osoba.

Gdzie usiadł Adam, jeśli z jednej strony Zosi siedzi Janek, a z drugiej Małgosia?



Odpowiedź: Adam siedział między stolik 'Janek i Małgosia'.

Małgosia, Janek, Zosia i Adam postanowili zagrać razem w karty.

Usiedli przy kwadratowym stoliku tak, że przy każdym jego boku siedziała jedna osoba.

Gdzie usiadł Adam, jeśli z jednej strony Zosi siedzi Janek, a z drugiej Małgosia?



Odpowiedź: Adam usiadł naprzeciwko Zosi.

Jaką funkcję pełni w ostatnim rozwiązaniu działanie $4 + 4 = 8$? Czyżby dała ponownie znać o sobie „potrzeba” liczenia?

Tego typu zaskakujących zjawisk było znacznie więcej, zwłaszcza wśród błędnych rozwiązań, wróć do nich dalej.

W zadaniu **D** ogromna większość spośród tych uczniów, którzy osiągnęli sukces zapisała – zgodnie z oczekiwaniami – sekwencję trzech prostych obliczeń:

Basia i Ola miały po 20 złotych. Basia dała Oli 5 złotych.
Teraz Ola ma więcej pieniędzy niż Basia. O ile więcej?

$$20 - 5 = 15 \quad 20 + 5 = 25$$

$$25 - 15 = 10$$

Odpowiedź: Ola ma o 10zł więcej niż Basia.

$$20zł - 5zł = 15zł \quad 20zł + 5zł = 25zł$$

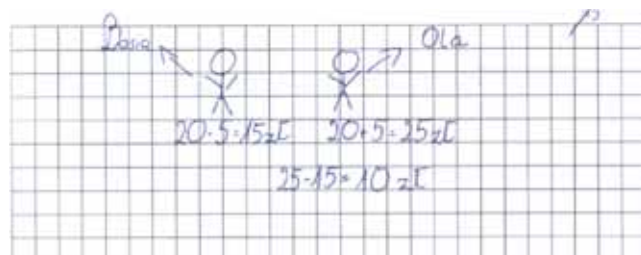
$$25zł - 15zł = 10zł$$

Odpowiedź: Ola ma o 10zł więcej od Basii.

$$20 - 5 = 15 \quad \del{20 - 5 = 15} \quad 20 + 5 = 25$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ - 15 \\ \hline 10 \end{array}$$

Odpowiedź: O 10 zł.



Odpowiedź: Ola ma teraz o 10zł więcej niż Basia.

Zrobiło tak 35,1% badanych²⁴. 1,2% dzieci ograniczyło się do podania samej poprawnej odpowiedzi.

Rozwiązując arytmetycznie zadanie E uczniowie musieli sami ustalić, po ile pieniędzy miały Ewa i Paulina na początku:

Ewa i Paulina miały po tyle samo pieniędzy. Ewa dała Paulinie 4 złote.
Teraz Paulina ma więcej pieniędzy niż Ewa. O ile więcej?

$$E - 10 - 4 = 6 \quad P - 10 + 4 = 14$$
$$14 - 6 = 8$$

Odpowiedź: Więcej o 8 zł.

$$20 \text{ zł} = 16$$
$$EWA \quad 20 \text{ zł} + 4 \quad 24 \text{ zł} \quad 24 - 16 = 8 \text{ zł}$$
$$PAULINA \quad 10 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Paulina ma więcej pieniędzy o 8 zł.

Postąpiło w ten sposób 21,3% trzecioklasistów.

Pozostali uczniowie, którzy poradzi sobie z tym zadaniem: 4,4%, albo podawali samą odpowiedź, albo ograniczali się do jednego prostego dodawania:

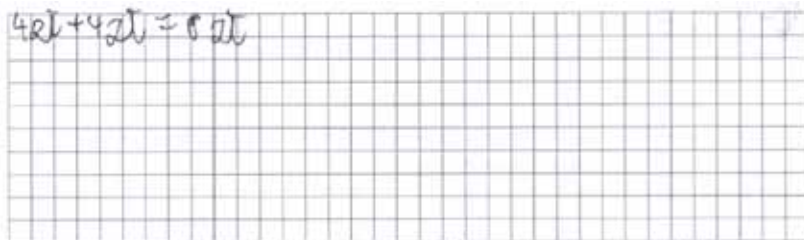
Ewa i Paulina miały po tyle samo pieniędzy. Ewa dała Paulinie 4 złote.
Teraz Paulina ma więcej pieniędzy niż Ewa. O ile więcej?

Odpowiedź: Paulina ma o 8 zł więcej.

Ewa i Paulina miały po tyle samo pieniędzy. Ewa dała Paulinie 4 złote.
Teraz Paulina ma więcej pieniędzy niż Ewa. O ile więcej?



Odpowiedź: Paulina ma więcej zł od Ewy o 8 zł

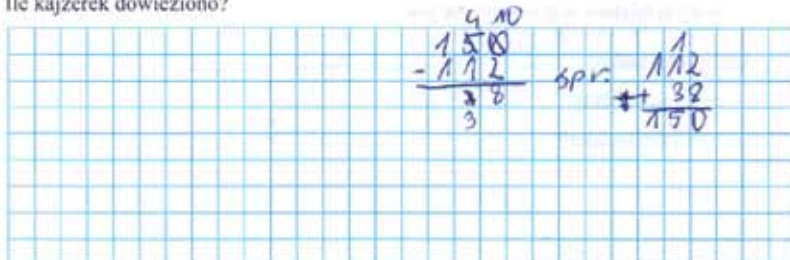


Odpowiedź: Paulina ma więcej pieniędzy od Ewy o 8 zł.

Pora na błędne rozwiązania – to one najlepiej ujawniają prawdę o faktycznej wiedzy i rzeczywistych przekonaniach uczniów.

W zadaniu **A** najczęstszym błędem – zrobiło go 27,3% trzecioklasistów, czyli ponad $\frac{1}{4}$ – było podanie w odpowiedzi wyniku wykonanego odejmowania:

Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?



Odpowiedź: Dowieziono 38 kajzerek.

$$150 - 112 = 38$$

Odpowiedź: Dowieziono 38 kajzerek.

Skąd takie rozumowanie? Żeby to zrozumieć, trzeba się przyjrzeć treści zadania:

150, sprzedano, 112, zatem $150 - 112 = 38$.

Warto zwrócić uwagę na dodawanie dopisane przez ucznia w pierwszym rozwiązaniu. Jak sam autor zaznaczył, jest to sprawdzenie – w jego mniemaniu **sprawdzenie poprawności rozwiązania zadania**. I trudno się temu dziwić, bo jeśli dla ucznia rozwiązanie zadania tekstowego polega na wykonaniu obliczenia, to pewność poprawności rozwiązania, w naturalny sposób, daje sprawdzenie poprawności rachunków. I jedno i drugie nie jest prawdą, ale taki pogląd wśród uczniów jest, sądząc po ich rozwiązaniach, powszechny.

Prawie równie popularne: 20,2% było wykorzystanie w obliczeniach wszystkich trzech liczb podanych w treści:

Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?

$$150 - 112 = 100 - 100 + 50 - 10 - 2 = 38$$
$$150 + 38 = 188$$

Odpowiedź: Dowieziono 188 kajzerek.

Obliczenie: $150 - 112 = 38$ $38 + 150 = 188$

Odpowiedź: Dowieziono 188 kajzerek.

Autorzy tych rozwiązań zaczęli, być może, tak jak ich koledzy powyżej, ale „czytali” treść zadania do końca:

150, sprzedano, 112, zatem $150 - 112 = 38$.

dowieziono, 150, czyli $38 + 150 = 188$.

A przecież liczby z treści zadania, wszystkie albo niektóre, można jeszcze było po prostu dodać:

Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112. Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek. Ile kajzerek dowieziono?

$$150 + 112 + 150 = 412$$

Odpowiedź: ^{ów} 412 kajzerek dowieziono 412.

$$150 + 150 = 300$$

Odpowiedź: Dowieziono 300 kajzerek.

$$\begin{aligned} \cancel{150 + 112} &= 42 \\ 150 + 112 &= 262 \\ 262 - 112 &= 150. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dowieziono 262 kajzerek.

I, przy okazji, kolejny przykład sprawdzenia.

W przypadku zadania B prawie połowa trzecioklasistów: 49,1% odjęła liczby widoczne w treści zadania, podając uzyskany wynik jako odpowiedź na postawione pytanie:

Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała. Ile wróbli zostało na tym drzewie?

$$40 - 8 = 32$$

Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 32 wróbli.

$$\begin{array}{r} 40 \\ - 8 \\ \hline 32 \end{array}$$

Odpowiedź: Na drzewie zostało 32

$$\begin{array}{r} 376 \\ 40 \\ - 8 \\ \hline 32 \end{array}$$

Odpowiedź: Na drzewie zostało 32 wróbli

$$40 - 8 = 32$$

Odpowiedź: zostało 32 wróbli

Skąd ten pomysł i to w aż tak masowym wydaniu? Znow trzeba spojrzeć na treść zadania w sposób, w jaki – najprawdopodobniej – patrzy na nią spora część uczniów:

$$40, 8, \text{ odleciało, czyli } 40 - 8 = 32.$$

Znacznie rzadziej w tym zadaniu uczniowie wykonywali na liczbach podanych w treści inne operacje arytmetyczne:

Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?

$40 - 8 = 32$

Odpowiedź: ~~na tym drzewie zostało 32 wróble~~ *na tym drzewie zostało 22 p. wróble*

$40 : 8 = 5$

Odpowiedź: *Na tym drzewie zostało 5 wróble*

$40 + 8 = 48$

Odpowiedź: *Na tym drzewie zostało 48 wróble*

Po dodawanie, mnożenie albo dzielenie obu liczb z treści zadania sięgnęło 8,6% trzecioklasistów. Należy sądzić, że znów daje tu o sobie znać uczniowska strategia dobierania działania do liczb, bo jak inaczej wyjaśnić sens np. mnożenia liczby wszystkich wróbli przez liczbę tych, które nie odleciały.

To samo zadanie w postaci zamkniętej, z czterema odpowiedziami, pojawiło się także w badaniu OBUT 2011²⁵:

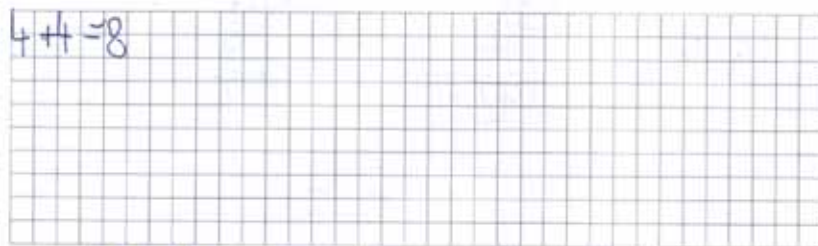
Na drzewie siedziało 30 wróbli.
Nagle większość z nich, oprócz 6, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?

- A. 5
- B. 24
- C. 6
- D. 36

Tym razem poprawną odpowiedź zaznaczyło 50,2% trzecioklasistów, a 41,9% wskazało liczbę 24, czyli, prawdopodobnie, odjęło liczby z treści zadania. Odpowiedź A wybrało 4,0% trzecioklasistów, a odpowiedź D: 3,3%.

W zadaniu **C** w błędnych rozwiązaniach trudno jest wyróżnić jakieś konkretne kategorie, najciekawsze są w nich „dopiski”:

Małgosia, Janek, Zosia i Adam postanowili zagrać razem w karty.
Usiedli przy kwadratowym stoliku tak, że przy każdym jego boku siedziała jedna osoba.
Gdzie usiadł Adam, jeśli z jednej strony Zosi siedzi Janek, a z drugiej Małgosia?

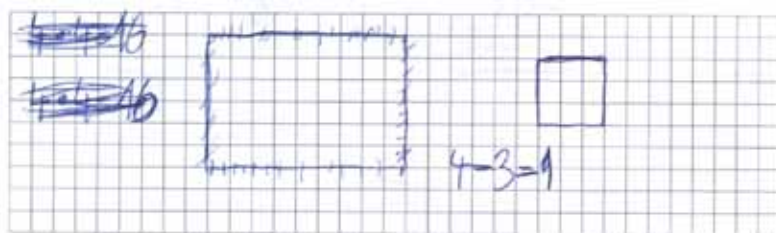


Odpowiedź: ~~Adam~~ Adam usiadł przy bliźszej stronie



Odpowiedź: Adam usiadł z 4^{tej} strony stołu.

²⁵ Dąbrowski M., Wiatrak E., 2011, s. 19-24.



Odpowiedź: Adam usiadł ~~przy kwadratowym stoliku~~ i przesuwał boki stolika.



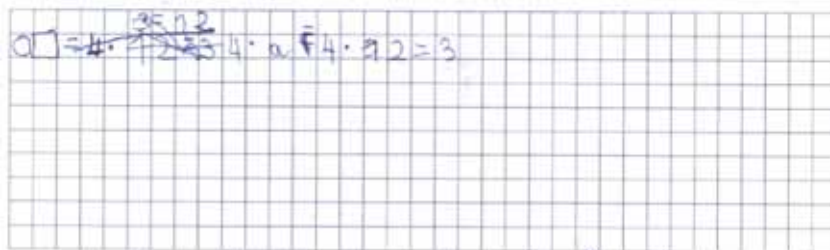
Odpowiedź: ~~Ja~~ Adam usiadł na kanapie.

Skąd u uczniów taka silna i powszechna potrzeba zapisania w tym zadaniu jakiegoś obliczenia?

Najprawdopodobniej stąd, że dla większości z nich rozwiązanie zadania jest tożsame z zapisaniem i wykonaniem jakiegoś obliczenia – i to niezależnie od tematyki tego zadania.

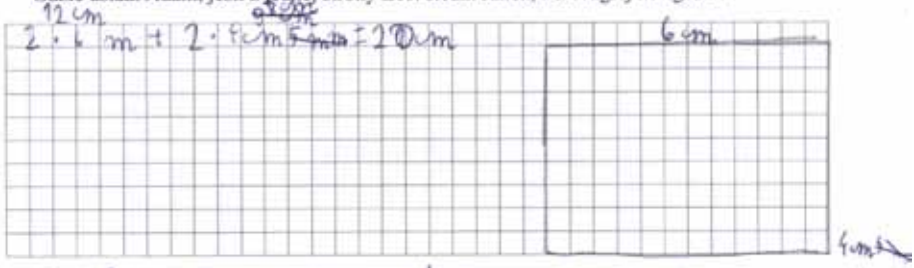
I dwa kolejne przykłady – tym razem związane z podanym w zadaniu kształtem stolika:

Małgosia, Janek, Zosia i Adam postanowili zagrać razem w karty.
Usiedli przy kwadratowym stoliku tak, że przy każdym jego boku siedziała jedna osoba.
Gdzie usiadł Adam, jeśli z jednej strony Zosi siedzi Janek, a z drugiej Małgosia?



Odpowiedź: Obwód ~~kwadratu~~ wynosi ~~16~~ 16 metrów.

Małgosia, Janek, Zosia i Adam postanowili zagrać razem w karty.
 Usiedli przy kwadratowym stoliku tak, że przy każdym jego boku siedziała jedna osoba.
 Gdzie usiadł Adam, jeśli z jednej strony Zosi siedzi Janek, a z drugiej Małgosia?



Odpowiedź: Adam, Zosia, Janek i Małgosia = Wtedy każdy stron jest 10 cm

Wydaje się, że to kolejny odruch: **jak kwadrat czy prostokąt, to pewnie należy obliczyć obwód.**

W zadaniu **D** wśród błędnych rozwiązań prym wiodły: 26,6% takie jak te poniżej:

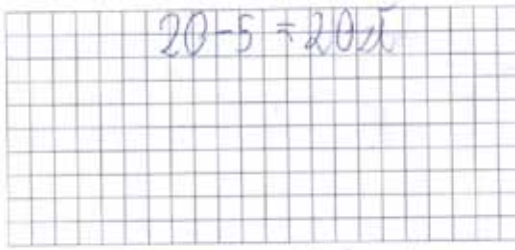
Basia i Ola miały po 20 złotych. Basia dała Oli 5 złotych.
 Teraz Ola ma więcej pieniędzy niż Basia. O ile więcej?



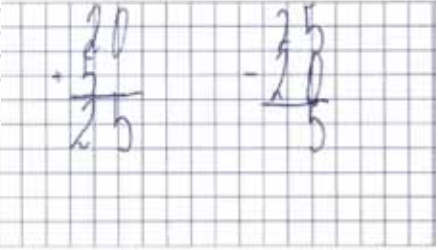
Odpowiedź: Ola ma o 5 zł więcej.



Odpowiedź: 0,5 zł więcej.



Odpowiedź: Ola ma o 5 zł więcej.



Odpowiedź: 0,5 zł więcej

Wydaje mi się, że uczniowie od początku wiedzieli, jaką podadzą odpowiedź, a zapisane obliczenia domykają jedynie procedurę „rozwiązywania” zadania tekstowego. Stąd i różne bardzo działania i brak uwagi przy zapisywaniu ich wyniku. W ostatnim rozwiązaniu mamy kolejną próbę „sprawdzenia poprawności” rozwiązania zadania.

Dość często: 12,2% trzecioklasiści do błędnej odpowiedzi dopisywali – bo taka chyba była kolejność ich postępowania – sensowne obliczenia, ale nie potrafili na ich podstawie zmienić swojego początkowego przekonania:

Basia i Ola miały po 20 złotych. Basia dała Oli 5 złotych.

Teraz Ola ma więcej pieniędzy niż Basia. O ile więcej?

$$20zł - 5zł = 15zł \quad | \quad 20zł + 5zł = 25zł \quad | \quad 20zł + 5zł = 25zł \quad | \quad 20zł + 5zł = 25zł$$

$$5zł = 25zł \quad | \quad 25zł - 15zł = 10zł$$

Odpowiedź: 10zł więcej.

$$20 - 5 = 15 \quad 20 + 5 = 25$$

Odpowiedź: Basia Ola ma więcej o 5zł

$$20zł + 5zł = 25zł$$

$$20zł - 5zł = 15zł$$

Odpowiedź: Teraz Ola ma 25zł, a Basia o 5 mniej.

Rodzi to podejrzenie, że część uczniów – mimo że konsekwentnie zapisuje obliczenia – nie widzi ich związku z formułowaną odpowiedzią. Obliczenia są dla nich czymś obowiązkowym, jednak nie rozumieją, najprawdopodobniej, ich funkcji w procesie arytmetycznego rozwiązywania zadania tekstowego.

Zadanie to w postaci zamkniętej zostało wykorzystane w badaniu OBUT 2012²⁶:

Basia i Ola miały po 20 złotych. Basia dała Oli 5 złotych. Teraz Ola ma więcej pieniędzy niż Basia. O ile więcej?

- A. o 4 złote
- B. o 5 złotych
- C. o 10 złotych
- D. o 25 złotych

Poprawną odpowiedź zaznaczyło 33,0% badanych trzecioklasistów, podczas gdy 50,0% wskazało odpowiedź B, czyli, najprawdopodobniej, „od razu” wiedziało, jaka odpowiedź jest „właściwa”. 14,8% uczniów wybrało odpowiedź D, czyli sumę liczb podanych w treści zadania, a 1,5% odpowiedź A, czyli ich iloraz.

W zadaniu E nie było podanych początkowych kwot, a w treści była podana tylko jedna liczba – nie było więc „dobrego” punktu startowego do zapisania obliczenia. Prawdopodobnie dlatego uczniowie najczęściej: 23,6% poprzestawali na podaniu samej błędnej odpowiedzi: *o 4 złote więcej*.

Ewa i Paulina miały po tyle samo pieniędzy. Ewa dała Paulinie 4 złote. Teraz Paulina ma więcej pieniędzy niż Ewa. O ile więcej?



Odpowiedź: *Paulina ma 4 zł więcej niż Ewa.*

²⁶ Por. Dąbrowski M., Wiatrak E. 2012a, s. 24-33.

Nieco rzadziej: 16,9% ilustrowali ją jakimiś obliczeniami:

Ewa i Paulina miały po tyle samo pieniędzy. Ewa dała Paulinie 4 złote.
Teraz Paulina ma więcej pieniędzy niż Ewa. O ile więcej?

$$6 \text{ zł} + 4 \text{ zł} = 10 \text{ zł}$$
$$10 \text{ zł} - 6 \text{ zł} = 4 \text{ zł}$$

Odpowiedź:

~~Paulina ma 4 więcej~~
Paulina ma 4 zł więcej od Ewy.

Ewa i Paulina miały po tyle samo pieniędzy. Ewa dała Paulinie 4 złote.
Teraz Paulina ma więcej pieniędzy niż Ewa. O ile więcej?

$$4 \text{ zł} + 2 = 8 \quad 8 - 4 = 4$$

Odpowiedź:

Paulina ma ~~zwią~~ więcej o 4 zł.

Ewa i Paulina miały po tyle samo pieniędzy. Ewa dała Paulinie 4 złote.
Teraz Paulina ma więcej pieniędzy niż Ewa. O ile więcej?

$$10 \text{ zł} + 4 = 14 \quad 10 \text{ zł} - 6 \text{ zł} = 4 \text{ zł}$$

Odpowiedź:

0 4 złote więcej.

Reasumując: dla znacznej części trzecioklasistów rozwiązanie zadania tekstowego polega, prawdopodobnie, na wykonaniu jakiegoś obliczenia i podaniu odpowiedzi na postawione w treści pytanie. Wydaje się, że dla części z nich te dwie rzeczy: obliczenia oraz odpowiedź wcale nie muszą się z sobą w wyraźny sposób wiązać.

Zadania opisane w tym paragrafie, z wyjątkiem zadania **C**, o grze w karty, dały się zmatematyzować z pomocą operacji dodawania i odejmowania. Część uczniów „analizując” zadania tego typu skupia się na liczbach zawartych w treści, zwłaszcza tych zapisanych cyframi, oraz słowach-kluczach, które pomagają im dobrać „pasujące” działanie – pasujące do liczb czy wyrwanych z kontekstu słów, lecz nader często zupełnie niezwiązane z faktyczną treścią zadania. Im zadanie mniej typowe, tym więcej tego typu prób.

Co zrobić z tymi liczbami?

Oto kilka kolejnych nietypowych zadań tekstowych:

F Ania w ciągu 10 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu 45 minut?

G Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

H Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?

I Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?

Także każde z tych zadań daje się rozwiązać za pomocą elementarnych narzędzi matematycznych, a ich arytmetyczne rozwiązanie wymaga wykonania dwóch czy trzech prostych operacji. Zadania **F**, **G** oraz **H** były wykorzystane w badaniach w 2008 roku²⁷, a zadanie **I** w 2010²⁸. Jak widać, zadania **H** i **I** są do siebie dualne: w pierwszym dana jest liczba drzew, trzeba ustalić długość drogi, w drugim znana jest długość drogi, trzeba ustalić liczbę drzew.

²⁷ Dąbrowski M., 2009c.

²⁸ Dąbrowski M., 2012a.

10 min	10 = 10
45 min	45 = 45

Odpowiedź: w ciągu 45 minut przeczyta 45 str.

45 min	45 stron
--------	----------

Odpowiedź: Ania przeczyta 45 stron.

10 min = 10 str.	
40 min = 40 str.	
5 min = 5 str.	= 45 str.

Odpowiedź: w ciągu 45 minut przeczyta 45 stron książki.

Czasami pomagało odwołanie się do jednej minuty:

Ania w ciągu 10 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu 45 minut?

10 min	45 : 10 = 4	4 * 10 = 40	40 + 5 = 45
10 min : 10 = 1	45 min : 1 = 45		

Odpowiedź: w ciągu 45 minut przeczyta 45 ^{stron} ~~stron~~ ^{książki} ~~książki~~.

45 : 1 = 45

45 min · 1 = 45

W zadaniu G, jak już wspominałem, dwie albo trzy proste operacje arytmetyczne prowadziły do sukcesu:

Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

$$\begin{array}{r} 16 : 9 \\ - 9 \quad \rightarrow 7 \\ \hline 7 \quad \quad 2 \end{array}$$

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 2 kg.

Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

$$16 \text{ kg} : (2 \cdot 7) = 2 \text{ kg}$$

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 2 kg.

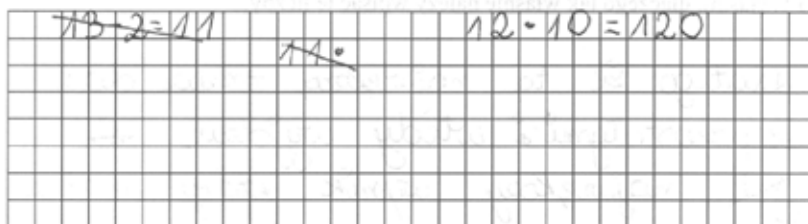
$$\cancel{16} + 16 - 7 - 7 = 2$$

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 2 kilogramy.

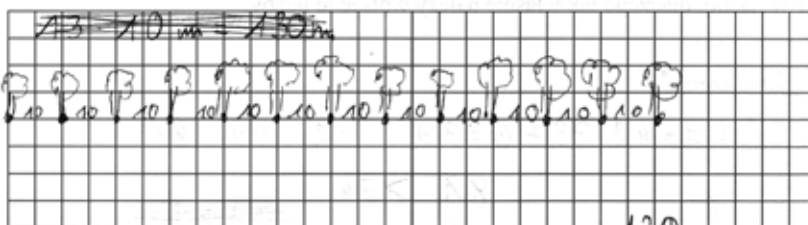
$$\begin{array}{l} \cancel{16} \text{ kg} = 9 \text{ kg} \cdot 2 = 18 \text{ kg} \\ 18 \text{ kg} - 16 \text{ kg} = 2 \text{ kg} \end{array}$$

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 2 kg.

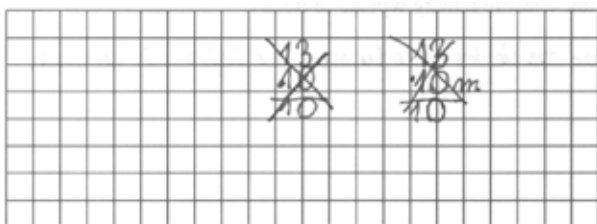
Odkrycie to jest dużo prostsze, gdy sięgnie się po rysunek:



Odpowiedź: Ta droga ma długość 120 m.....



Odpowiedź: Ta droga ma długość 120 m.....



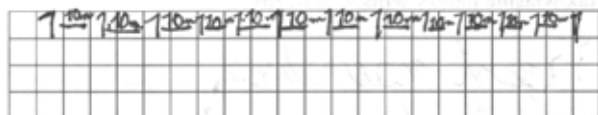
Odpowiedź: Ta droga ma 120m długości.....



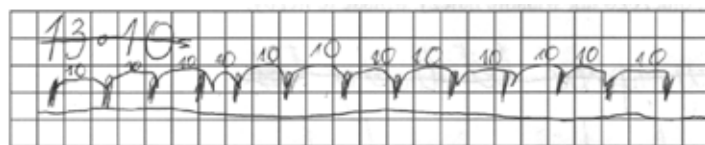
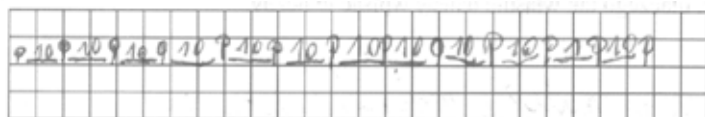
Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120

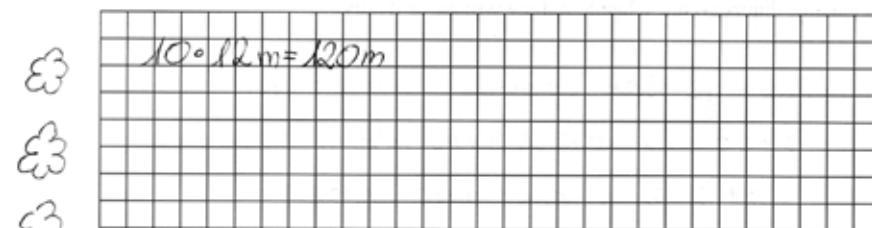
Odpowiedź: Ta droga ma 120^m długości



Odpowiedź: Droga ma 120m.



Jak widać, rysunki mogą być różne – od bardzo konkretnych do symbolicznych, a sama droga wcale nie musi być prosta:



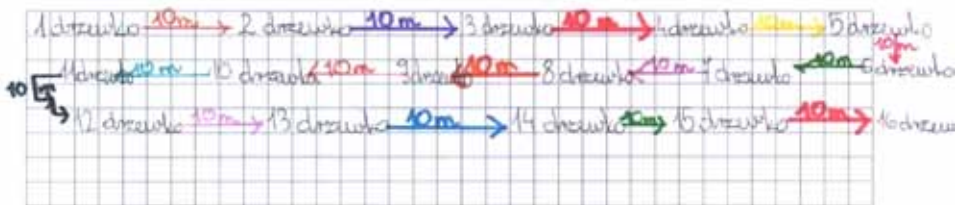
Odpowiedź: Ta droga ma 120 metrów.



Łącznie: 5,3% poprawnych rozwiązań.

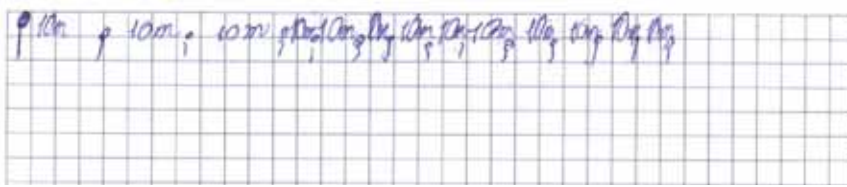
Także w zadaniu I najlepszym pomysłem było zrobienie rysunku²⁹:

Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka.
Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu.
Droga ma 150 metrów długości. Ile drzewek posadzono?



Odpowiedź: Posadzono 15 drzewek.

choćby bardzo prostego:



Odpowiedź: Posadzono 14 drzewek.

Z tej możliwości skorzystało 1,8% trzecioklasistów.

Dwa razy mniej uczniów: 0,9% odniosło sukces z pomocą odpowiednich operacji arytmetycznych:

Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka.
Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu.
Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?



Odpowiedź: Posadzono 14 drzewek.

²⁹ Zadania z dwóch równoległych grup.

$$13 \cdot 1 + 130 = 10 = 1 + 13 = 14$$

Odpowiedź: Posadzono 14 drzewek.

A jakie błędy najczęściej popełniali uczniowie?

W zadaniu **F** trzecioklasiści, oczywiście, liczyli. Najchętniej: 21,4% sięgali po mnożenie liczb 10 i 45:

6. Ania w ciągu 10 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu 45 minut?

$$45 \text{ min} \cdot 10 = 450$$

Odpowiedź: ~~Przeoczyta~~ 45 Ania w ciągu 45 min przeoczyta 450 stron.

$$10 \cdot 45 = 450$$

Odpowiedź: W ciągu 45 minut Ania przeoczyta 450 stron.

$$\begin{array}{r} 45 \\ \cdot 10 \\ \hline 450 \end{array}$$

Odpowiedź: Ania w ciągu 45 minut czyta 40 stron.

Rzadziej: 12,0% mnożyli albo dzielili inne liczby podane w treści zadania:

Ania w ciągu 10 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu 45 minut?

$$10 \cdot 10 = 100$$

Odpowiedź: Ania w ciągu 45 minut przeczytała 100 stron.

$$45 \cdot 10 = 450$$
$$450 \cdot 10 = 4500$$

Odpowiedź: W ciągu 45 minut Ania przeczyta 4500 stron.

$$45 : 10 = 4,5$$

Odpowiedź: W ciągu 45 minut przeczyta 4,5 razy więcej stron.

Mniej więcej tak samo liczna grupa trzecioklasistów: 12,2% liczby z treści zadania dodawała i odejmowała:

Ania w ciągu 10 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu 45 minut?

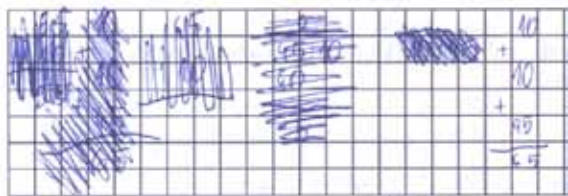
$$45 \cdot 10 = 35$$

Odpowiedź: W 45 minut przeczyta 35 stron książki.

Ania w ciągu 10 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu 45 minut?

$$10 + 10 = 20 \text{ min}$$

Odpowiedź: Ania przeczyta 20 stron w ciągu 45 minut.



Odpowiedź: Ania w ciągu 45 min przeczyta 30 stron.

$$10 + 10 + 10 = 30$$

Odpowiedź: W ciągu 45 minut przeczyta 30 stron książki.

$$\begin{array}{r} 45 \\ - 10 \\ \hline 35 \end{array}$$

Odpowiedź: W ciągu 45 min przeczyta 35 stron.

W zadaniu G większość uczniów: 50,1% odejmowała liczby z treści:

6. Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

$$16 - 9 = 7$$

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 7 kg.

$$16 \text{ kg} - 9 \text{ kg} = 7 \text{ kg}$$

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 7 kg.

$$\begin{aligned} 3 + x &= 16 \\ 16 - x &= 3 \\ 16 - 3 &= 7 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Sama beczka waży 7 kg.

Jest to, najpewniej, efekt zastosowania strategii, o której pisałem już w poprzednim paragrafie – dobierania działania do liczb i słów-kluczy wyszukanych w treści zadania:

$$16, \text{ sprzedano } 9, \text{ zatem } 16 - 9 = 7.$$

Warto przyjrzeć się pierwszemu z powyższych rozwiązań – uczeń najprawdopodobniej podkreślił te elementy treści, które są, jego zdaniem, kluczowe dla rozwiązania, czyli obie liczby i pytanie. Dzięki temu wie, jakie liczby ma do dyspozycji i jaką odpowiedź ma napisać. Co wcale nie oznacza, jak widać, że wie, o jakim związku pomiędzy danymi mowa w zadaniu.

W zadaniu H zdecydowana większość trzecioklasistów: 63,4% mnożyła liczby podane w zadaniu – ich „wygląd” rzeczywiście do tego zachęca:

Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?

$10 \cdot 13 = 130$

Odpowiedź: Ta droga ma 130 m.

$10 \cdot 13 = 130 \text{ m}$

Odpowiedź: Długość drogi wynosi 130 m.

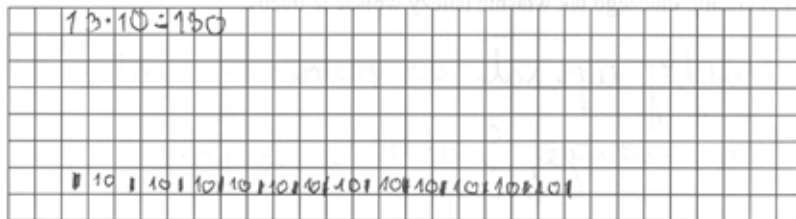
$13 \cdot 10 = (10+3) \cdot 10 = 10 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = 100 + 30 = 130$

Odpowiedź: Droga wynosi razem 130 m.

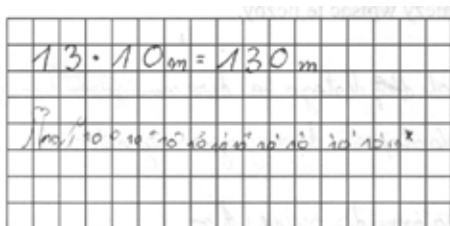
I kolejny przykład zachowania opisanego już wcześniej: zaznaczenie w tekście obu liczb i pytania. Takie „przygotowanie” do rozwiązania zadania jest wśród uczniów bardzo popularne.

W podaniu złej odpowiedzi niekiedy nie przeszkadzał nawet dobry rysunek:

Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaka długość ma ta droga?

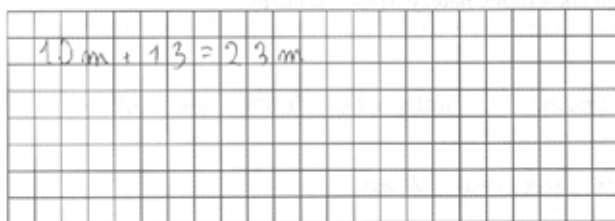


Odpowiedź: Ta droga ma długość 130 m.



Odpowiedź: Ta droga ma 130 m.

Rzadziej: 16,1% liczby z zadania były dodawane albo odejmowane:



Odpowiedź: Ta droga ma 23 metry długości.



Odpowiedź: Droga ma długość 3 m.

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 10 \\ \hline 23 \end{array}$$

Odpowiedź: Ta droga ma 23 cm długości.....

Przy okazji widać sporą „niefrasobliwość” uczniów w operowaniu mianami.

Część trzecioklasistów, jak zawsze, proponowała bardziej skomplikowane obliczenia, np. w słowie *pierwsze* doszukując się dodatkowej liczby do wykorzystania:

Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?

$$13 \cdot 10 + 1 = 10 = 140$$

$$130 + 1 + 10 = 141$$

Odpowiedź: Długość tej drogi wynosi ¹⁴¹ 24 metrów.....

$$13 + 10 + 1 = 24$$

Odpowiedź: Ta droga ma długość 24.....

Bardzo podobne błędy (strategie) i o zbliżonym nasileniu pojawiły się także w zadaniu I.

Tym razem uczniowie przede wszystkim: 56,3% dzielili podane cyframi liczby:

Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka.
Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu.
Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?

$130 : 10 = 13$



Odpowiedź: Posadzono 13 drzewek.

$130 \text{ m} : 10 \text{ m} = 13$



Odpowiedź: Posadzono 13 drzewek.

~~Posadzono 13 drzewek~~ ~~$130 : 10 = 13$~~ $130 : 10 = 13$



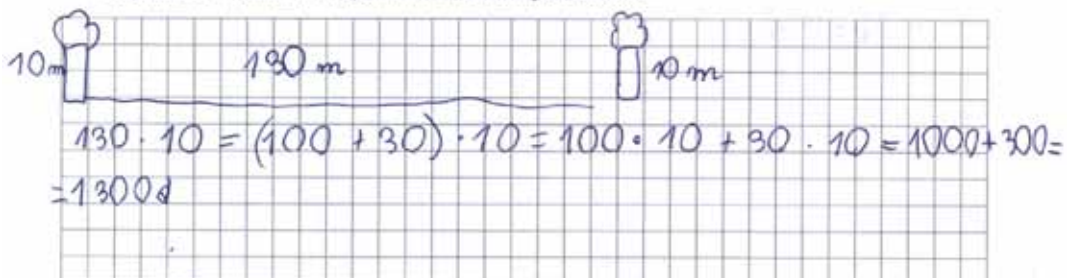
Odpowiedź: Posadzono 13 drzewek.

Rzadziej: 16,6 je mnożyli, dodawali albo odejmowali:

Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka.

Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu.

Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?



Odpowiedź: Posadzono 1300 drzewek.



Odpowiedź: posadzono 1300 drzewek i to posadzono.



Odpowiedź: Posadzono 130 drzewek.

Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?

$$\begin{array}{r} 130 \\ + 10 \\ \hline 140 \end{array}$$

Odpowiedź: Posadzono 140 drzewek.

$$130 \text{ m} - 10 \text{ m} = 120 \text{ m}$$

Odpowiedź: Posadzono 120 drzewek.

$$10 + 130 = 140$$

Odpowiedź: Posadzono 140 drzewek.

Tym razem tylko w zadaniu **G** (beczka) zawarte było słowo-klucz *sprzedano*, które pozwoliło części uczniów zidentyfikować „potrzebne” działanie. W przypadku pozostałych analizowanych w tym paragrafie zadań takich słów nie było, trzeba więc było poszukać innej strategii.

W takiej sytuacji część dzieci skupia swoją uwagę na dwóch zasadniczych elementach treści zadania: podanych w niej liczbach oraz pytaniu. Niektórzy, dla skupienia uwagi, zaznaczają je, np. podkreślając czy biorąc w kółka.

Kolejny krok strategii to dopasowanie do liczb działania – tu, prawdopodobnie, brana jest pod uwagę specyfika liczb, np. jeśli jedną z nich jest 10, to w rachubę wchodzi przede wszystkim mnożenie, ewentualnie dzielenie. I znów muszę powtórzyć, że z badań wynika, że taka strategia postępowania jest wśród trzecioklasistów bardzo popularna.

A gdy liczb jest więcej?

W treści każdego zadania tekstowego kryje się pewien związek o charakterze funkcyjnym – jego znalezienie i zbadanie daje gwarancję rozwiązania – najczęściej szybkiego i efekownego³⁰. Dane w tych czterech zadaniach³¹ powiązane są pewnymi prostymi proporcjami:

- J** Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg. Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?
- K** Cztery takie same maskotki kosztują 36 zł. Ile będzie kosztowało 12 takich maskotek?
- L** Za 4 pluszowe misie i 6 lalek zapłacono 110 złotych. Lalka kosztuje tyle samo co miś. Ile zapłacono by za 5 lalek?
- M** Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?

Każde z tych zadań, podobnie jak wszystkie „nietypowe” zadania prezentowane wcześniej, można rozwiązać za pomocą kilku prostych operacji arytmetycznych. Można także – i to jeszcze szybciej prowadzi do sukcesu – zauważyć i wykorzystać związki pomiędzy danymi podanymi w treści. I tak:

w zadaniu **J**: jeśli cztery krasnale ważą 10 kg, to sześć krasnali – o połowę więcej;
w zadaniu **K**: jeśli cztery maskotki kosztują 36 zł, to dwanaście maskotek – trzy razy więcej;

w zadaniu **L**: jeśli dziesięć zabawek kosztuje 110 zł, to pięć – dwa razy mniej;

w zadaniu **M**: za dwa razy mniej zabawek, zapłacono by dwa razy mniej.

Zadania tego typu sporadycznie występują w procesie kształcenia w klasach 1-3, a może i w całej szkole podstawowej – można więc uznać, że tworzą one dobre warunki do zaprezentowania przez trzecioklasistów swojej wiedzy w nowej, nietypowej sytuacji, że dają szansę na **ujawnienie ich rzeczywistych strategii pokonywania trudności w obszarze rozwiązywania zadań tekstowych.**

³⁰ Por. np. Polya G. (1993).

³¹ Zadania wykorzystano w badaniach w 2010 roku, por. Dąbrowski M. (2011c).

Zadania tworzą, ze względu na postać podawanych w nich danych, dwie pary – w zadaniach **J** i **K** w treści podane są cyframi dwie liczby, natomiast w **L** i **M** odpowiednio cztery i pięć. Czy to może mieć jakieś znaczenie dla rozwiązujących je trzecioklasistów?

Zobaczmy, jak uczniowie sobie z nimi poradzili:

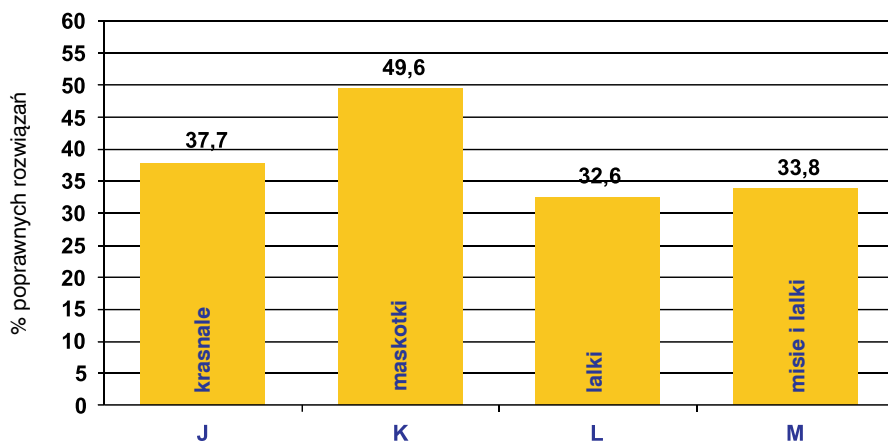


Diagram 9. Zadania nietypowe dotyczące proporcjonalności – procent poprawnych rozwiązań.

Najłatwiejsze okazało się zadanie **K** – poradziło sobie z nim 49,6% badanych, czyli prawie połowa. Może to być efekt jego „zakupowego” kontekstu, który zachęca do obliczenia „ceny jednostkowej”. Zadanie **J**, czyli drugie z zadań o niewielkiej liczbie podanych danych, rozwiązało poprawnie 37,7% trzecioklasistów. Wyniki obu pozostałych zadań są nieco niższe i bardzo do siebie zbliżone – 33,8% dla **M** oraz 32,6% dla **L**.

Popatrzmy, jak najczęściej wyglądały ich poprawne rozwiązania.

W zadaniu **J** najwięcej dzieci: 32,7% odniosło sukces dzięki policzeniu wagi jednego krasnala³²:

³² Błędy rachunkowe nie miały wpływu na ocenę poprawności zadania, decydował jedynie tok rozumowania.

Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg.
Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?

$$\begin{array}{l}
 10 \text{ kg} : 4 = 2,5 \\
 2,5 \text{ kg} \cdot 4 = 10 \text{ kg} \\
 2,5 \text{ kg} \cdot 6 = 15 \text{ kg}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 10 \text{ kg} : 4 = 2,5 \\
 2,5 \text{ kg} \cdot 2 = 5 \text{ kg} \\
 5 \text{ kg} \cdot 3 = 15 \text{ kg}
 \end{array}$$

Odpowiedź: sześć takich krasnali ważyłoby 15 kg.

Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg.
Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?

$$\begin{array}{l}
 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} + 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} + 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} + 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} = 10 \text{ kg} \\
 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} + 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} + 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} + 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} + \\
 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} + 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} = 15 \text{ kg}
 \end{array}$$

Odpowiedź: sześć takich krasnali waży 15 kg.

$$\begin{array}{l}
 \text{○○○○} = 10 \text{ kg} \quad \text{○} = 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} \\
 \text{○○○○○○} \cdot 2 \text{ kg } 50 \text{ dag} = 14 \text{ kg}
 \end{array}$$

Sześć takich krasnali waży łącznie 14 kg

Warto zwrócić uwagę na przypuszczalny faktyczny sens początkowego zapisu w pierwszym rozwiązaniu. Prawdopodobnie uczeń zanotował sobie w ten sposób, że 8 podzieli się przez 4, ale z 10 zostaje jeszcze 2. W ostatnim rozwiązaniu jego autor wykorzystał uproszczony rysunek w roli niewiadomej.

Bardzo rzadko: 2,5% trzecioklasiści odwołali się do proporcji, posługując się wagą dwóch krasnali:

$$10 + 5 \text{ kg} = 15 \text{ kg}$$

Odpowiedź: Maxylny by 15 kg ważył 4 wazary, 10 kg to 2 wazary 5 kg.

$$10 \text{ kg} : 2 = 5 \text{ kg}$$

$$10 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 15 \text{ kg}$$

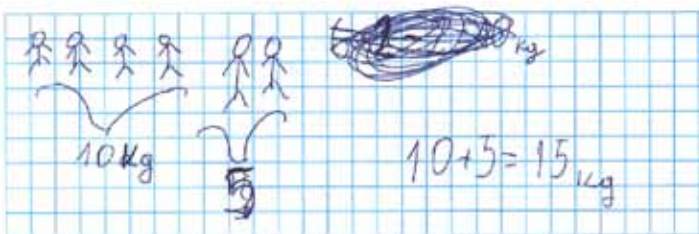
Odpowiedź: 6 takich krasnali ważyły by 15 kg

Sporadycznie uczniowie pomagali sobie rysunkiem:

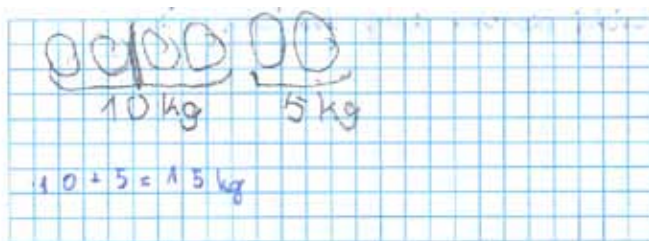
Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg.
 Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?



Odpowiedź: Krasnale waży 12 kg



Odpowiedź: 6 takich krasnali ważyły 15 kg

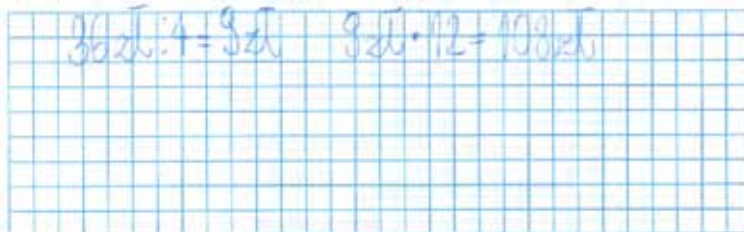


Odpowiedź: ~~6~~ takich krasnali łącznie ważyły 15 kg.

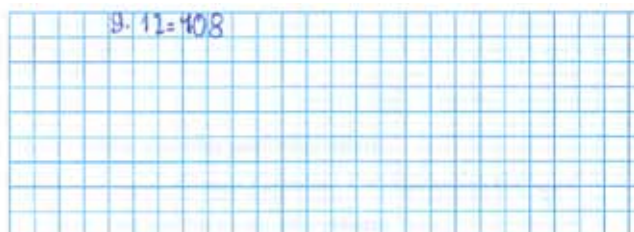
Warto porównać rysunki sporządzone przez dzieci. W pierwszym rozwiązaniu są one bardzo konkretne, zawierają dużą liczbę szczegółów. W drugim są już nieco uproszczone i bardziej schematyczne. Owale z ostatniego rozwiązania nie mają wizualnie z krasnalami nic wspólnego, są bowiem ich modelem, liczy się ich liczba i usytuowanie oraz to, że uruchamiają myślenie we właściwym kierunku.

W zadaniu K, wśród dobrych rozwiązań, zgodnie z oczekiwaniami, dominowało: 34,3% obliczenie ceny jednej maskotki:

Cztery takie same maskotki kosztują 36 zł. Ile będzie kosztowało 12 takich maskotek?



Odpowiedź: 12 takich maskotek będzie kosztowało 108 zł.



Odpowiedź: 12 takich maskotek będzie kosztowało 108 zł.

$$\text{Obliczenia: } 36 \text{ zł} : 4 = 9 \text{ zł} \quad 12 \cdot 9 \text{ zł} = 108 \text{ zł}$$

Odpowiedź: 12 takich maskotek będzie kosztowało 108 zł.

Znacznie więcej uczniów niż w poprzednim zadaniu, bo 13,7% sięgnęło tym razem po proporcję. Była ona strukturalnie prostsza i osadzona w bardziej naturalnym dla dzieci kontekście – ceny nie masy:

Cztery takie same maskotki kosztują 36 zł. Ile będzie kosztowało 12 takich maskotek?

$$12 : 4 = 3 \quad 3 \cdot 36 \text{ zł} = 108 \text{ zł}$$

Odpowiedź: 12 maskotek kosztuje 108 zł.

	3
4	36
• 3	• 3
12	108

Odpowiedź: 12 takich maskotek będzie kosztowało 108 zł.

$$36 \text{ zł} : 3 = 108 \text{ zł}$$

Odpowiedź: ~~36 zł~~ Dwa maświce maskotek kosztuje 108 zł.

Także w przypadku zadania L najbardziej skutecznym i popularnym: 28,4% sposobem rozwiązania okazało się policzenie ceny jednej lalki:

Za 4 pluszowe misie i 6 lalek zapłacono 110 złotych. Lalka kosztuje tyle samo co miś.
Ile zapłacono by za 5 lalek?

$$\begin{aligned} 110 \text{ zł} : 10 &= 11 \text{ zł} \\ 11 \cdot 5 &= 55 \text{ zł} \end{aligned}$$

Odpowiedź: Za pięć lalek zapłacono by 55 zł.

$$\begin{aligned} 4 + 6 &= 10 \\ 110 : 10 &= 11 \\ 11 \cdot 5 &= 55 \end{aligned}$$

Odpowiedź: zapłacono by 55 zł.

Za 4 pluszowe misie i 6 lalek zapłacono 110 złotych. Lalka kosztuje tyle samo co miś.
Ile zapłacono by za 5 lalek?

$$\begin{aligned} 110 \text{ zł} : 10 &= 11 \text{ zł} \\ 11 \cdot 5 &= 55 \text{ zł} \end{aligned}$$

Odpowiedź: Za pięć lalek zapłacono by 55 zł.

$$\begin{aligned} \cancel{110 \text{ zł} : (4 + 6)} & \cdot \cancel{110} & 11 + 11 + 11 + 11 &= 44 \\ + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 &= 55 & 66 + 44 &= 110 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Za 5 lalek zapłacono by 55 zł.

$$\begin{aligned}
 & \text{5 zabawek} + 5 \cdot 5 \text{ zł} = 10 \\
 & 110 \text{ zł} - 10 = 11 \\
 & 11 \cdot 5 = 55 \text{ zł}
 \end{aligned}$$

$$5 \cdot 11 = 55$$

Odpowiedź: Za 5 lalek zapłacono 55 zł.

Odpowiedź: Za 5 lalek zapłacono by 55 zł.

W tym zadaniu tylko 0,8% dzieci, czyli kilkoro, sięgnęło w swoim rozwiązaniu po proporcje.

W treści ostatniego z analizowanych zadań: **M** nie ma danych umożliwiających obliczenie ceny jednej zabawki, zatem uczniowie musieli radzić sobie inaczej. Bardzo wielu z nich – w porównaniu z poprzednimi zadaniami – bo aż 22,8% zauważyło związki pomiędzy informacjami podanymi w treści:

Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?

$$120 \text{ zł} + 2 = 60 \text{ zł}$$


Odpowiedź: Zapłacono by 60 zł.

$$120 \text{ zł} : 2 = 60 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Za dwa misie i pięć lalek zapłacono 60 zł.

$$120 - 60 = 60$$

Odpowiedź: Zapłacono by półowa z tego co zapłacono za 4 misie i 10 lalek.

Ten uczeń był szczególnie „precyzyjny” w swoich obliczeniach:

Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?

$$\begin{array}{l} m \\ z \\ 120 \text{ zł} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 10 - 5 = 5 \\ 4 - 2 = 2 \\ 5 + 2 = 7 \\ 14 : 7 = 2 \\ \frac{60}{120 : 2} \\ - 10 \\ \hline = 60 \end{array} \right.$$

Odpowiedź: Zapłacono by 60 zł.

Część uczniów: 5,9% samodzielnie ustaliła, jaka mogła być cena lalek a jaka misiów i wykorzystała te dane do znalezienia odpowiedzi:

Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?

$$\begin{array}{l} 10 \text{ lalek} - 10 \text{ zł} \\ 4 \text{ misie} - 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \cdot 5 + 5 \cdot 10 = 10 + 50 = \\ = 60 \end{array}$$

Odpowiedź: Za 2 misie i 5 lalek zapłacono 60 zł

$$\begin{array}{l} 120 : 14 = 8 \\ 4 \cdot 15 = 60 \\ 15 \cdot 2 = 30 \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 \cdot 7 = 56 \\ 120 - 60 = 60 \\ 5 \cdot 6 = 30 \end{array} \quad \begin{array}{l} 60 : 10 = 6 \\ 30 + 30 = 60 \end{array}$$

Odpowiedź: Za 2 misie i 5 lalek zapłacono 60 zł.

$$\begin{array}{l} \frac{120}{20} = 6 \\ \frac{100}{20} = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{100}{20} = 5 \\ \frac{200}{20} = 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} 10 + 50 = 60 \end{array}$$

Odpowiedź: Za misia i za lalek zapłacono 60 zł

Widać, że te rozwiązania nie przyszły ich autorom łatwo. Ale też z takim zadaniem pewnie nigdy wcześniej się nie spotkali. Warto zwrócić uwagę na początkowe obliczenia z ostatniego rozwiązania. Można przypuszczać, że uczeń próbował w ten sposób oszacować wielkość odpowiedzi.

Pora na błędne rozwiązania.

W zadaniu **J** trzecioklasiści najchętniej: 27,7% mnożyli obie liczby podane w treści cyframi:

Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg.
Ile ważyłyby łącznie 6 takich krasnali?

$$6 \cdot 10 \text{ kg} = 60 \text{ kg}$$

Odpowiedź: Szesć takich krasnali ważyłyby 60 kg

$$6 \cdot 10 = 60$$

Odpowiedź: 60 takich krasnali.

$$\begin{array}{r} 10 \text{ kg} \\ \cdot 6 \\ \hline 60 \text{ kg} \end{array}$$

Odpowiedź: 60. Łącznie 6 krasnalów ważyłyby 60 kg.

Rzadziej, choć w zauważalny sposób, uczniowie mnożyli inne liczby podane w treści zadania (4,8%), albo je dodawali (4,5%):

Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg. Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?

$$6 \cdot 4 = 24 \text{ kg}$$

Odpowiedź: 24 kg, czyli więcej krasnala

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 6 \\ \hline 16 \end{array}$$

Odpowiedź: 6 te 6 krasnale ^{ważą} 16 kg.

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 6 \\ \hline 16 \end{array}$$

Odpowiedź: 6 te 6 krasnale ^{ważą} 16 kg.

Łącznie, 37,0% dzieci wykonywało jakąś jedną prostą operację na dwóch liczbach wybranych z treści.

Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg. Ile by ważyło łącznie 6 takich krasnali?

Także to zadanie w wersji zamkniętej zostało wykorzystane w badaniu OBUT 2012³³.

- A. 60 kg
- B. 15 kg
- C. 40 kg
- D. 16 kg

Poradziło sobie z nim w tym badaniu 42,7% trzecioklasistów. Ponad 1/3 uczniów: 37,1% wybrało odpowiedź A, czyli iloczyn liczb 6 i 10, a 13,9% ich sumę, czyli D. Najmniej „popularna” była odpowiedź C – wskazało ją 5,7% dzieci.

³³ Por. Dąbrowski M., Wiatrak E. 2012a, s. 24-33.

Także wśród błędnych rozwiązań zadania **K** dominowało: 32,8% wykonywanie prostych obliczeń na obu liczbach podanych w treści cyframi:

Cztery takie same maskotki kosztują 36 zł. Ile będzie kosztowało 12 takich maskotek?

$36 : 12 = 3$

Odpowiedź: 12 takich ^{parnych} maskotek będzie kosztowało 3 zł.

$$\begin{array}{r} 36 \\ - 12 \\ \hline 54 \end{array}$$

Odpowiedź: 12 takich maskotek będzie kosztować 342 zł.

$36 + 12 = 48$

Odpowiedź: 12 takich maskotek będzie kosztować 48 zł.

~~36 - 4 =~~
 $36 - 12 = 24$

Odpowiedź: Dwanaście takich maskotek będzie kosztować 24 zł.

Tego typu próby były podejmowane także w zadaniu L, w którym liczby z treści przede wszystkim dzielono, ale tym razem takich rozwiązań było znacznie mniej, bo jedynie 13,1%:

Za 4 pluszowe misie i 6 lalek zapłacono 110 złotych. Lalka kosztuje tyle samo co mis. Ile zapłacono by za 5 lalek?

$$\begin{array}{r} 22 \\ \hline 110 : 5 \\ - 10 \\ \hline 10 \\ - 10 \\ \hline 0 \end{array}$$

Odpowiedź: Zapłacono by 22 złotek

$$110 : 6 = 60$$

Odpowiedź: 5 lalek kosztuje 60 zł

$$110 : 5 = 22$$

Odpowiedź: Zapłacono by 22 zł

Ten uczeń konsekwentnie szukał „dobrego” dzielenia:

Za 4 pluszowe misie i 6 lalek zapłacono 110 złotych. Lalka kosztuje tyle samo co miś.
Ile zapłacono by za 5 lalek?

~~$110 : 6 = 18 \text{ r } 2$~~
 $110 : 6 = 18 \text{ r } 2$
 $110 : 4 = 27 \text{ r } 2$
 $110 : 5 = 22$

Odpowiedź: Za 5 lalek zapłacono 22 zł

Wzrosła za to zdecydowanie: do około 30%³⁴ liczba takich rozwiązań, w których uczniowie starali się wykonać na liczbach z treści zadania nie jedną, a kilka operacji:

Za 4 pluszowe misie i 6 lalek zapłacono 110 złotych. Lalka kosztuje tyle samo co miś.
Ile zapłacono by za 5 lalek?

$4 \cdot 6 + 110 = 134$
 $134 + 5 = 139$

Odpowiedź: Za 5 lalek zapłacono by 139 zł.

$4 + 6 = 10$
 $10 + 110 = 120$

Odpowiedź: Zapłacono 120 zł.

³⁴ W kluczu kodowania rozwiązań nie przewidziano takiej pozycji, stąd dane szacunkowe.

$$110 : 5 = 22$$

$$110 - 22 = 88$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 5 \\ \hline 110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ + 10 \\ \hline 90 \\ + 10 \\ \hline 100 \end{array}$$

Ka 5 lalek zapłacono by 22 zł

$$\begin{array}{r} 4 \\ 6 \\ + 5 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ + 15 \\ \hline 125 \end{array}$$

Odpowiedź: Za pięć lalek zapłacono by 125 złotych.

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 24 \\ \hline 440 \\ 2200 \\ \hline 2640 \end{array}$$

Odpowiedź: Za 24 lalek zapłacono by 2640 zł.

Podoba sytuacja wystąpiła w zadaniu **M**, w którym jedną czy dwie operacje – najczęściej dodawanie albo odejmowanie – na liczbach z treści zadania, wykonało jedynie 7,5% trzecioklasistów:

Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?

$$120 \text{ zł} - 2 \cdot 5 = 110 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Zapłacono by 110 zł.

$$4zł + 5zł = 9zł$$

Odpowiedź: Za dwa misie i pięć lalek zapłacono 9 zł.

$$4 \cdot 10 = 40zł$$

Za 2 misie i 5 lalek zapłacono by 40 zł

Natomiast ponownie około 30% uczniów wykonało znacznie bardziej skomplikowane i bogatsze próby:

Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?

$$4 + 10 = 14 + 120zł = 134$$

$$2 + 5 = 7$$

Odpowiedź: Za 2 misie i 5 lalek zapłacono 7 zł.

$$4 \text{ misie} + 10 \text{ lalek} + 2 \cdot 5 = 14 + 10 = 24zł$$

Odpowiedź: Zapłacono by 24 zł.

$$120 - 20 - 50 = 50 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Za 2 misie i 5 lalek zapłacono 50 zł.

Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?

$\begin{array}{r} 10 \\ \cdot 4 \\ \hline 40 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \\ 2 \\ \hline 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \\ + 17 \\ \hline 27 \end{array}$
40 zł	$+ 5$	37 zł

Odpowiedź: Za 2 misie i 5 lalek zapłacono 37 zł.

$$4 + 10 = 14 \quad 2 + 5 = 7 \quad 14 + 7 = 21 \text{ zł}$$

Odpowiedź: ~~20 zł~~ zapłacono 21 zł.

$$4 + 10 + 2 + 5 = 21 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 21 zł.

Zadania **J** i **K** są podobne „wizualnie” do zadań z poprzedniego paragrafu – w treści widać dwie liczby, bo zapisane są one cyframi. **Także i kategorie pojawiających się błędów są bardzo podobne – znaczna część uczniów wykonuje proste operacje na tych liczbach, starając się dopasować typ operacji do ich postaci.**

W zadaniach **L** i **M** sytuacja już jest nieco inna – w treści zawartych jest więcej liczb. Zmienia się także sposób postępowania znacznej części uczniów – szukają oni bardziej rozbudowanych rachunków, starając się wykorzystać w nich przynajmniej część z tych liczb.

Należy sądzić, że jest to kolejna, bardziej rozbudowana, wersja tej samej obronnej strategii tworzonej przez dzieci:

jeśli w treści zadania są dwie liczby, to potrzebne jest jedno pasujące działanie;

jeśli liczb jest więcej, to i działań powinno być więcej.

W przypadku zadań złożonych szansa na to, że dobrane w ten sposób działania „ułożą” się w dobre rozwiązanie jest znikoma, nie zniechęca to jednak, jak widać, uczniów do jej stosowania.

Podsumowanie

Zadania o nietypowej strukturze pokazują całe bogactwo strategii stosowanych przez trzecioklasistów. Powtórzę najważniejsze z poczynionych przy okazji omawiania konkretnych zadań spostrzeżeń.

- Dla znacznej części trzecioklasistów rozwiązanie zadania tekstowego obejmuje dwie czynności: zapisanie jakiegoś obliczenia oraz podanie odpowiedzi na pytanie postawione w treści zadania. Wiele wskazuje na to, że dla niektórych z nich te dwie rzeczy: obliczenie i odpowiedź wcale nie muszą się z sobą w czytelny sposób wiązać.
- Naturalną konsekwencją takiego rozumienia procesu rozwiązania zadania jest czynność sprawdzania poprawności obliczeń rozumiana, prawdopodobnie, jako sprawdzenie poprawności rozwiązania zadania. Uczniowie wykonują w tym celu obliczenie w inny sposób, np. pisemnie, albo sięgają po działania odwrotne.
- Część uczniów czytając zadania nie próbuje zrozumieć istoty zależności pomiędzy informacjami w nich podanymi, lecz skupia się na liczbach zawartych w treści, zwłaszcza tych zapisanych cyframi, oraz słowach-kluczach, które pomagają im dobrać działanie – *jeśli sprzedano czy odleciały, to na pewno trzeba odjąć*. Im struktura zadania mniej typowa, tym więcej tego typu prób. Wydaje

się, że ta strategia postępowania może być jeszcze bardziej powszechna niż to wynika z przytoczonych wcześniej danych procentowych.

- W przypadku niektórych analizowanych zadań takich słów-kluczy nie było, trzeba więc było sięgnąć po inną strategię postępowania. W takiej sytuacji część dzieci skupia swoją uwagę na dwóch zasadniczych elementach treści zadania: podanych w niej liczbach oraz pytaniu. Niektórzy, dla skupienia uwagi, zaznaczają je, np. podkreślając czy biorąc w kółka. Kolejny krok strategii to dopasowanie do liczb działania – tu, najprawdopodobniej, brana jest pod uwagę specyfika liczb, np. jeśli jedną z nich jest 10, to w rachubę wchodzi przede wszystkim mnożenie, ewentualnie dzielenie. I znów muszę powtórzyć, że z badań wynika, że taka strategia postępowania jest wśród trzecioklasistów bardzo popularna.
- Jeśli w zadaniu „widać” więcej niż dwie liczby, sposób postępowania części uczniów się zmienia. Zaczynają oni szukać bardziej rozbudowanych rachunków, starając się wykorzystać w nich wszystkie liczby podane w treści zadania, albo przynajmniej znaczną część z nich. Należy sądzić, że jest to kolejna, bardziej rozbudowana, wersja strategii opisanej powyżej.

W efekcie powstaje spójny zestaw dopełniających się strategii. I tylko ze sztuką rozwiązywania zadań tekstowych ma to wszystko niewiele wspólnego.

I.2. ARYTMETYKA SZKOLNA – LICZBY, OBLICZENIA ... I JĘZYK SYMBOLICZNY

Polskie nauczanie początkowe matematyki tradycyjnie zdominowane jest przez „rachunki”. Kolejne uzupełniane „słupki” to podstawowe wspomnienie każdego Polaka z okresu początków edukacji szkolnej. Do naszego języka potocznego weszły zwroty, które – w oderwaniu od doświadczeń szkolnych – nie mają żadnego racjonalnego sensu:

- rachunki – jako wykonywanie obliczeń, a nie płatności do zrealizowania,
- słupki – nie w ogrodzeniu, ale do policzenia,
- tabliczka mnożenia – zdecydowanie mniej smaczna niż tabliczka czekolady,
- obliczenia pod kreską – które akurat czasami dzieją się nad kreską.

Ilustrują one rangę, jaką tradycyjnie od lat w naszej edukacji ma ten obszar szkolnej matematyki³⁵.

³⁵ Arytmetyka to część matematyki zajmująca się badaniem własności liczb, a nie wykonywaniem obliczeń, stąd używany przeze mnie dodatek *szkolna*.

W naszej szkole gdzieś w cieniu słupków pozostaje kluczowy – także właśnie dla uprawiania samych rachunków – obszar posługiwania się ze zrozumieniem systemem dziesiętnym i notacją dziesiętną, która jest również w naszym codziennym życiu absolutnie podstawowym narzędziem.

Zrozumienie struktury systemu dziesiętnego jest niezbędne dla świadomego operowania liczbami i to nie tylko tymi wielocyfrowymi, ale także tymi mniejszymi, począwszy od liczb dwucyfrowych. Wszelkie porównywania liczb i wielkości czy wykonywanie obliczeń: pamięciowo, pisemnie czy nawet z pomocą kalkulatora, bazują na rozumieniu wykorzystywanej notacji, a ta jest dziesiętna właśnie, ze wszystkimi tego konsekwencjami.

W badaniach umiejętności trzecioklasistów sporo uwagi poświęcono także tak rozumianej arytmetyce. Przyjrzymy się bliżej tylko kilku z badanych obszarów umiejętności dzieci:

- stosowaniu algorytmów obliczeń pisemnych,
- stosowaniu przez dzieci własnych strategii liczenia i rozumieniu wykonywanych działań,
- wykonywaniu obliczeń złożonych,
- porównywaniu liczb dwucyfrowych, w kontekście rozumienia systemu dziesiętnego.

Dwa z tych zagadnień: algorytmy obliczeń pisemnych oraz obliczenia złożone kilka lat temu³⁶ zniknęły z podstawy programowej kształcenia ogólnego dla I etapu kształcenia, ale ciągle są obecne zarówno w materiałach edukacyjnych, jak i – jak pokazują także np. obserwacje – w codziennej praktyce.

Stosowanie algorytmów obliczeń pisemnych

Algorytmy działań pisemnych to bardzo „stabilny” obszar tematyczny szkolnej matematyki. Od lat jest to jedno z ważnych matematycznych zagadnień polskiego nauczania początkowego, a także klas następnych – pod tym względem przez ostatnie pięćdziesiąt lat w polskiej szkole nie zmieniło się prawie nic.

Zaawansowanie trzecioklasistów w stosowaniu algorytmów działań pisemnych badane było najdokładniej w roku 2006³⁷. Każdy uczeń miał wówczas okazję do zademonstrowania swojej znajomości każdego z czterech algorytmów³⁸ na trzech

³⁶ W wyniku nowelizacji podstawy programowej z dnia 23 sierpnia 2007 roku.

³⁷ Por. Dąbrowski M., Żytko M. (2007b), Dąbrowski M (2008).

³⁸ W tym okresie w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla I etapu edukacji znajdowały się algorytmy pisemnego dodawania, odejmowania i mnożenia, natomiast algorytm pisemnego dzielenia już od kilku lat był przeniesiony na II etap.

przykładach o rosnącym stopniu komplikacji, zatem wykonywał podczas badań aż 12 pisemnych obliczeń:

A	B	C
$\begin{array}{r} 1548 \\ + 216 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 335 \\ + 468 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 4675 \\ + 948 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 576 \\ - 439 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 655 \\ - 478 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1306 \\ - 428 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 227 \\ \cdot \quad 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 46 \\ \cdot \quad 9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 839 \\ \cdot \quad 8 \\ \hline \end{array}$
$\overline{336} : 6$	$\overline{3318} : 7$	$\overline{1228} : 4$

Przykłady dla dodawania i odejmowania zostały dobrane w pełni analogiczny sposób. W dodawaniu w działaniu **A** znajduje się tylko jedno „przekraczanie” progu, w **B** – dwa, a w **C** – trzy „przekroczenia” obok siebie. I tak samo w odejmowaniu: jedno „rozmienianie”, dwa „rozmieniania” obok siebie i trzy „rozmieniania”, dodatkowo z zerem w odjemnej.

O trudności działań mnożenia decydowała przede wszystkim wielkość występujących w nich liczb. W przypadku dzielenia, dwa pierwsze przykłady wymagają zastosowania algorytmu w najbardziej typowej postaci. Przykład **C** jest nieco trudniejszy, bo pojawia się w nim zero w ilorazie.

Diagram 1. prezentuje wyniki dla dodawania i mnożenia, a diagram 2. dla odejmowania i dzielenia:

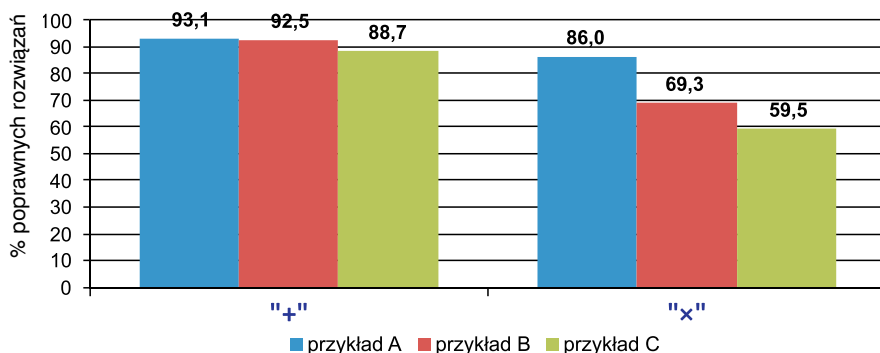


Diagram 1. Stosowanie algorytmów pisemnego dodawania i mnożenia – procent poprawnych obliczeń.

Jak widać, nasi trzecioklasiści okazali się w 2006 roku mistrzami pisemnego dodawania – dla każdego przykładu poziom wykonania wynosi około 90%³⁹. Aż 74,7% uczniów wykonało poprawnie wszystkie trzy dodawania, a tylko 1,2% nie poradziło sobie z żadnym (por. diagram 3.).

Kolejne przykłady mnożenia zrobiło dobrze 86,0%, 69,3% i 59,5% uczniów. Mnożenie sprawiło uczniom nieco więcej trudności, choć i tu trzecioklasiści uzyskali niezłe wyniki: 42,1% uczniów poradziło sobie ze wszystkimi trzema przykładami, a 8,3% nie wykonało poprawnie żadnego z nich.

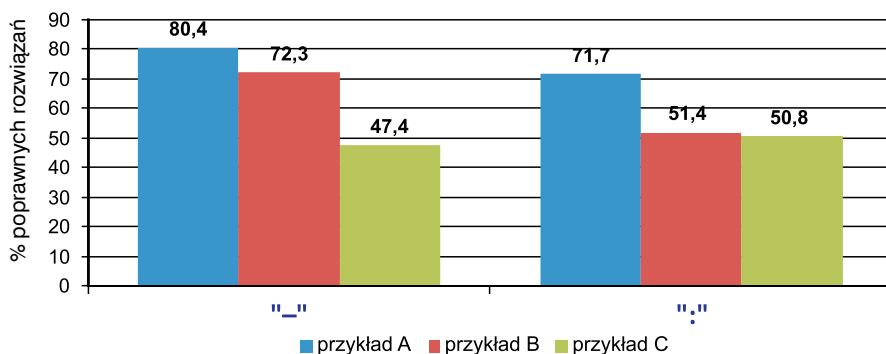


Diagram 2. Stosowanie algorytmów pisemnego odejmowania i dzielenia – procent poprawnych obliczeń.

Kolejne przykłady odejmowania zrobiło poprawnie 80,4%, 72,3% i 47,4% uczniów. Mniej więcej 1/3 trzecioklasistów: 35,6% poradziło sobie z trzema „słupkami”, a 11,3% nie zrobiło żadnego.

Stosunkowo najslabiej wypadło dzielenie – odpowiednio 71,7%, 51,4% oraz 50,8% poprawnych obliczeń dla kolejnych przykładów oraz 32,8% uczniów, którzy wykonali dobrze wszystkie trzy działania i aż 22,4% (czyli ponad 1/5) takich, którzy nie poradzi sobie z żadnym.

³⁹ W roku 2008 w badaniach wykorzystano jeszcze trudniejszy, teoretycznie, przykład: $6875 + 3167$ – poradziło sobie z nim aż 88,0% uczniów, por. Dąbrowski M. (2009b).

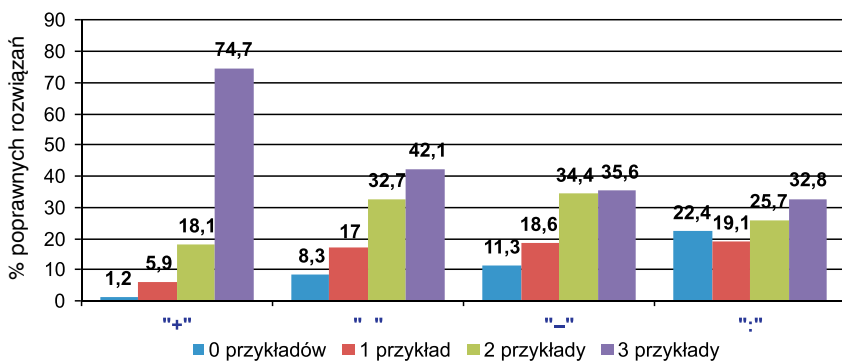


Diagram 3. Stosowanie algorytmów działań pisemnych – procentowy rozkład liczby poprawnych obliczeń uczniów.

Diagram wyraźnie pokazuje, jak wielkie znaczenie przywiązywali nauczyciele do „utrwalenia” algorytmu pisemnego dodawania. Nieco mniej skutecznie proces ten przebiegał dla mnożenia oraz odejmowania. Rozkład liczby poprawnie wykonanych obliczeń dla dzielenia jest zdecydowanie bardziej wyrównany niż dla pozostałych działań.

W przypadku dodawania pisemnego błędów było niewiele i wynikały one przede wszystkim z nieuwagi uczniów. Dała się zauważyć jedynie jedna, powtarzająca się kategoria błędów: w którymś momencie obliczenia uczeń przestawał dodawać i zaczynał mnożyć – nowy algorytm zaburzał algorytm poznany wcześniej:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 335 \\ +468 \\ \hline 7503 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 1548 \\ +216 \\ \hline 2064 \end{array}$$

Symetryczna sytuacja daje się też zauważyć w mnożeniu pisemnym – uczeń zaczyna mnożyć, po czym „przechodzi” na dodawanie:

$$\begin{array}{r} 17 \\ 839 \\ \cdot 8 \\ \hline 902 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 46 \\ \cdot 9 \\ \hline 20 \end{array}$$

Zdecydowana większość błędów popełnianych przez trzecioklasistów w przypadku mnożenia pisemnego była konsekwencją kłopotów z tabliczką mnożenia. W przypadku odejmowania dominowały błędy związane z operacją „rozmienniania”, a ich różnorodność była rzeczywiście ogromna:

1.

	4	15	15
	6	5	5
-	4	7	8
		8	7
2.

	5	9	10
	6	5	5
-	4	7	8
	1	2	2
3.

	5	9	15
	6	5	5
-	4	7	8
	1	2	7
4.

	5	9	14
	6	5	5
-	4	7	8
	1	2	0
5.

	1	10	10
	6	5	5
-	4	7	8
	1	8	7
6.

	5	16	16
	6	5	5
-	4	7	8
	2	0	0
7.

	8	10	
	6	5	5
-	4	7	8
	2	2	7
8.

	10	10	
	6	5	5
-	4	7	8
	2	5	2
9.

	10	14	
	6	5	5
-	4	7	8
	2	3	9
10.

			15
	6	5	5
-	4	7	8
	2	6	7
11.

	16	15	
	6	5	5
-	4	7	8
	2	8	7
12.

	16	15	
	6	5	5
-	4	7	8
	2	8	7
13.

	15		
	6	5	5
-	4	7	8
	2	8	7
14.

	8	15	
	6	5	5
-	4	7	8
	1	8	7

W tym niezbyt trudnym odejmowaniu (dwa „rozmieniania” obok siebie) pojawiło się przynajmniej 14 różnych błędnych wyników, a każdy jest efektem innego błędu przy rozmienianiu!

Umiejętność stosowania algorytmu pisemnego odejmowania była badana za pomocą trzech przykładów o rosnącym stopniu trudności. Zobaczmy więc, jak niektórzy z autorów przytoczonych wyżej „słupków” zachowywali się w innych sytuacjach⁴⁰.

Uczeń 2:

	5	9	10
	6	5	5
-	4	7	8
	1	2	2

	0	9	9	10		
	1	3	0	6		
-		4	2	8		
				5	7	2

Jak widać, w obu przykładach uczeń postępuje dokładnie wedle tego samego schematu: dopisuje odpowiednią liczbę dziesiątek i dziesiątek „na końcu”, przekreślając kolejne cyfry odjemnej, po czym o cyfrach tych zapomina.

Uczeń 5:

		1	10
	5	7	6
-	4	3	9
	1	3	7

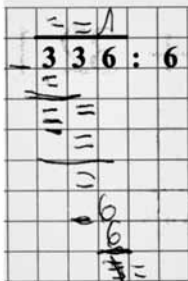
	1	10	10
	6	5	5
-	4	7	8
	1	8	7

	1	10	10			
	1	3	0	6		
-		4	2	8		
				3	7	8

⁴⁰ Dąbrowski M. (2009f).

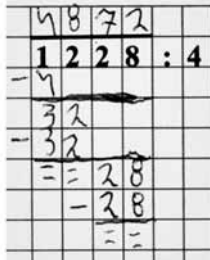
liczeń, prawdopodobnie, **nie rozumieją struktury systemu dziesiętnego** (por. dalej), nie zrozumieli więc także procedury pisemnego odejmowania, nie opanowali kolejnych kroków algorytmu, **zaczęli więc budować swoje własne strategie postępowania, niestety błędne**. Natomiast różnorodność zastosowanych metod jest rzeczywiście oszałamiająca.

Uderza bezkrytyczność niektórych uczniów, którą widać zwłaszcza w przypadku dzielenia – nie przeszkadzają im wyniki ani szokująco małe, ani też zadziwiająco duże:

1. 

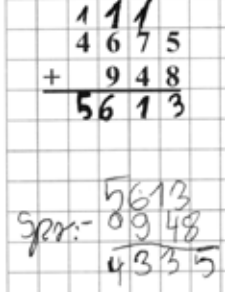
2. 

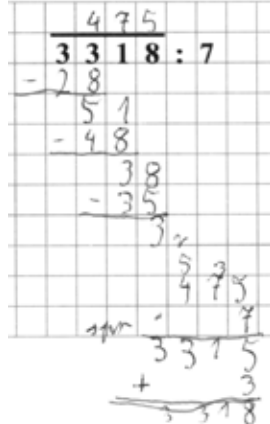
3. 

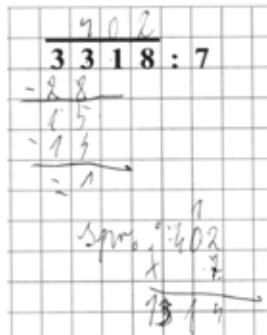
4. 

Tu też ujawniają się niektóre stworzone przez uczniów strategie, np. *Liczy się to, co daje się podzielić*.

Odrębną kwestią jest sprawdzanie poprawności wykonywanych obliczeń, które – niezależnie od typu działania – pojawiały się zupełnie sporadycznie i którego wyniki były przyjmowane przez uczniów ze sporą beztróską:

1. 

2. 

3. 

4.

$$\begin{array}{r} 655 \\ -478 \\ \hline 167 \\ 11 \\ 167 \\ +478 \\ \hline 655 \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{r} 655 \\ -478 \\ \hline 277 \\ 11 \\ 277 \\ +478 \\ \hline 655 \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{r} 0 \\ 576 \\ -439 \\ \hline 137 \\ 11 \\ 167 \\ +439 \\ \hline 606 \end{array}$$

Wydaje się, że dla części uczniów sprawdzanie poprawności obliczenia jest zewnętrznym przymusem – dodatkowym krokiem algorytmu pozbawionym głębszego czytelnego sensu⁴¹. Autor tylko jednego z powyższych obliczeń (por. 6.) wyciągnął wniosek z tego, że sprawdzenie dało inny wynik niż powinno, ale jego reakcja była niezbyt konstruktywna – przekreślił wynik, zamiast podjąć próbę szukania błędu.

Stosowanie przez uczniów własnych strategii wykonywania obliczeń

Umiejętność stosowania posiadanej wiedzy do sprytnego wykonywania obliczeń badano kilkakrotnie, przyjrzymy się bliżej wynikom z roku 2008⁴² oraz 2011⁴³. W roku 2008 wykorzystano, w równoległych grupach, dwa zestawy działań:

Oblicz tak, jak Ci najwygodniej. 999 + 86	106 – 99	150 : 25
Oblicz tak, jak Ci najwygodniej. 199 + 87	1007 – 999	140 : 35

Działania dodawania i odejmowania zostały tak dobrane, aby zachęcały trzecioklasistów do zademonstrowania swojej zaradności arytmetycznej – ich wyniki są natychmiastowe, gdy uczeń odwoła się do swojej wiedzy o obliczeniach, a nie algorytmów działań pisemnych.

⁴¹ Bez wątplenia jest to efekt tego, w jaki sposób procedura sprawdzania poprawności obliczeń jest traktowana w praktyce szkolnej czy w materiałach edukacyjnych – nie ma w nich miejsca na dyskusję o zauważonej podczas sprawdzenia niezgodności wyników i wspólne wyciąganie z tej dyskusji konstruktywnych wniosków.

⁴² Dąbrowski M. (2009b).

⁴³ Dąbrowski M., Wiatrak E. (2012b).

Przykłady dotyczące dzielenia miały odpowiedzieć na pytanie, na ile uczniowie rozumieją działanie dzielenia i po jakie strategie sięgną w tych nietypowych dla siebie sytuacjach – algorytm dzielenia pisemnego przez liczby wielocyfrowe zawsze był domeną klasy 4.

• Dodawanie i odejmowanie

Wyniki trzecioklasistów w zakresie dodawania i odejmowania przedstawione są w tabeli 1.

Tabela 1. „Własne” strategie dodawania i odejmowania – obliczenia pisemne a inne metody w badaniach w roku 2008

	pisemnie		w inny sposób	
	poprawnie	błędnie	poprawnie	błędnie
199 + 87	85,7%		13,6%	
	79,1%	6,6%	9,0%	4,6%
999 + 86	84,6%		14,5%	
	76,2%	8,4%	10,2%	4,3%
106 – 99	76,3%		22,2%	
	53,5%	22,8%	18,2%	4,0%
1007 – 999	82,0%		16,4%	
	50,6%	31,4%	11,8%	4,6%

W przypadku dodawania z algorytmu pisemnego skorzystało 85,7% trzecioklasistów dla pierwszego działania i 84,6% dla drugiego. Jak widać, sięgano po ten algorytm wręcz masowo.

Z działaniem $199 + 87$ poradziło sobie 88,1% uczniów (79,1% używając algorytmu), a z działaniem $999 + 86$ minimalnie mniej, bo 86,4% (76,2% dzięki „liczeniu pod kreską”).

Tylko 13,6% dzieci dla pierwszego dodawania oraz 14,5% dla drugiego sięgnęło po inne metody, najczęściej po prostu od razu zapisując wynik. Poziom np. 14%, to, przy typowej liczebności klasy, dwie-trzy osoby w klasie.

Popularność algorytmu pisemnego odejmowania była nieco mniejsza – posłużyło się nim 76,3% trzecioklasistów dla pierwszego przykładu oraz 82,0% dla drugiego.

Różnicę: $106 - 99$ obliczyło poprawnie 71,7% uczniów (53,5% pisemnie). Oznacza to, że prawie 30% uczniów nie poradziło sobie z działaniem, które – dosłownie – wykonuje się na palcach. W drugim odejmowaniu: $1007 - 999$ sukces odniosło 62,4% uczniów (50,6% pisemnie). Tym razem poziom błędów towarzyszących obliczeniom pisemnym był znacznie wyższy – odpowiednio 22,8% oraz

31,4%. Wybór metody sprawił, że proste obliczenia stały się znacznie trudniejsze. Po inne strategie sięgnęło odpowiednio 22,2% oraz 16,4% trzecioklasistów. Także i przy odejmowaniu uczniowie najczęściej ograniczali się do podania wyniku, starannie ukrywając swój sposób rozumowania.

Trzy z tych obliczeń wykorzystano w badaniach w roku 2011, czyli mniej więcej cztery lata po przeniesieniu w podstawie programowej algorytmów pisemnego dodawania i odejmowania na II etap kształcenia:

Tabela 2. „Własne” strategie dodawania i odejmowania – obliczenia pisemne a inne metody w badaniach w roku 2011

	pisemnie		w inny sposób	
	poprawnie	błędnie	poprawnie	błędnie
999 + 86	72,5%		26,6%	
	64,1%	8,4%	15,3%	11,3%
106 – 99	54,3%		44,5%	
	36,7%	17,6%	36,6%	7,9%
1007 – 999	49,1%		48,7%	
	32,4%	16,7%	26,7%	22,0%

Dodawanie wykonało poprawnie 79,4% trzecioklasistów, a odejmowania odpowiednio 73,3% oraz 59,1%. Jak widać, w przypadku dodawania oraz trudniejszego z odejmowań nadal przeważają algorytmy pisemne, choć częstość stosowania innych metod wyraźnie wzrosła. Ten spadek „popularności” obliczeń pisemnych w ciągu tych trzech lat jest wyraźniejszy dla obu odejmowań – dla pierwszego z nich wynosi 31,7%, a dla drugiego 27,6%. Nie wpłynęło to w widoczny sposób na poziom ich wykonania.

Zwraca uwagę to, że dla dodawania po algorytm nadal sięgnęło ponad $\frac{3}{4}$ trzecioklasistów.

Bardzo często, zwłaszcza w przypadku odejmowania, trzecioklasiści podawali sam poprawny wynik. Zrobiło tak 13,7% uczniów dla dodawania, 33,8% dla odejmowania 106 – 99 oraz 24,7% dla odejmowania 1007 – 999.

Po raz kolejny uderza „staranność”, z jaką uczniowie zarówno w tym przypadku, jak i przy okazji innych obliczeń ukrywają swój sposób osiągnięcia wyniku. Poniżej nieliczne „ujawnione” przez trzecioklasistów zastosowane strategie dodawania⁴⁴:

⁴⁴ Zarówno te przykłady, jak i strategie dla odejmowania są zaczerpnięte z różnych edycji badań.

W pierwszym obliczeniu uczeń rozłożył liczby na setki, dziesiątki i jedności. W pięciu kolejnych trzecioklasiści „odejmują po kawalku”, zaczynając od 90, albo od 6, albo od 96.

Autorzy obliczeń 7 i 8, zamiast od 106, odjęli 99 od 100, robiąc później odpowiednią korektę. Ta sama strategia jest zastosowana także dla większych liczb w obliczeniu 12.

W dziewiątym, uczeń rozbił początkowe odejmowanie na dwie części: $100 - 90$ i „resztę” – tą resztą jest $6 - 9$, czyli -3 . Po obliczeniu różnicy $100 - 90$ odjął od niej różnicę $9 - 6$. Odjął, a nie dodał, bo tak naprawdę zaczął operować liczbami ujemnymi i musiał to uwzględnić, żeby otrzymać dobry wynik.

W kolejnym obliczeniu uczeń najpierw odjął 100, po czym „odał” 1, żeby otrzymać poprawny wynik. A można było jeszcze np. dodać zamiast odjąć (por. 11.).

W wielu z tych przykładów: 2, 3, 5, 7, 8, 9 trzecioklasiści stosują „liniowy” zapis kolejnych operacji – bardzo typowy dla notacji tworzonej przez uczniów podczas wykonywania obliczeń czy rozwiązywania zadań tekstowych. Bardzo dobrze pełni on jedną z dwóch podstawowych funkcji zapisu – ułatwia im poradzenie sobie z zadaniem⁴⁵.

• Dzielenie

Wyniki uczniów z roku 2008⁴⁶ w zakresie dzielenia przez liczbę dwucyfrową przedstawione są w tabeli 3.

Tabela 3. Dzielenie przez liczbę dwucyfrową – procentowe zestawienie wyników z 2008 roku

	150 : 25	140 : 35
dobrze	48,4	44,2
źle	46,1	48,4
brak	5,5	7,4

Oba działania⁴⁷ okazały się mniej więcej jednakowo trudne – dobry wynik podało odpowiednio 48,4% oraz 44,2% trzecioklasistów, zatem wyraźnie mniej niż połowa.

W przypadku działania $150 : 25$ tylko 2,5% uczniów skorzystało z rozdzielnosci dzielenia względem dodawania i rozbiło to dzielenie na dwa, ich zdaniem, łatwiejsze:

⁴⁵ Więcej na ten temat w: Dąbrowski M., *Arytmetyczny potok*, <http://www.trzecioklasista.edu.pl/artykuly/arytmetyczny-potok>

⁴⁶ Dąbrowski M. (2009b).

⁴⁷ Działania były wykorzystane w równoległych wersjach testów.

$$150 : 25 = (100 + 50) : 25 = 100 : 25 + 50 : 25 = 4 + 2$$

$$150 : 25 = (75 + 75) : 25 = 75 : 25 + 75 : 25 = 3 + 3 = 6$$

Dla działania $140 : 35$ tego typu skutecznych prób było jeszcze mniej, bo jedynie 1,6%.

$$140 : 35 = (70 : 35) + (70 : 35) = 2 + 2 = 4$$

$$140 : 35 = (70 + 70) : 35 = 4$$

$$140 : 35 = (105 + 35) : 35 = 105 : 35 + 35 : 35 = 3 + 1 = 4$$

Nieco częściej uczniowie dochodzili do wyniku, mnożąc, dodając albo odejmując – postąpiło tak odpowiednio 4,9% oraz 5,6% trzecioklasistów:

$$140 : 35 = 4$$

$$140 : 35 = 4$$

$$140 : 35 = 4$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 25 \\ + 25 \\ + 25 \\ + 25 \\ + 25 \\ + 25 \\ + 25 \\ = 140 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 4 \\ \hline 140 \end{array}$$

140 : 35

$$\begin{array}{r} 4 \\ 140 : 35 \\ - 140 \\ \hline = = = \end{array}$$

Jeszcze częściej uczniowie odnosili sukces, wykonując (zapisując?) pisemne dzielenie – zrobiło tak 5,3% uczniów dla pierwszego przykładu oraz 6,4% dla drugiego.

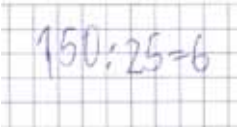
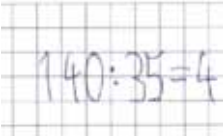
Niekiedy zapis tego dzielenia pokazywał, że wynik został znaleziony w inny sposób, a zapis ma jedynie nadać mu właściwą „moc”:

$$\begin{array}{r} 140 \\ : 35 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 140 : 35 \end{array}$$

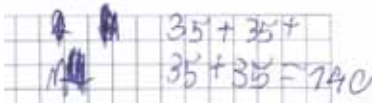
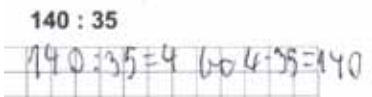
Reszta tych uczniów, którzy poradzili sobie z dzieleniem przez liczbę dwucyfrową od razu podawała wynik – zrobiło tak 35,7% trzecioklasistów dla dzielenia $150 : 25$ oraz 30,6% dla $140 : 35$.

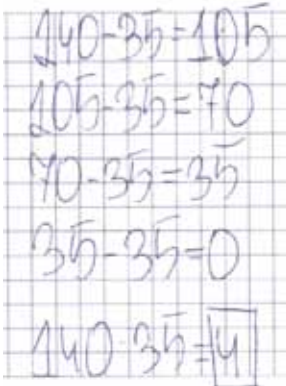
Także w badaniach z roku 2011, w których powtórzono oba przykłady dzielenia, najbardziej popularne było podanie samego dobrego wyniku, czyli – prawdopodobnie – wykonanie obliczenia w pamięci:

150 : 25	140 : 35
	

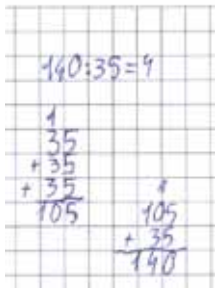
Postąpiło tak 37,1% trzecioklasistów dla działania $150 : 25$ oraz 34,2% dla $140 : 35$.

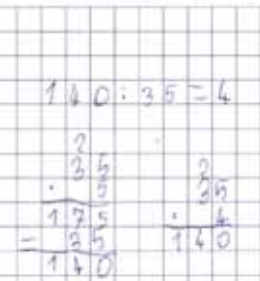
Jedynie 2,5% uczniów w przypadku pierwszego dzielenia oraz 6,3% dla drugiego posłużyło się w poszukiwaniu ilorazów dodawaniem, odejmowaniem albo mnożeniem:

140 : 35	
	
140 : 35	
	

140 : 35


Dwa poniższe obliczenia pokazują, jak skutecznym narzędziem w takiej sytuacji może być *strategia prób i poprawek*:

140 : 35


140 : 35


Równie niewiele uczniów, jak trzy lata wcześniej, sięgnęło po rozdzielność – skorzystało z niej (i zapisało swoje postępowanie!) 3,0% trzecioklasistów dla dzielenia $150 : 25$ oraz jedynie 0,6% dla $140 : 35$:

$150 : 25$

$150 : 25 = (100 + 50) : 25 = 100 : 25 + 50 : 25 = 2 + 4 = 6$
 $150 : 25 = 100 : 25 + 50 : 25 = 4 + 2 = 6$
 $150 : 25 = 5 + 1 = 6$

Natomiast nieco rzadziej niż trzy lata wcześniej, uczniowie osiągnęli sukces z pomocą pisemnego dzielenia – dla obu działań stało się to udziałem takiej samej grupy trzecioklasistów: po 2,7%.

Spójrzmy na globalne wyniki dzielenia w roku 2011:

Tabela 4. Dzielenie przez liczbę dwucyfrową – procentowe zestawienie wyników z 2011 roku

	150 : 25	140 : 35
dobrze	45,2	43,7
źle	47,0	46,4
brak	7,8	9,9

Jak widać, niezależnie od zmian programowych, zarówno wyniki, jak i typy rozwiązań w obu badaniach: 2008 i 2011 są bardzo zbliżone. **Należy sądzić, że opisują one istniejącą i trwałą tradycję edukacyjną, a nie aktualne edukacyjne „trendy” – ponad połowa trzecioklasistów nie rozumie działania dzielenia i nie potrafi, w efekcie, zastosować swojej wiedzy do znalezienia wyniku nietypowego, niezbyt trudnego, działania.**

Jednym z przykładów sprawdzających w badaniu OBUT 2011⁴⁸ umiejętności rachunkowe trzecioklasistów, czy raczej ich *zaradność arytmetyczną*, było dzielenie liczby dwucyfrowej przez dwucyfrową:

$88 : 22$ $84 : 14$

⁴⁸ Dąbrowski M., Wiatrak E. (2011).

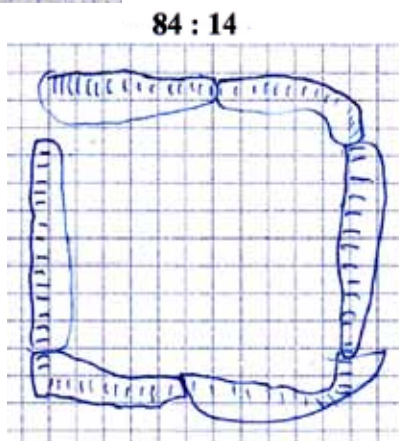
Ponieważ przygotowano dwie wersje testu matematycznego, więc każdy uczeń wykonywał jedno z tych obliczeń.

Zadanie to spotkało się z bardzo żywą reakcją nauczycieli i rodziców – znaczna ich część była zdania, że jednoznacznie wykracza ono poza zapisy podstawy programowej⁴⁹. Na ogół było to uzasadniane tym, że algorytm pisemnego dzielenia przez liczby dwucyfrowe znajduje się w podstawie dla II etapu kształcenia. Zamiast na faktycznej umiejętności dzielenia osoby formułujące tę opinię skupiły swoją uwagę na jednym z narzędzi, które temu celowi, czyli znalezieniu ilorazu, służą. **To sytuacja bardzo charakterystyczna dla nauczania matematyki w naszej szkole – narzędzie staje się ważniejsze od celu, jakiemu ma służyć.**

Tymczasem, uczniowie mogli mnożyć, dodawać, odejmować czy po prostu rysować:

88 : 22

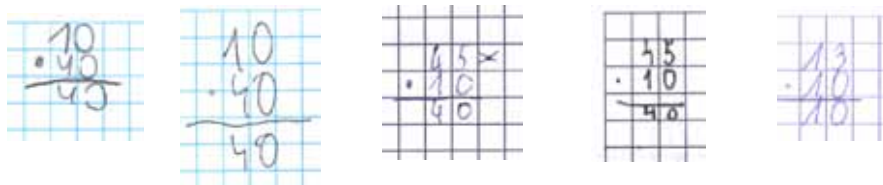
84 : 14



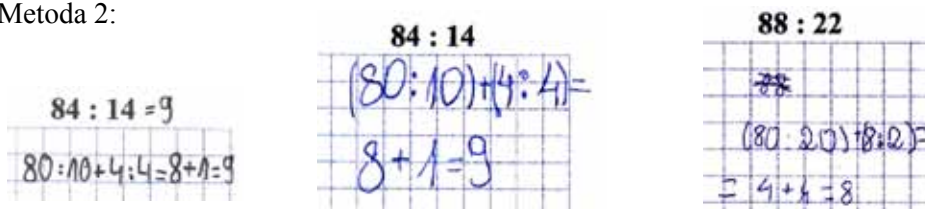
Pierwsze dzielenie, na pozór banalnie proste, wykonało poprawnie jedynie 43,1% trzecioklasistów. Z drugim – w opinii publicznej zdecydowanie trudniejszym – poradziło sobie 39,4% dzieci, czyli o 3,7% mniej. Zwraca uwagę wysoki odsetek dzieci, które w ogóle nie podjęły próby wykonania tych działań – 7,8% dla $88 : 22$ oraz 13,4% dla $84 : 14$.

⁴⁹ Por. *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych i gimnazjów z 23 sierpnia 2007 r.*, Dz.U. Nr 157, poz. 1102 z dnia 31 sierpnia 2007 r. oraz *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych i gimnazjów z 23 grudnia 2008 r.*, Dz.U. Nr 4, poz. 17 z dnia 15 stycznia 2009.

Podobną strategię: *cyfra z dołu razy cyfra z góry* stosują też trzecioklasiści przy okazji zapisanego „w słupku” mnożenia:



Metoda 2:

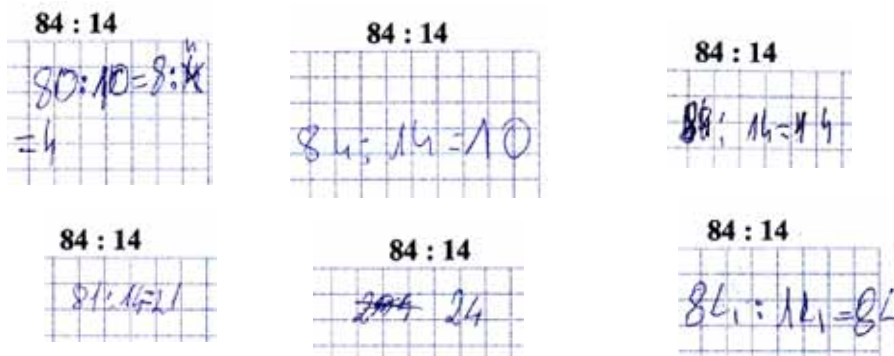


Uczniowie zaczynają podobnie, jak w metodzie poprzedniej: dziesiątki przez dziesiątki, jedności przez jedności, ale na tym nie poprzestają – pojawia się nowa operacja: uzyskane wyniki są dodawane.

Warto przyjrzeć się uważniej tym trzem zapisom powyżej. Wizualnie są one podobne do zapisów dotyczących np. rozdzielności mnożenia względem dodawania – może taki właśnie jest rodowód tej metody. Może jest ona efektem „wzorowania się” właśnie na zapisie rozdzielności, ale bez odwołania się do sensu tej własności działań i sensu samego zapisu.

Ta strategia była nieco mniej popularna – w przypadku działania $84 : 14$ zastosowało ją 7,5% trzecioklasistów, natomiast dla działania $88 : 22$ – jedynie 2,0%.

Zwłaszcza dla dzielenia $84 : 14$ różnorodność dziecięcych pomysłów i rozpiętość wyników była duża:



Uderza to, że ci uczniowie, którzy nie potrafili „od ręki” znaleźć poprawnego wyniku swojego dzielenia w ogromnej większości sięgali po różnorodne manipulacje symbolami, zamiast odwołania się do swojej wiedzy o dzieleniu.

Wiele wskazuje na to, że w świadomości ponad połowy trzecioklasistów z kolejnych ich roczników dzielenie, to nie do końca zrozumiała żonglerka symbolami – tu się coś przez coś podzieli, tu coś dopisze, ... i będzie dobrze. Biorąc pod uwagę powszechność tego zjawiska, należy uznać, że jest ono przede wszystkim efektem tego, w jaki sposób uczymy dzieci zarówno samego dzielenia, jak i posługiwania się językiem symbolicznym. Wydaje się (por. dalej), że konkluzję tę można rozszerzyć także na inne działania.

Gdy dominuje jedna metoda!

Wróćmy do algorytmów działań pisemnych. Wprawdzie, jak już wspominałem, nie ma ich aktualnie w podstawie programowej dla klas 1-3, ale nadal jest to obszar tematyczny postrzegany jako ważny dla całej szkoły podstawowej.

Spójrzmy na obliczenia wykonywane przez trzecioklasistów przy okazji rozwiązywania zadań tekstowych⁵¹:

$$\begin{array}{r} 8 \\ +4 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ +12 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 2 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 5 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 140 \\ + 2 \\ \hline 142 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 3 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ -2 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ +2 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ -2 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ -2 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ -2 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ -2 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 : 2 \\ - 8 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ - 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ - 40 \\ \hline -20 \\ - 0 \\ \hline -20 \\ - 0 \\ \hline -20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 32 : 2 \\ - 2 \\ \hline 12 \\ - 12 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ + 36 : 4 \\ - 36 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 16 : 2 \\ - 16 \\ \hline 00 \end{array}$$

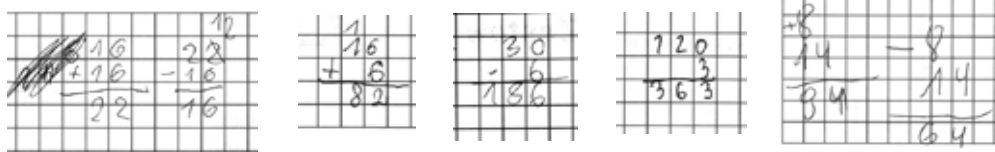
$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 : 3 \\ - 6 \\ \hline 2 \end{array}$$

⁵¹ Dąbrowski M. (2009b).

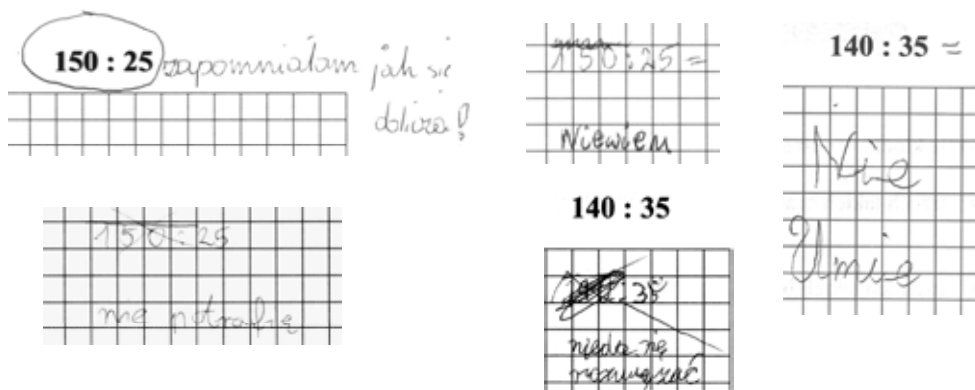
Dzielenia $6 : 3$, podobnie jak wielu innych z przytoczonych powyżej działań, po prostu nie da się wykonać pisemnie. Co najwyżej można to udawać, zapisując obliczenia zrobione w pamięci w postaci „słupka”. Czy po to uczymy algorytmów obliczeń pisemnych?

Zabijanie u uczniów zaradności matematycznej⁵², a może nawet szerzej: intelektualnej, to pierwszy efekt dominacji jednej „jedynej” obowiązującej metody – i to niezależnie od tego, czy dotyczy ona wykonywania obliczeń, rozwiązywania zadań tekstowych, czy jakiegokolwiek innego obszaru działań ucznia.

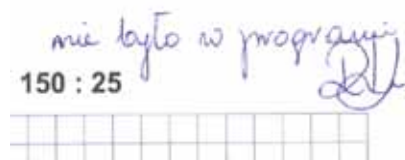
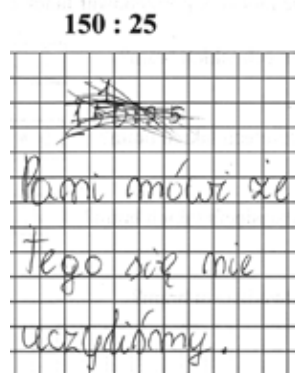
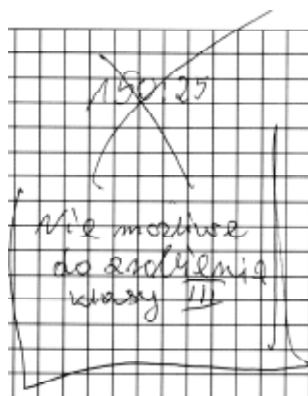
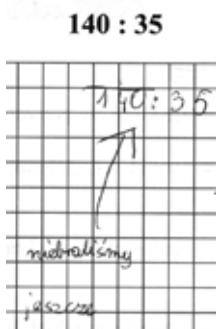
Drugi możliwy i często występujący efekt, to narażenie dzieci na dodatkowe i zupełnie zbędne „okazje” do popełnienia błędu:



Trzeci wreszcie, być może o najdalej idących konsekwencjach, będący pochodną pierwszego, to „wdrukowana” i skutecznie utrwalona przez szkołę matematyczna bezradność i bezmyślność:



⁵² Zaradność matematyczna to umiejętność skutecznego i sprytnego wykorzystywania posiadanej wiedzy matematycznej. Powinniśmy uczyć matematyki tak, aby uczniowie potrafili się nią posługiwać – im skuteczniej i sprytniej, tym lepiej.



Pierwszym odruchem autorów większości tych prób było „uruchomienie” algorytmu pisemnego dzielenia. Jak widać, w ten sam sposób reagowali także ich nauczyciele. **Narzędzie staje się ważniejsze od celu, któremu ma służyć.** To samo daje się zaobserwować także w innych obszarach szkolnej matematyki, wspominałem już o tym np. przy okazji rozwiązywania zadań tekstowych.

Rozumienie działań dodawania i odejmowania

W badaniach z roku 2011⁵³ wykorzystano zadanie, którego celem było zebranie danych o tym, na ile uczniowie rozumieją wybrane własności dodawania i odejmowania:

- Podaj przykład takiego dodawania, w którym wynik jest równy jednej z dodawanych liczb.
- Podaj przykład takiego odejmowania, w którym liczby różnią się o 5.
- Podaj przykład takiego dodawania, w którym suma jest o 12 większa od jednego ze składników i o 16 większa od drugiego.

Pierwszy podpunkt zadania dotyczy roli 0 w dodawaniu – jeśli jedną z dwóch dodawanych liczb jest zero (i tylko wtedy!) wynik jest równy drugiej liczbie⁵⁴. Zatem, rozwiązując to zadanie wystarczyło podać dowolne dodawanie, w którym jednym ze składników jest zero.

⁵³ Dąbrowski M., Wiatrak E. (2012b).

⁵⁴ W przypadku sumy kilku liczb tylko jeden składnik powinien być różny od 0.

Drugi podpunkt nawiązuje do istoty odejmowania – wynik odejmowania informuje nas o tym, o ile różnią się odjemna i odjemnik. Zadanie to daje jednak znacznie więcej możliwych poprawnych odpowiedzi, niż na pierwszy rzut oka się wydaje – tymi liczbami, które różnią się o 5 może być także odjemna i różnica albo odjemnik i różnica.

Trzeci przykład dotyczy rozumienia związku sumy ze składnikami i jako jedyny posługuje się językiem formalnym. Tylko ten przykład jest zadaniem zamkniętym – jego jedynym poprawnym rozwiązaniem jest działanie o składnikach 12 i 16 oraz sumie 28.

Oto wyniki tego zadania:

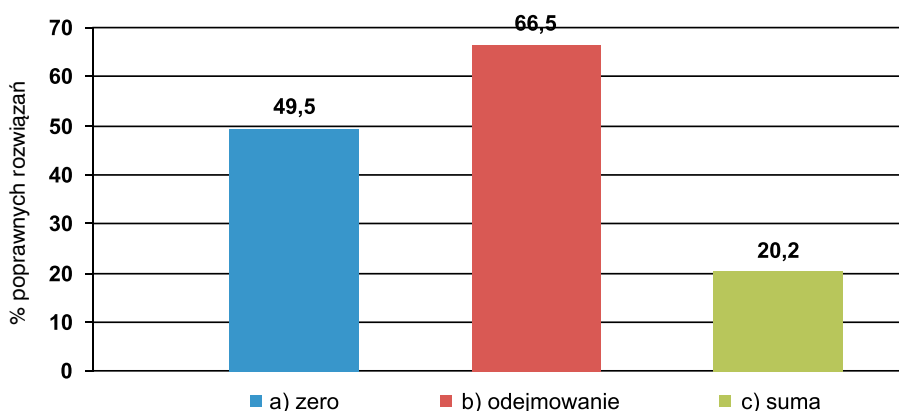


Diagram 4. Rozumienie wykonywanych operacji arytmetycznych – procent poprawnych przykładów dla kolejnych podpunktów.

Najmniej kłopotu sprawiło trzecioklasistom odejmowanie – z podaniem odpowiedniego przykładu poradziło sobie 66,5% uczniów, czyli mniej więcej $\frac{2}{3}$. W porównaniu z pozostałymi przykładami jest to niezły wynik. Z drugiej strony jednak, oznacza to, że 33,5% trzecioklasistów zupełnie nie rozumie sensu odejmowania.

Nieco mniej niż połowa uczniów: 49,5% potrafiła – w punkcie a – podać odpowiedni przykład dodawania. Zatem, nieco ponad połowa nie wpadła na to, że jedną z dodawanych liczb musi być zero. Polecenie to okazało się zwyczajnie trudne.

Z trzecim podpunktem tego zadania poradził sobie mniej więcej co piąty uczeń: 20,2%. To polecenie na pewno było trudniejsze od pozostałych, także ze względu na sposób jego sformułowania, ale ten wynik powinien budzić niepokój.

Bardzo znaczący jest także poziom opuszczeń dla tego zadania, który wynosi odpowiednio: 19,7%, 14,4% oraz aż 28,7%. Jak widać, **znaczna część uczniów jest po prostu bezradna przy tego typu poleceniach i nawet nie usiłuje podjąć próby pokonania trudności.**

Ponad $\frac{1}{3}$ uczniów: 37,2% poradziła sobie w tym zadaniu z dwoma przykładami, a co dziesiąty uczeń: 10,8% ze wszystkimi trzema:

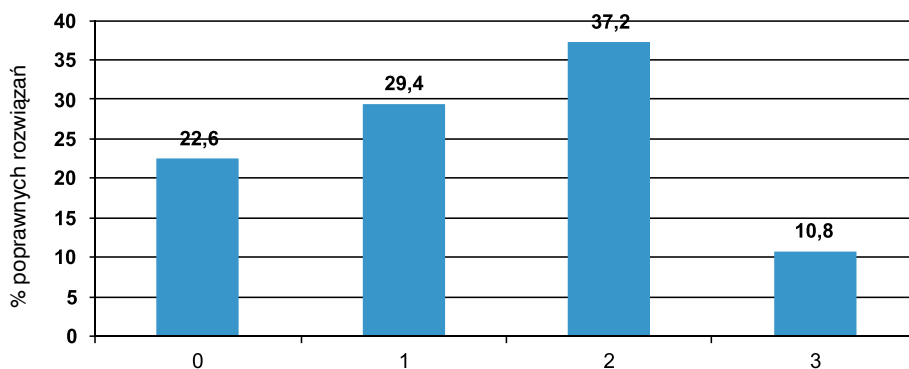


Diagram 5. Rozumienie wykonywanych operacji arytmetycznych – procentowy rozkład liczby przykładów poprawnie podanych przez uczniów.

Można więc uznać, że 48,0% trzecioklasistów zademonstrowało niezły poziom rozumienia dodawania i odejmowania. Jednak nieco więcej, bo 52,0% uczniów miało kłopoty z zastosowaniem w praktyce podstawowych własności wykonywanych na co dzień działań. Mniej więcej co piąty trzecioklasista: 22,6% nie podał żadnego dobrego przykładu – i może to być objaw „arytmetycznego analfabetyzmu”.

Wyniki te mogą wskazywać na to, że ponad połowa uczniów kończących klasę trzecią zwyczajnie nie rozumie sensu podstawowych wykonywanych operacji arytmetycznych.

Wykonywanie obliczeń złożonych

Obliczenia złożone oraz kolejność wykonywania działań do niedawna⁵⁵ były ważnymi obszarami matematycznej wiedzy dzieci rozwijanymi na I etapie kształcenia. W badaniach w roku 2006 umiejętności trzecioklasistów w tym obszarze były sprawdzane za pomocą serii typowych przykładów obliczeniowych⁵⁶:

⁵⁵ Treści te zostały przeniesione na II etap kształcenia w wyniku zmiany podstawy programowej z dnia 23.08.2007 roku.

⁵⁶ Dąbrowski M., Żytka M. (2007b); Dąbrowski M. (2008).

Oblicz:

a) $40 - 20 : 4 = \dots\dots\dots$ b) $36 - (16 - 9) = \dots\dots\dots$
c) $18 : 9 \cdot 2 = \dots\dots\dots$ d) $37 - 11 + 6 = \dots\dots\dots$
e) $16 + 4 \cdot 5 = \dots\dots\dots$ f) $60 : 6 + 4 \cdot 7 = \dots\dots\dots$

Wykonując te obliczenia, uczeń miał okazję do zademonstrowania znajomości wszystkich podstawowych reguł rządzących kolejnością działań, czyli że:

- najpierw wykonuje się obliczenie w nawiasie (b),
- mnożenie czy dzielenie wykonuje się przez dodawaniem oraz odejmowaniem (a, e i f),
- działania o tym samym priorytecie, czyli mnożenie i dzielenie oraz dodawanie i odejmowanie, robi się w kolejności ich zapisu, czyli od lewej do prawej (c i d).

O uznaniu obliczenia za poprawne decydowała właściwa kolejność wykonywanych działań, a nie ich arytmetyczna poprawność. Innymi słowy – jeśli dziecko zapisało swój tok obliczenia i był on dobry, tzn. działania były wykonywane w kolejności zgodnej z obowiązującymi regułami, a w obliczeniu pojawił się błąd rachunkowy, np. przy wykonywanym mnożeniu, to przykład i tak był „zaliczony”. Przyjęcie takiego klucza obiektywizuje wyniki sprawdzania – uzyskane rezultaty faktycznie dostarczają informacji o znajomości przez dzieci kolejności wykonywania obliczeń, a nie np. opanowaniu tabliczki mnożenia.

Wyniki dla kolejnych przykładów tego zadania przedstawia diagram 6.

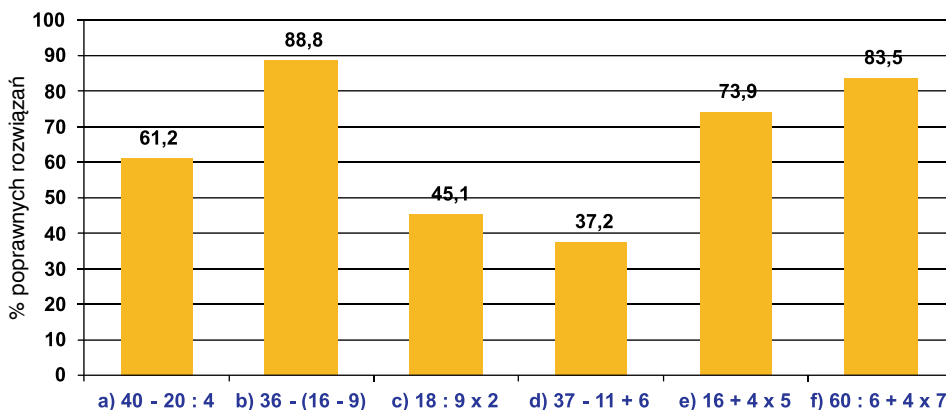


Diagram 6. Kolejność wykonywania działań – procent poprawnych obliczeń.

Aż 88,8% trzecioklasistów poprawnie zrobiło przykład b) dotyczący nawiasów. Tylko troszkę mniej uczniów, bo 83,5%, poradziło sobie z podpunktem f) – na pozór bardziej złożonym od czterech pozostałych.

Warto porównać wyniki przykładów a): 61,2% oraz e): 73,9% – obliczenia te są podobne strukturalnie i dotyczą tych samych reguł, należy więc sądzić, że ponad dwunastoprocentowa różnica wyników jest pochodną wykorzystanych w nich działań. Znaczna część dzieci wykonała je stosując zasadę od lewej do prawej – było ich 36,8% dla a) oraz 23,7% dla e). Tu także mamy podobną, bo ponad trzy-nastoprocentową różnicę nasilenia tego błędu. Być może dzieci częściej miały kontakt w procesie kształcenia z obliczeniami, w których występuje dodawanie i mnożenie, a rzadziej z tymi „na dzielenie i odejmowanie”.

Najsłabiej wypadły oba przykłady dotyczące działań o tym samym priorytecie. Tylko 45,1% trzecioklasistów, zatem sporo mniej niż połowa, jako pierwsze wykonało dzielenie, jako drugie mnożenie, czyli postąpiło zgodnie z obowiązującymi regułami. Większość pozostałych uczniów uznała, że najpierw się mnoży, dopiero potem dzieli. Zjawisko to wystąpiło jeszcze silniej dla przykładu d) – tylko 37,2% dzieci wykonało to obliczenie od lewej do prawej, czyli poprawnie.

Jedynie 12,8% trzecioklasistów poradziło sobie ze wszystkimi sześcioma przykładami (por. diagram 7.). Najwięcej uczniów, bo aż 37,5%, odnotowało po 4 sukcesy. To dość naturalne w sytuacji, gdy dwa przykłady okazują się wyraźnie trudniejsze od pozostałych, na dodatek niezbyt trudnych.

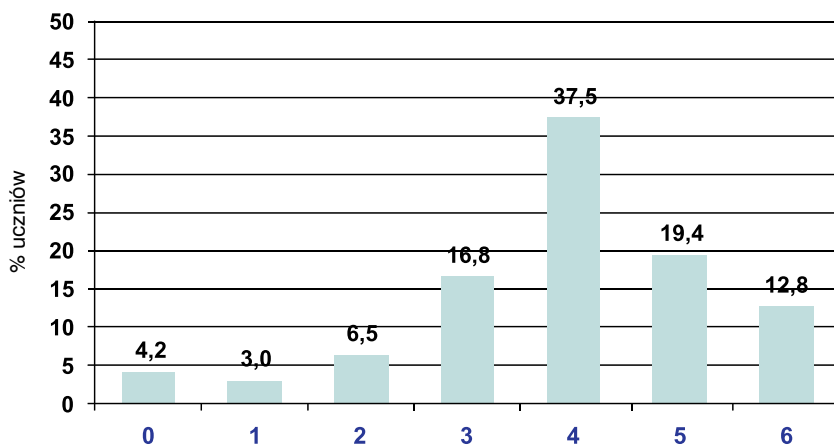


Diagram 7. Kolejność wykonywania działań – liczba poprawnie zrobionych przykładów przez uczniów.

Popatrzmy na te trudności dzieci, które nie wiążą się z samymi regułami kolejności. Okazuje się bowiem, że umieszczenie kilku obliczeń w jednym zapisie jest dla uczniów znacznie mniej naturalnym zabiegiem, niż nam się to wydaje⁵⁷. W efekcie zdecydowanie komplikuje im wykonywane obliczenia. Oto kilka przykładów, wybranych spośród wielu innych podobnych.

$$40 - 20 : 4 = 40 - 20 = 20 \quad 20 : 4 = 5 \quad 36 - (16 - 9) = 16 - 9 = 7 \quad 36 - 7 = 29 \dots$$

$$18 : 9 \cdot 2 = 18 : 9 = 2 \quad 2 \cdot 2 = 4 \dots \quad 37 - 11 + 6 = 11 + 6 = 17 \quad 36 - 17 = 19 \dots$$

$$16 + 4 \cdot 5 = 16 + 4 = 20 \quad 20 : 5 = 4 \dots \quad 60 : 6 + 4 \cdot 7 = 60 : 6 = 10 \quad 4 \cdot 7 = 28 \quad 28 + 10 = 38$$

Jak widać, ten uczeń „ratował się”, rozbijając kolejne obliczenia złożone na serie prostych – z różnym zresztą skutkiem.

Dwaj kolejni próbowali w dość podobny sposób „eksperymentować” ze znakiem równości, co prowadziło do absurdalnych zapisów, ale czasami także do dobrych wyników:

$$40 - (20 : 4) = 5 = 40 - 5 = 35 \dots \quad 36 - (16 - 9) = 7 = 36 - 7 = 29 \dots$$

$$18 : (9 \cdot 2) = 18 = 18 : 18 = 1 \dots \quad 37 - (11 + 6) = 11 = 37 - 11 = 26 \dots$$

$$16 + (4 \cdot 5) = 20 = 16 + 20 = 36 \dots \quad 60 : 6 + (4 \cdot 7) = 28 = 60 : 6 = 10 + 28 = 38 \dots$$

$$40 - 20 : 4 = 5 \quad 40 - 5 = 35 \quad 36 - (16 - 9) = 7 \quad 36 - 7 = 29 \dots$$

$$18 : 9 \cdot 2 = 18 : 18 = 1 \quad 37 - 11 + 6 = 17 \quad 37 - 17 = 20 \dots$$

Następny skupił się na pierwszych działaniach, zupełnie pomijając resztę:

$$40 - 20 : 4 = 40 - 20 = 20 \dots \quad 36 - (16 - 9) = 36 - 16 = 20 \dots$$

$$18 : 9 \cdot 2 = 18 : 9 = 2 \dots \quad 37 - 11 + 6 = 37 - 11 = 26 \dots$$

$$16 + 4 \cdot 5 = 16 + 4 = 20 \dots \quad 60 : 6 + 4 \cdot 7 = 60 : 6 = 10 \dots$$

⁵⁷ Z formalnego punktu widzenia taki zapis jest zresztą ... niepoprawny, gdyż każde z wykorzystywanych działań jest dwuargumentowe, tzn. powinno mieć jednoznacznie (!) określony lewy i prawy argument.

Skąd się biorą tego typu trudności?

Jedno z możliwych wyjaśnień jest następujące. Żeby z tą nową formą zapisu, czyli obliczeniem złożonym, sobie poradzić, uczeń musi nie tylko pamiętać o kolejności wykonywania działań, ale przede wszystkim **musi rozumieć sens stosowanego znaku równa się**. Wcześniej, przy okazji wielu „robionych słupków” znak ten „wołał” do dziecka: *podaj wynik*. Tu zaczyna pełnić inną rolę – staje się symbolem informującym, że po jego lewej i prawej stronie znajduje się to samo, co najwyżej inaczej zapisane.

Spójrzmy na kolejne przykłady uczniowskich obliczeń:

$$40 - 20 : 4 = \cancel{50} 205 \dots\dots\dots 36 - (16 - 9) = 207 \dots\dots\dots$$

$$18 : 9 \cdot 2 = 22 \dots\dots\dots 37 - 11 + 6 = 2677 \begin{array}{r} -37 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$16 + 4 \cdot 5 = 2020 \dots\dots\dots 60 : 6 + 4 \cdot 7 = 101028$$

$$40 - 20 : 4 = 520 \dots\dots\dots 36 - (16 - 9) = 720 \dots\dots\dots$$

$$18 : 9 \cdot 2 = 182 \dots\dots\dots 37 - 11 + 6 = 2677$$

$$16 + 4 \cdot 5 = 2020 \dots\dots\dots 60 : 6 + 4 \cdot 7 = \cancel{20} 28 \dots\dots\dots$$

Jak rozumowali ich autorzy? Ich wyniki są na ogół różne, ale widać sporo podobieństw: 205 oraz 520, 207 i 720. Skąd się to bierze?

Odpowiedź jest zaskakująco prosta: uczniowie wykonują działania, które mają przed oczyma, ale nie wiedzą, co zrobić z ich wynikami, więc je zapisują obok siebie, na dodatek w dowolnej kolejności:

$$\begin{aligned} 40 - 20 &= 20, 20 : 4 = 5, \text{ stąd } 205 \text{ albo } 520 \\ 36 - 16 &= 20, 16 - 9 = 7, \text{ zatem } 207 \text{ albo } 720 \\ 16 + 4 &= 20, 4 \cdot 5 = 20, \text{ czyli } 2020 \\ 60 : 6 &= 10, 6 + 4 = 10, 4 \cdot 7 = 28, \text{ czyli } 101028 \end{aligned}$$

Czasami przy tym się myląc:

$$\begin{aligned} 37 - 11 &= 26, 11 + 6 = 77, \text{ więc } 2677, \\ \text{albo zamiast wyniku przepisując jedną z podanych liczb:} \\ 18 : 9 &= 2, \text{ i jeszcze } 2, \text{ czyli } 22. \end{aligned}$$

I dwa kolejne, bardziej rozbudowane, przykłady z tej samej serii:

$$\begin{array}{l}
 40 - 20^5 : 4 = 5 \cdot 20 = 100 \dots\dots\dots 36 - (16^7 - 9) = 7 + 29 = 36 \dots\dots\dots \\
 18 : 9^{18} \cdot 2 = 18 \cdot 2 = 36 \dots\dots\dots 37 - 11^{17} + 6 = 17 + 26 = 44 \dots\dots\dots \\
 16 + 4^{20} \cdot 5 = 20 + 20 = 40 \dots\dots\dots 60^{10} : 6 + 4 \cdot 7 = 22 + 28 = 50 \dots\dots\dots \\
 40 - 20 : 4 = \del{20} \cdot 5 = 25 \dots\dots\dots 36 - (16 - 9) = 20 + 9 = 29 \dots\dots\dots \\
 18 : 9 \cdot 2 = 1 + 18 = 19 \dots\dots\dots 37 - 11 + 6 = 26 + 17 = 43 \dots\dots\dots \\
 16 + 4 \cdot 5 = 20 + 20 = 40 \dots\dots\dots 60 : 6 + 4 \cdot 7 = 10 + 28 = 38 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Ich autorzy doszli do wniosku, że jak już są dwie liczby, to najlepiej je dodać albo pomnożyć.

Popatrzmy na kolejne podobne przykłady:

$$\begin{array}{l}
 40^{20} - 20^5 : 4 = \del{20} \cdot 5 = 25 \dots\dots\dots 40 - 20 : 4 = \del{20} \cdot 5 = 25 \dots\dots\dots \\
 18^9 : 9^{18} \cdot 2 = \dots\dots\dots 18 : 9 \cdot 2 = 18 : 9 + 2 = 2 + 18 = 20 \dots\dots\dots \\
 16^{20} + 4^{20} \cdot 5 = \dots\dots\dots 16 + 4 \cdot 5 = 16 + 4 \cdot 5 = 20 + 20 = 40 \dots\dots\dots \\
 37 - 11^{17} + 6 = 17 + 26 = 43 \dots\dots\dots 37 - 11^{17} + 6 = 17 + 26 = 43 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Skąd wzięła się ta strategia, dość popularna wśród trzecioklasistów z różnych szkół i obszarów Polski?

Możliwą i prawdopodobną odpowiedź podsuwają dwa ostatnie obliczenia powyżej – ich autorzy wyraźnie budują „drzewko”. Język „drzewek”, często w przeszłości wykorzystywany do utrwalania kolejności wykonywania działań, jest trudnym językiem symbolicznym. Jego zestawienie z obliczeniami złożonymi jest obiektywnie na tyle abstrakcyjne, że – w ramach samoobrony – mogło skłonić dzieci do tworzenia własnej „strategii drzewka” dla obliczeń złożonych, wizualnie podobnej do tej z lekcji, brzmiącej np. tak:

robimy każde działanie z osobna, a potem łączymy otrzymane wyniki.

Jak łączymy? Analiza prac trzecioklasistów podsuwa krótką odpowiedź – różnie:

$$18 : 9 \cdot 2 = 2 + 18 = 20$$

$$18 : 9 \cdot 2 = 18 - 2 = 16$$

$$18 : 9 \cdot 2 = 18 : 2 = 36 \dots\dots$$

$$18 : 9 \cdot 2 = 18 \dots : 2 = 9$$

Muszę powtórzyć jeszcze raz: **zapis kilku działań w jednym obliczeniu jest dla dzieci dużo trudniejszy niż nam się wydaje. Tego stanu rzeczy nie zmieni przeniesienie tej tematyki na II etap kształcenia, tym bardziej, że w ślad za obliczeniami złożonymi trafią do klasy czwartej także dzieci o rok młodsze, czyli dokładnie w wieku tych, których prace tu przytaczam.**

Porównywanie liczb naturalnych i rozumienie systemu dziesiętnego

Budowanie u dzieci i rozwijanie rozumienia systemu dziesiętnego i notacji dziesiętnej powinno być zasadniczym zadaniem w obszarze szkolnej arytmetyki. To przy okazji wykonywania obliczeń uczniowie zaczynają tworzyć podwaliny pod rozumienie symbolicznego języka matematyki – od tego, jak będą one solidne, zależy w wielkiej mierze dalszy ciąg ich szkolnej edukacji. Zobaczmy, jakie są efekty realizacji tego zadania.

W badaniach zrealizowanych w roku 2008⁵⁸ wykorzystano następujące zadanie:

W tych liczbach dwucyfrowych zamazano niektóre cyfry.
Tam, gdzie to nadal możliwe, wstaw w okienko znak > albo <.
W pozostałe okienka wstaw znak zapytania.

a) 7 48

b) 3 11

c) 2 5

d) 33 6

e) 2 5

f) 8 99

Jest to zadanie dla naszej szkoły nietypowe – należy sądzić, że uczniowie nie mieli z takim zadaniem kontaktu podczas zajęć. Nie mogąc odwołać się do pamięci w poszukiwaniu skutecznego sposobu pokonania trudności, trzecioklasiści musieli ujawnić, **na ile rozumieją strukturę systemu dziesiętnego i potrafią posługiwać się swoją wiedzą z tego zakresu.**

Zobaczmy, w jaki sposób trzecioklasiści mogli poradzić sobie z tym zadaniem. W przykładzie a) obie cyfry dziesiątek są znane, zatem liczby można porównać.

⁵⁸ Dąbrowski M. (2009b), por. Dąbrowski M., *Kleks prawdę Ci powie?*, <http://trzecioklasista.edu.pl/artykuly/kleks-prawde-ci-powie>

W tym celu wystarczy wykonać zupełnie elementarne rozumowanie, np. takie: *pierwsza z liczb ma 7 dziesiątek, podczas gdy druga tylko 4, zatem pierwsza jest większa*. Można także podstawić jakąś cyfrę (jedną lub więcej) w miejsce kleksa – każde takie podstawienie pozwala na sformułowanie właściwej konkluzji.

W równie prosty sposób można rozstrzygnąć, jaki znak powinien być wstawiony w przykładach b) i f). W b) po prawej stronie jest 11, po lewej 13 albo 23 albo 33 ..., zatem liczba na pewno od 11 większa. Także i w tym podpunkcie każde podstawienie cyfry w miejsce kleksa daje oczekiwaną odpowiedź.

Z symetryczną sytuacją mamy do czynienia w podpunkcie f): po prawej stronie mamy największą liczbę dwucyfrową, co już powinno pozwolić na wstawienie właściwego znaku. Po lewej stronie mamy 98 albo 88 albo ..., zatem na pewno liczbę mniejszą. To kolejny przykład, w którym każde podstawienie cyfry w miejsce kleksa gwarantuje sukces.

W podpunkcie d) zamazana jest cyfra dziesiątek w prawej liczbie, zatem liczbą tą może być 16, albo 26, albo 36, albo 46, albo ... Nie wiadomo, która z nich, zatem nie wiadomo także, czy jest ona większa czy mniejsza od 33 – należy wstawić znak zapytania. W tym przykładzie podstawienie jakiejś cyfry w miejsce kleksa zawodzi – dopiero zrobienie kilku podstawień może prowadzić do właściwej konkluzji. Podobna sytuacja jest w dwóch ostatnich, w pełni analogicznych, przykładach. W podpunkcie c) zamazana jest cyfra dziesiątek w prawej liczbie – pod kleksem może być zarówno 1, jak i 9, w lewej liczbie cyfrą dziesiątek jest 2, zatem obu liczb nie da się porównać. Podobnie w przykładzie e). Także w tych dwóch sytuacjach podstawienie jednej cyfry w miejsce kleksa prowadzi do błędnych konkluzji.

Zobaczmy, jaki był poziom poprawnych rozwiązań kolejnych podpunktów tego zadania:

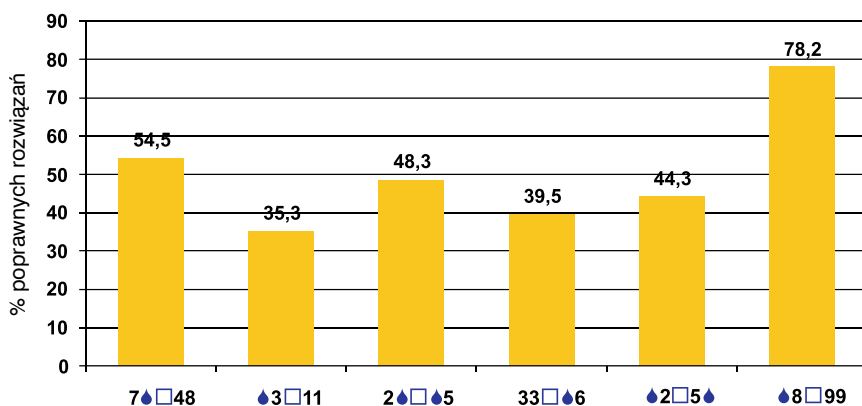


Diagram 8. Porównywanie liczb naturalnych – procent poprawnych rozwiązań.

Uderza ogromna rozpiętość wyników: od 35,3% dla przykładu b) do 78,2% dla przykładu f). Ten drugi rezultat jest ponad dwa razy wyższy od pierwszego, a oba przykłady wydają się być bardzo do siebie podobne. Skąd zatem ta różnica?

Drugim co do trudności okazał się podpunkt d): 39,5% poprawnych rozwiązań. Bliźniacze przykłady c) i e) mają odpowiednio 48,3% oraz 44,3% poprawnych uzupełnień. W dość oczywistym podpunkcie a) trzecioklasiści odnotowali nieco więcej niż połowę sukcesów: 54,5%. Jak widać, wyniki – poza przykładem f) – nie są zbyt optymistyczne.

Spójrzmy na rozkład liczby poprawnie zrobionych przykładów przez uczniów:

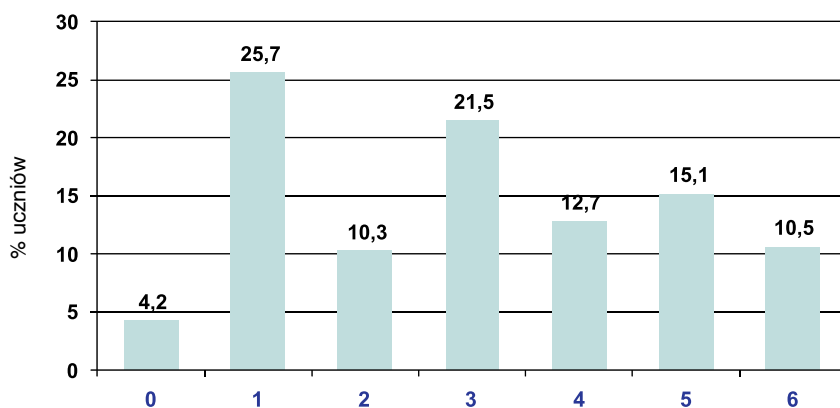


Diagram 9. Porównywanie liczb naturalnych – liczba poprawnie uzupełnionych przykładów przez uczniów.

Mniej więcej co dziesiąty trzecioklasista w pełni poradził sobie z tym zadaniem – 10,5% uczniów wpisało wszystkie znaki poprawnie. Spójrzmy na kilka takich rozwiązań:

a) $7 \bullet \triangleright 48$ b) $\bullet 3 \triangleright 11$ c) $2 \bullet \square \bullet 5$

d) $33 \square \bullet 6$ e) $\bullet 2 \square \bullet 5$ f) $\bullet 8 \square 99$

a) $7 \bullet \triangleright 48$ b) $\bullet 3 \triangleright 11$ c) $2 \bullet \square \bullet 5$

d) $33 \square \bullet 6$ e) $\bullet 2 \square \bullet 5$ f) $\bullet 8 \square 99$

Dwa pierwsze uderzają swoją „schludnością” – żadnych prób, podstawień, skreśleń, wahań. Należy sądzić, że ich autorzy po prostu wiedzieli, jak porównuje się liczby dwucyfrowe i dlaczego(!) w ten właśnie sposób.

Tę wiedzę można odświeżyć czy wzbogacić, np. eksperymentując z zamazanymi cvframi:

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |

Wydaje się, że autorzy tych rozwiązań tam, gdzie mieli wątpliwości sięgnęli po kilkakrotne podstawianie cyfr w miejsce kleksów – to by tłumaczyło skreślenia i poprawki.

Nieco więcej, bo 15,1% trzecioklasistów zrobiło jeden błąd, być może był to efekt chwili nieuwagi:

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |

Najczęściej, błąd ten dotyczył podpunktu b):

- | | | |
|----------|----------|----------|
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |

Wyniki tego podpunktu: jedynie 35,3% poprawnych uzupełnień mogą sugerować, że niektórzy uczniowie w tym prostym przykładzie mogli doszukiwać się jakiegoś „drugiego dna”.

Podobnie liczna grupa trzecioklasistów: 12,7% badanych pomyliła się dwukrotnie:

- | | | |
|----------|----------|----------|
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |

Wśród rozwiązań tego typu sporo było takich prac, jak te ostatnie powyżej: znak większości w przykładzie a) i dużo znaków zapytania. Nie jest to raczej efekt podstawiania cyfr w miejsce kleksów, bo w podpunktach b) i f) każde podstawie-

nie daje dobry znak. Może więc uczniowie stworzyli sobie „lokalną” strategię na potrzeby tego zadania: *jak nie masz pewności, co wstawić, to wstaw znak zapytania*.

Łącznie 38,2% trzecioklasistów zrobiło dobrze więcej niż połowę przykładów. Dużo to czy mało?

Spójrzmy teraz na rozwiązania z mniejszą liczbą „trafień”.

Mniej więcej $\frac{1}{4}$ trzecioklasistów: 25,7% uzupełniła poprawnie tylko jeden przykład na sześć – to był, jak widać z diagramu 9., najczęściej pojawiający się wynik. Wśród tego typu prób większość była identyczna z poniższymi przykładami:

- | | | |
|---|---|--|
| a) 7 <input checked="" type="checkbox"/> 48 | b) 3 <input checked="" type="checkbox"/> 11 | c) 2 <input checked="" type="checkbox"/> 5 |
| d) 33 <input type="checkbox"/> 6 | e) 2 <input checked="" type="checkbox"/> 5 | f) 8 <input type="checkbox"/> 99 |
| a) 7 <input checked="" type="checkbox"/> 48 | b) 3 <input checked="" type="checkbox"/> 11 | c) 2 <input checked="" type="checkbox"/> 5 |
| d) 33 <input type="checkbox"/> 6 | e) 2 <input checked="" type="checkbox"/> 5 | f) 8 <input type="checkbox"/> 99 |
| a) 7 <input checked="" type="checkbox"/> 48 | b) 3 <input checked="" type="checkbox"/> 11 | c) 2 <input checked="" type="checkbox"/> 5 |
| d) 33 <input type="checkbox"/> 6 | e) 2 <input checked="" type="checkbox"/> 5 | f) 8 <input type="checkbox"/> 99 |

Znowu żadnych skreśleń i prób oraz żadnego wahania, ale tym razem jedynie punkt f) jest właściwie uzupełniony. Jak rozumowali ci uczniowie?

Odpowiedź jest dość oczywista – pominęli oni zupełnie kleksy i zamiast porównywać liczby dwucyfrowe zajęli się porównywaniem ich widocznych części: 7 jest mniejsze od 48; 3 od 11; 2 od 5; 33 jest większe niż 6, 2 znowu mniejsze od 5, a 8 mniejsze od 99. I zadanie zrobione.

A przecież wystarczy powtórzyć sześć razy prostą procedurę jednokrotnego podstawienia jakiejkolwiek cyfry w miejsce kleksa, aby mieć trzy podpunkty: a), b) i f) prawidłowo wypełnione. Ten właśnie wynik: trzy „trafienia” był drugim najczęściej występującym – uzyskało go 21,5% uczniów. Część z nich najprawdopodobniej faktycznie podstawiała, po czym wpisywała „pasujący” znak. Niektórzy cyfry te dla wygody zapisali:

- | | | |
|-----------|-----------------------|----------------------------------|
| a) 7 48 | b) ¹ 3 11 | c) ⁰ 2 ⁴ 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |

Inni być może trzymali je „w pamięci”:

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |

Na zastosowanie strategii jednokrotnego podstawienia cyfr w miejsce kleksów wskazuje także brak w tych rozwiązaniach znaków zapytania – po podstawieniu cyfr każde dwie liczby dały się porównać.

W grupie trzech poprawnych odpowiedzi były także inne powtarzające się rozwiązania, np. takie:

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |

Być może ich autorzy pomyśleli sobie tak: *tam gdzie są dwa kleksy wstawiamy znak zapytania, a gdzie jeden porównujemy to, co widać.*

Z dwoma przykładami poradziło sobie 10,3% trzecioklasistów – w tej grupie o wstawianych znakach chyba w znacznej mierze decydował los:

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |

Byli również tacy uczniowie, którzy najprawdopodobniej nie zrozumieli polecenia zadania:

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| a) 7 48 | b) 3 11 | c) 2 5 |
| d) 33 6 | e) 2 5 | f) 8 99 |

ale było ich niewielu (por. diagram 9.).

Wróćmy do postawionego wcześniej pytania dotyczącego ogromnej rozpiętości wyników dwóch – na pozór – podobnych przykładów: b) 3 11 (35,3%) oraz f) 8 99 (78,2%).

Szukając odpowiedzi na to pytanie popatrzmy, jakie znaki i jak często wpisywali uczniowie w okienka w poszczególnych przykładach:

Tabela 5. Porównywanie liczb naturalnych – procentowy rozkład odpowiedzi uczniów

wpisany znak	a) 7 \blacklozenge \square 48	b) \blacklozenge 3 \square 11	c) 2 \blacklozenge \square \blacklozenge 5	d) 33 \square \blacklozenge 6	e) \blacklozenge 2 \square 5 \blacklozenge	f) \blacklozenge 8 \square 99
brak	5,2	5,4	6,8	5,5	7,2	4,7
<	32,0	37,1	37,9	16,6	42,5	78,2
?	8,4	22,2	48,3	39,5	44,3	14,2
>	54,5	35,3	7,0	38,4	5,9	2,9

W przykładzie a) 32,0% trzecioklasistów wpisało znak „<”. W przykładzie b) ten sam znak wstawiło 37,1% uczniów (czyli więcej niż poprawny znak „>”), a w przykładzie c) 37,9%.

Co łączy te trzy przykłady? W szczególności to (por. wcześniej), że gdybyśmy ograniczyli się do porównania **tylko widocznych części liczb**, to w każdym z nich w okienko byśmy wpisali znak „<”.

W podpunkcie d) 38,4% trzecioklasistów wpisało znak „>” – znowu trzydzieści kilka procent. Przyjrzyjmy się kolejnemu przykładowi: w e) 42,3% dzieci wstawiło znak „<”. Być może część z nich podstawiła jakieś cyfry w miejsce kleksów i stąd taki a nie inny znak, ale inne wytłumaczenie wydaje się znacznie bardziej prawdopodobne – jeśli spojrzeć na te części liczb, które „widać” i zapomni o cyfrach pod kleksami, to jedynym pasującym znakiem jest właśnie znak mniejszości: $2 < 5$. Przykład f) to jedyny przypadek, w którym porównanie obu liczb oraz porównanie ich widocznych części daje ten sam efekt: lewa strona w obu wypadkach jest mniejsza od prawej. I należy sądzić, że to jest podstawowy, a może i jedyny powód, dla którego jego wynik „szybuje” tak wysoko.

Na koniec dokonajmy prostej „matematyzacji”: przykład f) zrobiło poprawnie 78,2% uczniów, a przykład b): 35,3%, czyli o 42,9% mniej. 42,9% to jest prawie dokładnie tyle trzecioklasistów, ilu w przykładzie e) wstawiło znak „<”, czyli najprawdopodobniej porównało widoczne kawałki liczb.

Na rozumieniu zapisu dziesiętnego liczb opiera się (a może raczej: powinna opierać się) cała szkolna arytmetyka: obliczenia wykonywane w pamięci, algorytmy działań pisemnych, posługiwanie się wyrażeniami dwumianowymi i ich zapisem dziesiętnym, wprowadzenie liczb dziesiętnych, operacje na nich, ... Nie ma chyba w nauczaniu początkowym ważniejszego – dla dalszego matematycznego rozwoju uczniów – zagadnienia. Prezentowane wyniki wskazują na to, że powinniśmy bardzo poważnie przemyśleć sposób, w jaki ze strukturą systemu dziesiętnego zapoznajemy dzieci w klasach 1-3 – zdecydowanie częściej powinniśmy sięgać po modele, rzadziej po symbole⁵⁹.

⁵⁹ Por. Dąbrowski M. (2008).

Podsumowanie

Wykonywanie obliczeń, w powszechnej opinii, to obszar nudny i mało emocjonujący. Tymczasem, jak widać z przytoczonych wcześniej przykładów, jest on pełen „szkolnego życia” – co więcej pełnego uczniowskiej przewrotności. Dzieci przejawiają inicjatywę tam, gdzie nikt z dorosłych, w tym też ich nauczyciel, by tego nie oczekiwał, natomiast zachowują absolutną obojętność w wielu obszarach uważanych przed szkołą (czyli nas dorosłych) za ważne.

Uczniowie tworzą swoje własne strategie nawet przy okazji poznawania procedur tak sztywnych i skostniałych, jak algorytmy działań pisemnych czy wykonywanie obliczeń złożonych. Podobnie, jak miało to miejsce dla zadań tekstowych strategie te zazwyczaj pojawiają się tam, gdzie uczniowie przestają rozumieć, czego się od nich oczekuje, a ich podstawowym celem jest ukrycie przed nauczycielem tego faktu.

Budując je, dzieci najczęściej ograniczają się do różnych form manipulacji symbolami, co jest, moim zdaniem, bardziej pochodną nadużywania języka symbolicznego przez cały okres nauczania początkowego, poczynając od klasy pierwszej, niż jego obiektywnej złożoności.

Uczeń samodzielnie stara się powtórzyć proces, w którym uczestniczy podczas zajęć – żongluje symbolami w oderwaniu od ich faktycznego sensu, także dlatego, że wie, że takie są oczekiwania dorosłych. Przy tej okazji jednak uczniowie demonstrują pomysłowość i oryginalność, która powinna nas wiele nauczyć nie tylko o ich potencjalnych możliwościach, ale także o samym procesie ich matematycznego kształcenia.

Wielu trzecioklasistów – szacunkowo ok. 50% – prawdopodobnie nie rozumie języka symbolicznego, nawet w tak oczywistym, na pozór, obszarze, jak zapisywanie i porównywanie liczb dwucyfrowych.

Może to w istotny sposób wpływać na rozumienie własności wykonywanych działań, czy raczej jego brak, co widać nie tylko w kontekście dzielenia, ale również pozostałych operacji arytmetycznych. Jednym z obszarów, gdzie to wyraźnie daje się zauważyć, jest rozumienie i stosowanie rozdzielności mnożenia względem dodawania czy odejmowania. To zagadnienie, tradycyjnie uważane za ważny element arytmetycznej wiedzy ucznia, w zasadzie nie istnieje w świadomości trzecioklasistów, co nie przeszkadza im np. dość swobodnie mnożyć liczb dwucyfrowych przez jednocyfrowe⁶⁰.

⁶⁰ Może pora poważnie zastanowić się nad tym, czy nasze „dorosłe” oczekiwania, są także ważne z punktu widzenia potrzeb i możliwości uczącego się dziecka.

Badania dobitnie pokazują, że w nauczaniu matematyki w naszej szkole funkcjonuje, społecznie akceptowana, dominacja narzędzi – nie tyle rozwijamy umiejętność wykonywania obliczeń, co sprawność (odruch) robienia tego w konkretny sposób, z pomocą narzędzia uznawanego przez dorosłych za najlepiej nadające się do tego celu. Owocuje to u znacznej części dzieci brakiem wiary we własne siły i wyuczoną bezradnością. Innym efektem tej, długoletniej już, tradycji jest powszechny wśród trzecioklasistów zwyczaj starannego ukrywania przed oczyma nauczyciela rzeczywistego toku rozumowania.

W szkolnej matematyce proces samodzielnego dochodzenia do wyniku „schodzi do podziemia”, co dodatkowo sprzyja upowszechnianiu się różnych uczniowskich strategii radzenia sobie z trudnościami, często strategii błędnych. Dziecięca pomysłowość, która powinna być ważnym elementem wspierającym proces kształcenia staje się zmarnowanym potencjałem, bo w szkole jest traktowana jako „nielegalna”.

I.3. MIARY – W SZKOLE I POZA NIĄ

Wbrew obiegowym opiniom wcale nie operacje arytmetyczne są tym fragmentem matematyki szkolnej, z którym spotykamy się najczęściej w życiu codziennym. Częściej niż z dodawania czy mnożenia korzystamy z różnych miar: masy, długości, pojemności, powierzchni, czasu ... To miary, czy to jako wyrażenia jedno- i dwumianowane, czy też współcześnie raczej w ich zapisie dziesiętnym, napotykamy na każdym kroku: wchodząc na wagę, robiąc zakupy, zerkając na zegarek, ... A jeśli do tej listy dorzucimy jeszcze ceny i operacje pieniężne, to mamy prawie kompletną listę podstawowych zagadnień wykorzystywanych w koncepcji realistycznego nauczania matematyki⁶¹.

W badaniach w roku 2010⁶² wykorzystano szereg zadań dotyczących właśnie m.in. praktycznych aspektów matematyki. Ich celem było określenie poziomu umiejętności trzecioklasistów w zakresie:

- wykonywania obliczeń pieniężnych,
- wykonywania obliczeń dotyczących czasu,
- wykonywania obliczeń dotyczących temperatury,
- wykonywania obliczeń dotyczących pojemności (objętości) z użyciem prostych ułamków zwykłych.

⁶¹ Por. np. Gravemeijer K. (1994).

⁶² Dąbrowski M. (2011b).

W zadaniach tych rozwiązanie było zaliczane, jeśli uczeń podał poprawny wynik końcowy.

W roku 2008⁶³ zbadano, jak uczniowie radzą sobie z obliczaniem w różnych sytuacjach obwodu prostokąta. Dwoma z wykorzystanych wówczas zadań posłużono się także w badaniach OBUT 2011⁶⁴.

Zobaczymy zatem, jak z tym obszarem zagadnień radzą sobie nasi trzecioklasiści.

Wykonywanie obliczeń pieniężnych

Umiejętność wykonywania obliczeń pieniężnych badana była m.in. za pomocą czterech zadań tekstowych o praktycznym charakterze⁶⁵:

- A** Janek kupił baton za 1 zł 20 gr oraz cukierki za 3 zł 40 gr. Ile otrzymał reszty z 10 zł?
- B** Janek kupił czekoladę za 2,40 zł oraz cukierki za 2,20 zł. Ile otrzymał reszty z 10 zł?
- C** Kilogram jabłek kosztuje 2 zł 60 gr, a kilogram winogron 6 zł 40 gr. Olek kupił 2 kg jabłek i pół kilograma winogron. Ile zapłacił?
- D** Kilogram jabłek kosztuje 2,80 zł, a kilogram winogron 6,20 zł. Dorota kupiła 2 kg jabłek i pół kilograma winogron. Ile zapłaciła?

Zadania **A** i **B** różnią się jedynie formą prezentacji danych – w pierwszym ceny podane są w notacji dwumianowanej, w drugim – w dziesiętnej. Kontekst obu zadań jest identyczny, a sposób doboru danych w pełni analogiczny. Ten sam zabieg zastosowano w przypadku zadań **C** i **D** – różni je jedynie sposób prezentacji cen. Każdy trzecioklasista biorący udział w badaniach rozwiązywał jedno z tych czterech zadań.

W realizowanych równocześnie badaniach ankietowych⁶⁶ zapytano nauczycieli – wychowawców testowanych trzecioklasistów, jaki zapis wykorzystywali w swoich klasach przy obliczeniach pieniężnych. Prawie wszyscy, bo 96,9%, zadeklarowali, że stosowali na zajęciach zapis dwumianowany, jedynie 17,0% używało także zapisu dziesiętnego. 76,4% nauczycieli pokazywało dzieciom, jak się dodaje wyrażenia dwumianowane w tabelce, a 71,2% – jak się je dodaje pisemnie. Tylko 10,8% nauczycieli podczas zajęć dodawało pisemnie wyrażenia zapisane dziesiętnie.

⁶³ Dąbrowski M. (2009b).

⁶⁴ Dąbrowski M., Wiatrak E. (2011).

⁶⁵ Dąbrowski M. (2011b).

⁶⁶ Wiatrak E. (2011).

Mamy więc, w przypadku tych zadań, okazję do konfrontacji tego, czego uczy szkoła – jest to jedyne(!) współcześnie miejsce, gdzie spotyka się ceny zapisane w notacji dwumianowanej, z tym, czego dzieci samodzielnie uczą się na co dzień poza nią.

Najłatwiejsze okazało się zadanie **B** – poprawną odpowiedź podało 55,2% uczniów (por. diagram 1.), najtrudniejsze zaś zadanie **D** – 50,9% dobrych rozwiązań. Oba te zadania operują zapisem dziesiętnym cen. Różnica obu tych wyników to zaledwie 4,3%, zatem poziom rozwiązań dla wszystkich czterech zadań jest bardzo wyrównany.

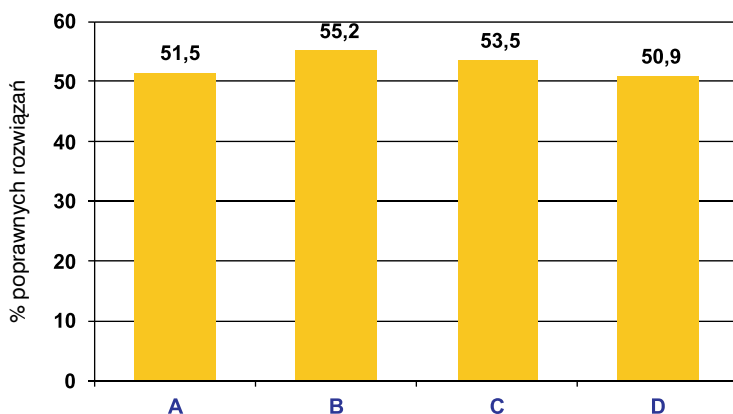


Diagram 1. Wykonywanie obliczeń pieniężnych w sytuacjach praktycznych – procent poprawnych rozwiązań dla poszczególnych zadań.

Okazuje się zatem, że w przypadku tych – realistycznych z punktu widzenia dzieci – zadań sposób notacji zastosowany w treści zadania nie ma żadnego wpływu na łatwość samego zadania.

Podczas zajęć szkolnych dzieci operują, wedle deklaracji nauczycieli, prawie wyłącznie zapisem dwumianowanym, w życiu codziennym spotykają przede wszystkim zapis dziesiętny – oba te oddziaływania w tym przypadku równoważą się.

Ponad 80% uczniów wiedziało, jakie operacje i w jakiej kolejności należy wykonać dla zadań **A** i **B**, aby otrzymać odpowiedź na postawione w nich pytanie. Końcowy poziom poprawnych rozwiązań był efektem dużej liczby błędów rachunkowych, m.in. dotyczących odejmowania – zrobiło je 31,6% dzieci dla pierwszego z tych zadań oraz 27,2% dla drugiego.

W zadaniach **C** i **D** poziom błędów rachunkowych był wyraźnie niższy (odpowiednio 9,1% oraz 13,7%), natomiast uczniowie mieli zdecydowanie większe kłopoty z samą metodą rozwiązania zadania, na co mogło mieć wpływ m.in. użycie w treści zadania słowa *połowa* (por. dalej).

Spójrzmy na przykładowe uczniowskie rozwiązania dwóch początkowych zadań:

Jacek kupił baton za 1 zł 20 gr oraz cukierki za 3 zł 40 gr. Ile otrzymał reszty z 10 zł?

$$10\text{zł} - 4\text{zł} 60\text{gr} = 5\text{zł} 40\text{gr}$$

$$1,20 + 3,40 = 4,60$$

Odpowiedź: Otrzymał reszty 5zł 40gr.

Jacek kupił czekoladę za 2,40 zł oraz cukierki za 2,20 zł. Ile otrzymał reszty z 10 zł?

$$10\text{zł} - 2,40\text{zł} - 2,20\text{zł} = 5\text{zł} 40\text{gr}$$

Odpowiedź: Otrzymał reszty 5zł 40gr.

Jak widać, uczniowie swobodnie łączą obie podstawowe formy zapisu danych, niezależnie od tego, w jakiej postaci podano informacje w treści. Niekiedy, choć niezbyt często, korzystają z pisemnego dodawania i odejmowania cen:

Jacek kupił baton za 1 zł 20 gr oraz cukierki za 3 zł 40 gr. Ile otrzymał reszty z 10 zł?

$\begin{array}{r} 1\text{zł } 20\text{gr} \\ + 3\text{zł } 40\text{gr} \\ \hline 4\text{zł } 60\text{gr} \end{array}$	$\begin{array}{r} 10\text{zł } 00\text{gr} \\ - 4\text{zł } 60\text{gr} \\ \hline 5\text{zł } 40\text{gr} \end{array}$
---	--

Odpowiedź: Otrzymał 5zł 40gr reszty.

Jacek kupił czekoladę za 2,40 zł oraz cukierki za 2,20 zł. Ile otrzymał reszty z 10 zł?

Odpowiedź: Jacek otrzymał reszty 5,40 zł

Czasami sięgają także po inne notacje, obecne w szkole lub w ich codziennym życiu, zwłaszcza rozwiązując zadanie B:

Jacek kupił czekoladę za 2,40 zł oraz cukierki za 2,20 zł. Ile otrzymał reszty z 10 zł?

Odpowiedź: Jacek otrzymał 5,40 zł reszty

Odpowiedź: otrzymał 5,40 zł

Odpowiedź: z 10 zł otrzymał 5 zł 40 gr reszty.

Otrzymał 5 zł 40 gr reszty

Niektóre rozwiązania zaskakują swoją oryginalnością i prostotą.

Np., żeby odpowiedzieć na pytanie postawione w zadaniu, wystarczy kolejno odjąć „po kawałku” wydatki Jacka.

Jack kupił czekoladę za 2,40 zł oraz cukierki za 5,20 zł. Ile otrzymał reszty z 10 zł?

$$\begin{array}{r} 10 \text{ zł} \\ - 2 \text{ zł } 40 \text{ gr} \\ \hline 7 \text{ zł } 60 \text{ gr} \\ - 5 \text{ zł } 20 \text{ gr} \\ \hline 2 \text{ zł } 40 \text{ gr} \end{array}$$

Odpowiedź: Otrzymał 2 zł i 40 gr reszty

Z podobną swobodą uczniowie operowali danymi z obu pozostałych zadań:

Kilogram jabłek kosztuje 2 zł 60 gr, a kilogram winogron 6 zł 40 gr. Olek kupił 2 kg jabłek i pół kilograma winogron. Ile zapłaci?

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 2 \text{ zł } 60 \text{ gr} = 5 \text{ zł } 20 \text{ gr} \quad 6 \text{ zł } 40 \text{ gr} : 2 = 3 \text{ zł } 20 \text{ gr} \\ 5 \text{ zł } 20 \text{ gr} + 3 \text{ zł } 20 \text{ gr} = 8 \text{ zł } 40 \text{ gr} \end{array}$$

Odpowiedź: Zapłacił 8 zł i 40 gr.

$$\begin{array}{l} 6,40 \text{ zł} : 2 = 3,20 \text{ zł} \quad 2 \text{ zł } 60 \text{ gr} \cdot 2 = 5,20 \text{ zł} \\ 3,20 \text{ zł} + 5,20 \text{ zł} = 8,40 \text{ zł} \end{array}$$

Odpowiedź: Zapłacił 8 zł i 40 gr.

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 2 = 4 \text{ zł} \quad 5 \text{ zł } 20 \text{ gr} + 3 \text{ zł } 20 \text{ gr} = 8 \text{ zł } 40 \text{ gr} \\ 60 : 2 = 30 \text{ gr} \end{array}$$

$2 \cdot 2 = 4 \text{ zł}$ $60 \text{ gr} : 2 = 30 \text{ gr}$ $5 \text{ zł } 20 \text{ gr} + 3 \text{ zł } 20 \text{ gr} = 8 \text{ zł } 40 \text{ gr}$	Jabłka	Winogrona
$2 \cdot 2 = 4 \text{ zł}$ $60 \text{ gr} : 2 = 30 \text{ gr}$ $5 \text{ zł } 20 \text{ gr} + 3 \text{ zł } 20 \text{ gr} = 8 \text{ zł } 40 \text{ gr}$	Winogrona	$2 \cdot 2 = 4 \text{ zł}$ $60 \text{ gr} : 2 = 30 \text{ gr}$ $5 \text{ zł } 20 \text{ gr} + 3 \text{ zł } 20 \text{ gr} = 8 \text{ zł } 40 \text{ gr}$

Odpowiedź: Olek zapłacił 8 zł 40 gr.

Kilogram jabłek kosztuje 2,80 zł, a kilogram winogron 6,20 zł. Dorota kupiła 2 kg jabłek i pół kilograma winogron. Ile zapłaciła?

$$2,80 \text{ zł} \cdot 2 + 6,20 \text{ zł} : 2 = 5,60 \text{ zł} + 3,10 \text{ zł} = 8,70 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Zapłaciła 8,70 zł.

$$2,80 \text{ zł} = 280 \text{ gr}$$

$$2 \cdot 280 \text{ gr} = 560 \text{ gr}$$

$$\text{Jabłka: } 2 \cdot 280 \text{ gr} = 560 \text{ gr}$$

$$\text{Winogrona: } 620 \text{ gr} : 2 = 310 \text{ gr}$$

$$\text{Razem: } 560 \text{ gr} + 310 \text{ gr} = 870 \text{ gr}$$

Odpowiedź: Zapłaciła 8,70 zł.

Kilogram jabłek kosztuje 2,80 zł, a kilogram winogron 6,20 zł. Dorota kupiła 2 kg jabłek i pół kilograma winogron. Ile zapłaciła?

$$2 \cdot 2 \text{ zł } 80 \text{ gr} = 5 \text{ zł } 60 \text{ gr} \quad 6 \text{ zł } 20 \text{ gr} : 2 = 3 \text{ zł } 10 \text{ gr}$$

$$5 \text{ zł } 60 \text{ gr} + 3 \text{ zł } 10 \text{ gr} = 8 \text{ zł } 70 \text{ gr}$$

Odpowiedź: Zapłaciła 8 zł 70 gr.

$$2 \cdot 280 + 620 : 2 = 870$$

Odpowiedź: Zapłaciła 8 zł i 70 gr.

Widać, że dzieci radzą sobie z notacją dziesiętną, zwłaszcza w sytuacjach dla nich realistycznych, znacznie lepiej i skuteczniej niż spodziewa się tego szkoła.

Dodatkowo, umiejętność wykonywania obliczeń pieniężnych badana była za pomocą serii typowych „słupków”:

Oblicz:

- a) 3 zł 57 gr + 4 zł 26 gr b) 24 zł 44 gr + 70 gr c) 6 zł 35 gr – 2 zł 18 gr

Oblicz:

- a) 4,57 zł + 5,26 zł b) 16,64 zł + 0,70 zł c) 9,35 zł – 4,18 zł

Oblicz:

- a) 18 zł 71 gr + 5 zł 46 gr b) 12 zł 14 gr – 60 gr c) 8 zł 45 gr – 3 zł 82 gr

Oblicz:

- a) 16,71 zł + 5,46 zł b) 13,14 zł – 0,60 zł c) 7,45 zł – 3,82 zł

Przykłady są dobrane zgodnie z tym samym kluczem, który zastosowano do zadań tekstowych – działania stanowią pary różniące się jedynie użytą notacją. Każdy uczeń wykonywał jeden z tych czterech zestawów działań.

Popatrzmy, jak trzecioklasiści poradzili sobie z dodawaniem:

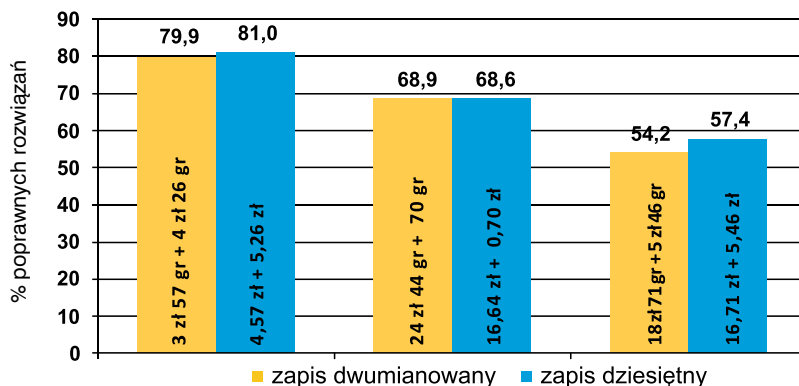


Diagram 2. Wykonywanie obliczeń pieniężnych: dodawanie – procent poprawnych obliczeń dla poszczególnych przykładów.

Jak widać, ponownie forma zapisu dodawanych wielkości nie miała żadnego wpływu na poziom poprawnych obliczeń – wyniki dla wszystkich par działań są porównywalne.

Nieco inna sytuacja pojawiła się dla odejmowania:

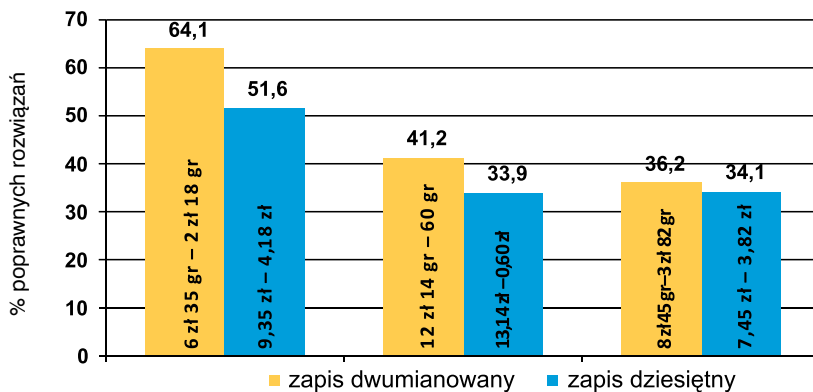


Diagram 3. Wykonywanie obliczeń pieniężnych: odejmowanie – procent poprawnych obliczeń dla poszczególnych przykładów.

Tym razem, dla obu prostszych par działań różnica w poziomie poprawnych obliczeń jest istotna statystycznie. Być może to efekt z jednej strony preferowania przez szkołę zapisu dwumianowanego i obliczeń wykorzystujących ten zapis, a z drugiej rzadkich codziennych okazji do doskonalenia odejmowania – często, także w kontekście wydawania reszty odejmowanie zastępujemy dodawaniem (dopełnianiem).

Zwraca uwagę ogólnie niski poziom wyników dla odejmowania. Warto w tym momencie przypomnieć sobie zadania **A** i **B** (por. wcześniej), w których uczniowie mieli do obliczenia różnicę $10 \text{ zł} - 4 \text{ zł } 60 \text{ gr}$ czy $10 \text{ zł} - 4,60 \text{ zł}$ oraz porównać poziom rozwiązań tych zadań: odpowiednio 51,5% oraz 55,2% z powyższymi wynikami. Trudność odejmowania z zadań tekstowych jest bliższa raczej trzeciej parze działań, tej najtrudniejszej, niż pierwszej. Skąd więc ta spora, bo licząca ponad 10%, rozpiętość wyników? Wróć jeszcze do tego pytania.

Wykonując obliczenia trzecioklasiści najchętniej sięgali po algorytmy dodawania i odejmowania pisemnego – w przypadku zadań tekstowych zdarzało się to znacznie rzadziej:

Oblicz:

a) $3 \text{ zł } 57 \text{ gr} + 4 \text{ zł } 26 \text{ gr}$

b) $24 \text{ zł } 44 \text{ gr} + 70 \text{ gr}$

c) $6 \text{ zł } 35 \text{ gr} - 2 \text{ zł } 18 \text{ gr}$

Oblicz.

a) $4,57 \text{ zł} + 5,26 \text{ zł}$

b) $16,64 \text{ zł} + 0,70 \text{ zł}$

c) $9,35 \text{ zł} - 4,18 \text{ zł}$

Często, zamiast odejmować podane wielkości, uczniowie je dodawali:

Oblicz.

a) $16,71 \text{ zł} + 5,46 \text{ zł}$

b) $13,14 \text{ zł} - 0,60 \text{ zł}$

c) $7,45 \text{ zł} - 3,82 \text{ zł}$

a) $16,71 \text{ zł} + 5,46 \text{ zł}$

b) $13,14 \text{ zł} - 0,60 \text{ zł}$

c) $7,45 \text{ zł} - 3,82 \text{ zł}$

$16,71 \text{ zł} + 5,46 \text{ zł} = 22,17 \text{ zł}$	26,	na brodnio $16,71 \text{ zł}$ $+ 5,46 \text{ zł}$ $\hline 22,17 \text{ zł}$ \times $7,45 \text{ zł}$ $- 3,82 \text{ zł}$ $\hline 3,63 \text{ zł}$
$13,14 \text{ zł} - 0,60 \text{ zł} = 12,54 \text{ zł}$		
$7,45 \text{ zł} - 3,82 \text{ zł} = 3,63 \text{ zł}$		

W serii przykładów z dwoma dodawaniami i jednym odejmowaniem postąpiło tak 10,1% trzecioklasistów dla zapisu dwumianowanego oraz aż 22,7% dla zapisu dziesiętnego. W drugiej serii zjawisko to wystąpiło przede wszystkim dla zapisu dziesiętnego – przy pierwszym odejmowaniu zrobiło tak 18,9% uczniów, a przy drugim 13,7%. Może uczniowie są przyzwyczajeni do tego, że jak się robi „słupki”, to dotyczą one tego samego działania, choć wydaje mi się, że dla części z nich mogła to być świadoma strategia zamiany trudniejszego i mniej „oswojonego” obliczenia na łatwiejsze – lepiej zrobić coś innego niż nie zrobić wcale.

Zarówno przy dodawaniu, jak i odejmowaniu, uczniowie często ograniczali się do podania samego wyniku – tak, jakby wszystkie obliczenia wykonywali w pamięci:

a) $4,57 \text{ zł} + 5,26 \text{ zł}$

b) $16,64 \text{ zł} + 0,70 \text{ zł}$

c) $9,35 \text{ zł} - 4,18 \text{ zł}$

$4,57 \text{ zł} + 5,26 \text{ zł} = 9,83 \text{ zł}$
$16,64 \text{ zł} + 0,70 \text{ zł} = 17,34 \text{ zł}$
$9,35 \text{ zł} - 4,18 \text{ zł} = 5,17 \text{ zł}$

a) $18 \text{ zł } 71 \text{ gr} + 5 \text{ zł } 46 \text{ gr}$

b) $12 \text{ zł } 14 \text{ gr} - 60 \text{ gr}$

c) $8 \text{ zł } 45 \text{ gr} - 3 \text{ zł } 82 \text{ gr}$

$23 \text{ zł } 17 \text{ gr}$	$11 \text{ zł } 54 \text{ gr}$	$4 \text{ zł } 63 \text{ gr}$
--------------------------------	--------------------------------	-------------------------------

Im działanie było trudniejsze, tym częściej się to zdarzało, np. w najtrudniejszym dodawaniu w obu wersjach zapisu ponad 20% poprawnych odpowiedzi pojawiło się „znikąd”. Sygnalizowałem już wcześniej to zjawisko przy okazji obliczeń na liczbach naturalnych – **jeśli uczeń nawet napisał z boku jakieś obliczenie, to najczęściej je następnie starannie starł albo zamazał**, sytuacje takie jak na jednym z rozwiązań powyżej należały do rzadkości.

Jak widać, także i w kontekście obliczeń pieniężnych uczniowie boją się ujawniać swój sposób postępowania – może to obawa przed tym, że będzie on inny niż ten oczekiwany przez dorosłych.

Wykonywanie obliczeń dotyczących czasu

Także w przypadku obliczeń dotyczących czasu sięgnięto w badaniach⁶⁷ po praktyczne zadania tekstowe, tworzące dwie dopełniające się pary:

- A Maciek wyszedł pograć w piłkę o 14:35. Wrócił po 45 minutach. Która wtedy była godzina?
- B Maciek zaczął odrabiać lekcje o 14:25, a skończył o 15:17. Ile czasu mu to zajęło?
- C Olga poszła spać o 21:40 i spała 10 godzin 20 minut. O której się obudziła?
- D Olga poszła spać o 20:40, a wstała o 7:00. Ile czasu spała?

Obie pary utworzone są w analogiczny sposób – opisują tę samą sytuację, ale przy innych podanych informacjach. W zadaniu **A** znamy moment rozpoczęcia pewnej czynności i jej czas trwania, interesuje nas, kiedy się zakończyła. Natomiast w zadaniu **B** wiemy, kiedy czynność się rozpoczęła i kiedy zakończyła, szukamy odpowiedzi na pytanie, jak długo trwała. Wedle tej samej zasady, choć w odniesieniu do obiektywnie trudniejszej sytuacji, zbudowane są zadania **C** i **D**.

Co ciekawe, oba zadania z każdej pary dają się rozwiązać dzięki dokładnie takiemu samemu rozumowaniu, ale nie znalazło to swojego odbicia w rzeczywistych wynikach trzecioklasistów:

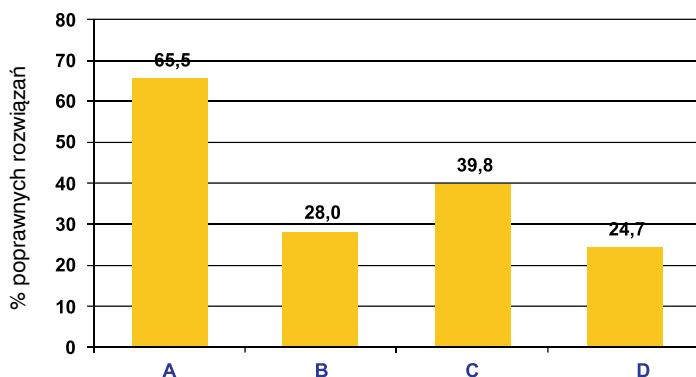


Diagram 4. Wykonywanie obliczeń dotyczących czasu w sytuacjach praktycznych – procent poprawnych rozwiązań dla poszczególnych zadań.

⁶⁷ Dąbrowski M. (2011b).

Zdecydowanie najłatwiejsze okazało się zadanie **A**, z którym poradziło sobie 65,5% uczniów. Z drugiej strony, oznacza to jednak, że mniej więcej co trzeci badany nie potrafił wykonać stosunkowo prostego obliczenia ulokowanego w znanej mu i bliskiej codziennej sytuacji. Bliskie mu kontekstowo zadanie **B** rozwiązało poprawnie zaledwie 28,0%, czyli aż o 37,5% mniej. Zatem, nie poradziło sobie z tym zadaniem prawie $\frac{3}{4}$ trzecioklasistów.

Jak wspominałem, oba te zadania dają się rozwiązać w identyczny sposób, np. dzięki dopełnieniu do pełnej godziny, czyli:

A: dodać 25 minut, to 15:00 i jeszcze 20 minut, czyli 15:20;

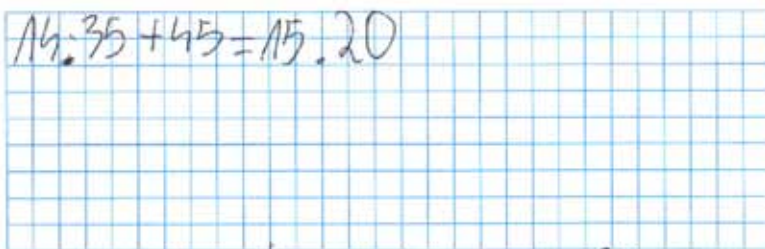
B: dodać 35 minut, to 15:00, i jeszcze 17 minut, czyli 15:17.

Wyniki drugiej pary zadań były bardziej wyrównane: odpowiednio 39,8% oraz 24,7% sukcesów. Także i tu łatwiejsze okazało się to zadanie, w którym szukany był moment zakończenia pewnej czynności.

Przyjrzyjmy się przykładowym rozwiązaniom.

W zadaniu **A** najbardziej typowe rozwiązanie: 53,2% uczniów polegało na zapisaniu działania $14:35 + 45 = 15:20$ i podaniu poprawnej odpowiedzi, na ogół bez wskazówki, jak wynik został znaleziony:

Maciek wyszedł pograć w piłkę o 14:35. Wrócił po 45 minutach. Która wtedy była godzina?



A handwritten solution on a blue grid background. The equation $14:35 + 45 = 15:20$ is written in black ink.

Odpowiedź: Była wtedy godzina 15:20



A handwritten solution on a blue grid background. The equation $15 \text{ godz } 25 \text{ min} + 45 \text{ min} = 15 \text{ godz } 20 \text{ min}$ is written in black ink.

Odpowiedź: Maciek wrócił o godzinie 15:20

Tylko z rzadka uczeń ujawniał sposób otrzymania wyniku tego działania:

Maciek wyszedł pograć w piłkę o 14:35. Wrócił po 45 minutach. Która wtedy była godzina?

godz.	min
14	35
+	45
15	20

$14 \text{ godz } 35 \text{ min} + 45 \text{ min} = 15 \text{ godz } 20 \text{ min}$

Odpowiedź: Była wtedy 15:20.

14:35	$\begin{array}{r} 14:35 \\ + 45 \\ \hline 15:00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 14:35 \\ + 45 \\ \hline 15:20 \end{array}$
------------------	--	--

Odpowiedź: Jak Maciek wrócił do domu była godzina 15:20.

Także w zadaniu C uczniowie najchętniej: 27,5% dodawali wielkości z treści, odwołując się przy tym do swojej wiedzy o dobie:

Olga poszła spać o 21:40 i spała 10 godzin 20 minut. O której się obudziła?

~~$21:40 + 10 \text{ godz } 20 \text{ min} = 21 \text{ godz } 40 \text{ min} + 10 \text{ godz } 20 \text{ min} = 32 \text{ godz}$~~

~~$\text{dobrze} = 2 \text{ godz } 32 \text{ godz} - 2 \text{ godz} = 8 \text{ godz}$~~

Odpowiedź: Obudziła się o 8:00.

~~$21:40 + 10 \text{ godzin i } 20 \text{ minut} = 8 \text{ rano:00}$~~

Odpowiedź: Obudziła się o 8:00.

21 godz	40 min
+ 10 godz	20 min
31 godz	0 min

~~$21 \text{ godz } 40 \text{ min} + 10 \text{ godz } 20 \text{ min} = 8 \text{ godz}$~~

Odpowiedź: Obudziła się o 8:00.

$$21 + 10 = 31 \quad 40 + 20 = 60$$

Odpowiedź: Olga obudziła się o 8:00

Najbardziej popularny błąd: 18,1% trzecioklasistów polegał na odjęciu tych liczb, zazwyczaj pisemnie:

Olga poszła spać o 21:40 i spała 10 godzin 20 minut. O której się obudziła?

$$21:40 \text{ godz} - 10 \text{ godz} - 20 \text{ min} = 11:20$$

Odpowiedź: Olga obudziła się o 7:20

$$\begin{array}{r} \text{godziny} \\ 21:40 \\ - 10:10 \\ \hline 11:30 \end{array}$$

Odpowiedź: Olga obudziła się o godz. 11:30

$$\begin{array}{r} 21:40 \\ - 10:20 \\ \hline 11:20 \end{array}$$

Odpowiedź: obudziła się o godzinie 11:20

Ten sam typ błędu dominował także w zadaniu D, przy czym zrobiło go aż 28,5% trzecioklasistów:

Natomiast najczęstsze poprawne rozwiązanie (7,9%) polegało na podaniu samej dobrej odpowiedzi, bez jakichkolwiek obliczeń.

Olga poszła spać o 20:40, a wstała o 7:00. Ile czasu spała?

$$\begin{aligned} 20:40 + x &= 7:00 \\ x &= 20:40 - 7:00 \\ x &= 13:40 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Olga spała 13:40 min.

Niektóre z rozwiązań tego, jak się okazało, bardzo trudnego dla trzecioklasistów zadania, zaskakiwały swoją prostotą i oryginalnością:

Olga poszła spać o 20:40, a wstała o 7:00. Ile czasu spała?

$$\begin{array}{r} 010 \\ 30.60 \\ - 20.40 \\ \hline 10.20 \end{array}$$

$$30.60 - 20.40 = 10.20$$

$$\text{Spr.: } 10.20 + 20.40 = 30.60 = 31.00$$

Odpowiedź: Olga spała 10 godzin 20 minut.

10 godz 20 min

Odpowiedź: Olga spała 10 godz 20 min.

W zadaniu B uczniowie najczęściej: 22,3% badanych odejmowali podane w treści wielkości:

Maciek zaczął odrabiać lekcje o 14:25, a skończył o 15:17. Ile czasu mu to zajęło?

$$15:17 - 14:25 = 52 \text{ min}$$

Odpowiedź: Maciekowi zajęło to 52 min.

$$15:17 - 14:25 = 52 \text{ min}$$

Odpowiedź: Odrabianie lekcji zajęło 52 minuty.

Czasami odejmowali te wielkości dziesiętne, znowu na ogół pisemnie, albo wykonywali odpowiednie dziesiętne dodawanie – i to było najbardziej popularne błędne rozwiązanie tego zadania:

Maciek zaczął odrabiać lekcje o 14:25, a skończył o 15:17. Ile czasu mu to zajęło?

$$\del{15:17} - 14:25 = 14:25 + 92 \text{ min} = 15:17$$

Odpowiedź: Zajęło mu to 92 min.....

$$15:17 - 14:25 = 0:92$$

$$\begin{array}{r} 15:17 \\ -14:25 \\ \hline 92 \end{array}$$

Odpowiedź: Zajęło mu to 92 minuty.....

$$\begin{array}{r} 15:17 \\ -14:25 \\ \hline 92 \end{array}$$

Odpowiedź: Zajęło mu to 92 min.....

Postąpiło w ten sposób 15,6% trzecioklasistów.

Bardzo rzadko uczniowie sięgali w tych zadaniach po najskuteczniejszą strategię wykonywania obliczeń czasowych – strategię dopełniania:

Maciek zaczął odrabiać lekcje o 14:25, a skończył o 15:17. Ile czasu mu to zajęło?

Od 14:25 do 15:17 mija 52 min
 Od 14:25 do 15:00 mija 35 min
 Od 15:00 do 15:17 mija 17 min
 $35 \text{ min} + 17 \text{ min} = 52 \text{ min}$

Odpowiedź: Zajęło mu to 52 minuty.

Maciek wyszedł pograć w piłkę o 14:35. Wrócił po 45 minutach. Która wtedy była godzina?

14:35 $\xrightarrow{25 \text{ min}}$ 15:00 $\xrightarrow{20 \text{ min}}$ 15:20

Odpowiedź: Wtedy była godzina 15:20.

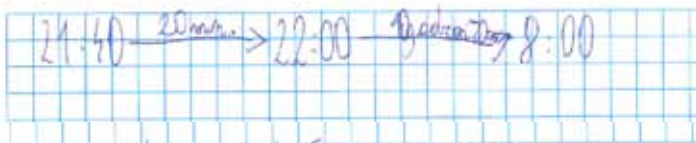
Olga poszła spać o 20:40, a wstała o 7:00. Ile czasu spała?

od 20:40 do 21:00 mija 20 min od 21:00 do 24:00 mija 3 godz
 od 24:00 do 7:00 mija 7 godz
 $20 \text{ min} + 3 \text{ godz} + 7 \text{ godz} = 10 \text{ godz } 20 \text{ min}$

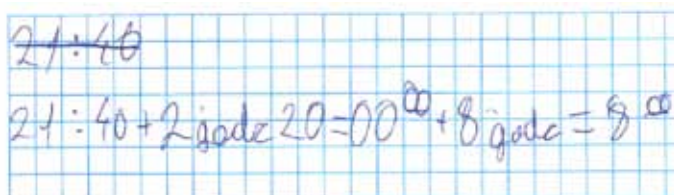
Odpowiedź: Spała 10 godzin 20 minut

od 20:40 do 24:00 = 3 godz 20 min
 od 24:00 do 7:00 = 7 godz
 $7 \text{ godz} + 3 \text{ godz } 20 \text{ min} = 10 \text{ godz } 20 \text{ min}$

Olga poszła spać o 21:40 i spała 10 godzin 20 minut. O której się obudziła?



Odpowiedź: Olga obudziła się o 8:00.



Odpowiedź: obudziła się o 8:00.

Odpowiednio: 1,5%, 2,1%, 3,1% oraz 5,9% dzieci zastosowało – w czytelny sposób – w swoim poprawnym rozwiązaniu procedurę dopełniania. Być może liczyli tak także inni trzecioklasiści, ale ich prace nie dają widocznych podstaw, aby to stwierdzić.

Ta prosta i skuteczna strategia postępowania jest wciąż obca naszej szkole.

Umiejętność wykonywania obliczeń dotyczących czasu była także badana za pomocą serii typowych obliczeń:

- Oblicz, ile czasu upłyne:
- A od 9:10 do 9:55
 - B od 7:46 do 11:00
 - C od 12:25 do 13:17
 - D od 20:40 do 7:00

Tylko z najprostszym przykładem uczniowie w większości poradzili sobie, ale pamiętajmy, że wymagał on wykonania operacji typu 55 – 10:

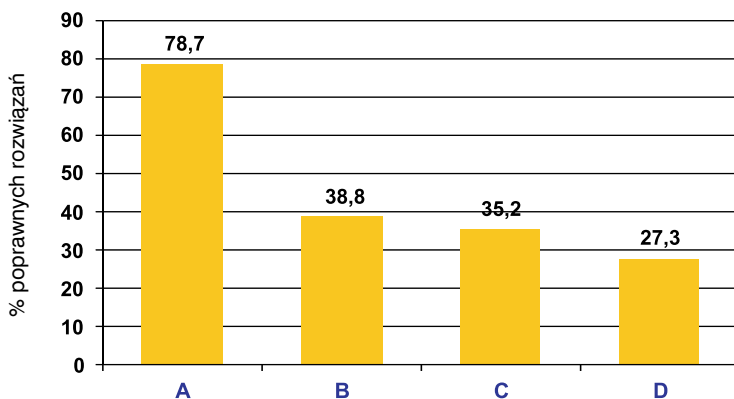


Diagram 5. Wykonywanie obliczeń dotyczących czasu – procent poprawnych obliczeń dla każdego działania.

Pozostałe trzy przykłady okazały się dla trzecioklasistów trudne – ich poziom wykonania waha się od 38,8% dla **B** do 27,3% dla **D**. Z deklaracji nauczycieli wynika⁶⁸, że 97,9% z nich ćwiczyło z dziećmi obliczenia czasowe i zamiany jednostek czasu.

Najczęściej, bo aż w 30,6% przypadków uczniowie wykonywali dobrze tylko jedno obliczenie:

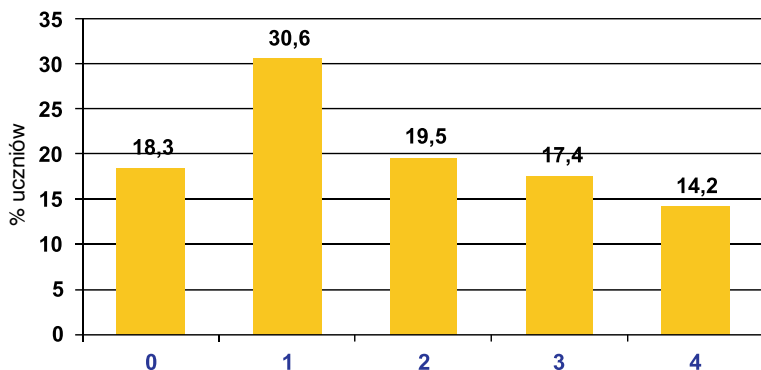


Diagram 6. Wykonywanie obliczeń dotyczących czasu – procentowy rozkład liczby poprawnie wykonanych przykładów przez uczniów.

Prawie co piąty trzecioklasista: 18,3% nie potrafił wykonać żadnego z tych obliczeń, a jedynie 14,2% poradziło sobie ze wszystkimi. Rozkład jest bliski rozkładowi normalnemu z przesunięciem w lewo.

Wykonując te obliczenia, uczniowie, jak zawsze, skutecznie ukrywali swoje metody postępowania, na ogół ograniczając się jedynie do zapisania końcowych wyników, najczęściej zresztą błędnych:

Oblicz, ile czasu upłynie:

od 9:10 do 9:55 45 minut
 od 7:46 do 11:00 3 godziny 14 minut.
 od 12:25 do 13:17 52 minut
 od 20:40 do 7:00 10 godzin 20 minut.

Oblicz, ile czasu upłynie:

od 9:10 do 9:55 Upłynęło 45 min.
 od 7:46 do 11:00 Upłynęło 3 godz. 14 min.
 od 12:25 do 13:17 Upłynęła 1 godz 42 min.
 od 20:40 do 7:00 Upłynęła 13 godz 40 min.

Oblicz, ile czasu upłynie:

od 9:10 do 9:55 35 min
 od 7:46 do 11:00 4 godz
 od 12:25 do 13:17 1 godz
 od 20:40 do 7:00 10 godz

⁶⁸ Wiatrak E. (2011).

Tylko bardzo nieliczni ujawnili stosowane strategie, w tym sporadycznie strategię dopełniania:

Oblicz, ile czasu uplynie:

od 9:10 do 9:55 $9:55 - 9:10 = 9:10 - 45 \text{ min} \rightarrow 9:55$
 od 7:46 do 11:00 $7:46 - 16 \text{ min} \rightarrow 8:00 - 3 \text{ godz} \rightarrow 11:00$
 od 12:25 do 13:17 $12:25 - 35 \text{ min} \rightarrow 13:00 - 17 \text{ min} \rightarrow 13:17$
 od 20:40 do 7:00 $20:40 - 20 \text{ min} \rightarrow 21:00 - 10 \text{ godz} \rightarrow 7:00$

Oblicz, ile czasu uplynie:

od 9:10 do 9:55 ~~9:55~~ 45 min
 od 7:46 do 11:00 ~~7:46 - 16 min - 10:10 - 11:00~~ 3 godz 14 min
 od 12:25 do 13:17 ~~12:25 - 35 min - 13:00 - 17 min - 13:17~~ 52 min
 od 20:40 do 7:00 ~~20:40 - 20 min - 21:00 - 10 godz - 7:00~~ 20:40 - 21:00 - 10 godz 7:00

Niektórzy uczniowie wykonywali swoje obliczenia lub ich część dziesiętnie – i była to najbardziej typowa, poza zwykłym błędem rachunkowym, kategoria błędnych rozwiązań:

Oblicz, ile czasu uplynie:

od 9:10 do 9:55 $9:55 - 9:10 = 45 \text{ minut}$
 od 7:46 do 11:00 $11:00 - 7:46 = 3:14 \text{ minut}$
 od 12:25 do 13:17 $13:17 - 12:25 = 1:32 \text{ minut}$
 od 20:40 do 7:00 $20:40 - 7:00 = 13:40 \text{ minut}$

$$\begin{array}{r} 271 \\ 187 \\ - 125 \\ \hline 92 \end{array}$$

Oblicz, ile czasu uplynie:

od 9:10 do 9:55 $9:45$
 od 7:46 do 11:00 $3:64$
 od 12:25 do 13:17 $00:92 \text{ min}$
 od 20:40 do 7:00 $29:40$

Bardzo często obliczenia wykonywane dziesiętnie pojawiały się wówczas, gdy uczeń sięgał po obliczenia pisemne – odruch przekraczania progów dziesiętnych był bardzo silny.

Warto zwrócić uwagę na jeszcze jedno zjawisko, które dużo mówi o stylu edukacyjnym naszej szkoły. Zadania tekstowe **B** (28,0% poprawnych rozwiązań) i **D** (24,7%) przy rozwiązaniu arytmetycznym wymagały wykonania dokładnie tych samych obliczeń, co podpunkty **C** (35,2% poprawnych wyników) i **D** (27,3%) z pierwszej serii zadań. Porównanie rezultatów pokazuje, że praktyczny kontekst nie ułatwia naszym trzecioklasistom odniesienia sukcesu, a może nawet nieco go utrudnia.

Część uczniów rozwiązywała najpierw zadanie tekstowe, a następnego dnia, przy okazji drugiego testu, wykonywała odpowiednie obliczenie czasowe. W tabeli 1. zestawiono ich wyniki dla obu rozwiązywanych zadań: tekstowego i odpowiedniego obliczenia.

Tabela 1. Wykonywanie obliczeń dotyczących czasu – zestawienie wyników procentowych zadań tekstowych oraz analogicznych obliczeń w badaniach 2010.

		Zadanie tekstowe B	
		0	1
Obliczenie C	0	87,1	12,9
	1	44,7	55,3

		Zadanie tekstowe D	
		0	1
Obliczenie D	0	86,4	13,6
	1	47,7	52,3

Tylko nieliczni spośród tych uczniów, którzy źle wykonali obliczenia poradziło sobie wcześniej z zadaniem tekstowym – ogromna ich większość: 87,1% dla obliczenia **C** oraz 86,4% dla obliczenia **D** odnotowała dwa niepowodzenia.

W przypadku tych trzecioklasistów, którzy wykonali obliczenie dobrze, można by oczekiwać – przez analogię do ich kolegów, którzy się pomylili – że poradzą sobie także z zadaniem tekstowym. Okazuje się, że jest jednak inaczej. Mniej więcej połowa sobie poradziła, ale reszta nie.

W przypadku pierwszej pary zadań 55,3% uczniów spośród tych, którzy wykonali poprawnie obliczenie **C** rozwiązało także dobrze zadanie tekstowe **B**. Natomiast reszta, czyli 44,7% z zadaniem sobie nie poradziła, choć wymagało dokładnie takiego samego obliczenia.

Jeszcze bardziej „wyrównana” sytuacja ma miejsce dla drugiej pary: 52,3% uczniów spośród tych, którzy zrobili dobrze obliczenie, rozwiązało także zadanie, a 47,7% z zadaniem sobie nie poradziło.

Można sądzić, że dla znacznej części trzecioklasistów te dwa zadania: obliczenie i zadanie tekstowe „pochodzą z dwóch różnych światów”, które z sobą się nie wiążą. A przecież obliczenia czasowe są potrzebne tylko z jednego powodu – żeby rozwiązywać takie właśnie zadania na co dzień.

Wykonywanie obliczeń dotyczących temperatury

Także zadania dotyczące temperatur tworzyły dwie pary złożone z analogicznych zadań, z których jedno uzupełnione było rysunkiem termometru⁶⁹:

- A** W Olsztynie był mroźny poranek. Termometr wskazywał temperaturę minus 6 stopni. W Warszawie było cieplej o 4 stopnie. Jaka temperatura była w Warszawie?
- B** W Olsztynie był mroźny poranek. Termometr wskazywał temperaturę minus 8 stopni. W Warszawie było cieplej o 2 stopnie. Jaka temperatura była w Warszawie?
- C** Janka opowiadała, że pierwszego dnia na zimowisku termometr wskazywał w południe 3 stopnie. W południe drugiego dnia było zimniej o 5 stopni. Jaka temperatura była na zimowisku drugiego dnia?
- D** Janka opowiadała, że pierwszego dnia na zimowisku termometr wskazywał w południe 3 stopnie. W południe drugiego dnia było zimniej o 5 stopni. Jaka temperatura była na zimowisku drugiego dnia?



W zadaniach **A** i **B** występują tylko temperatury ujemne, natomiast rozwiązanie zadań **C** i **D** wymaga „przekroczenia” zera. Dobór danych w obrębie każdej pary zadań gwarantuje pełną „arytmetyczną” ich porównywalność (w obrębie pary). Celem tych zadań było m.in. sprawdzenie, na ile trzecioklasiści potrafią posłużyć się rysunkiem termometru w swoim rozwiązaniu, czy będą w stanie wykorzystać go np. do symulacyjnego rozwiązania zadania. Tego typu rozumowanie nie powinno być im obce, gdyż aż 97,2% nauczycieli badanych klas zadeklarowało⁷⁰, że korzystali podczas zajęć z modeli termometrów, przy czym:

- 95,1% po to, aby odczytywać temperatury,
- 75,3% po to, aby zaznaczać temperatury,
- 59,0% po to, aby wykonywać obliczenia dotyczące temperatur.

W 70,4% klas przy okazji obliczeń związanych ze zmianami temperatur pojawiły się temperatury ujemne.

⁶⁹ Dąbrowski M. (2011b).

⁷⁰ Wiatrak E. (2011)

Wyniki zadań przedstawione są na diagramie 7:

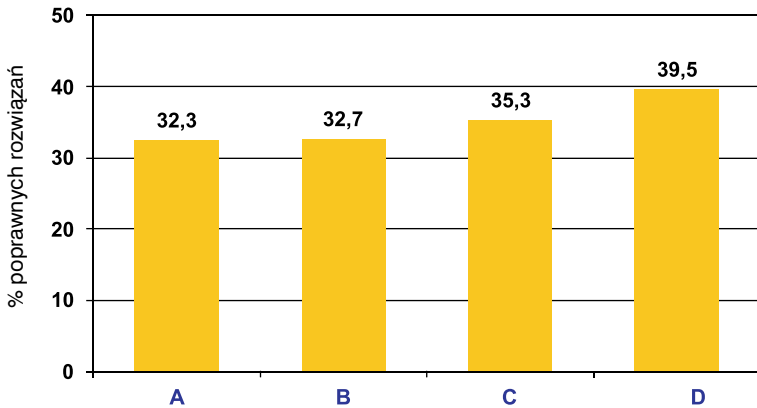


Diagram 7. Wykonywanie obliczeń dotyczących temperatury w sytuacjach praktycznych – procent poprawnych rozwiązań dla poszczególnych zadań.

Poziom rozwiązań zadań **A** i **B** jest w zasadzie identyczny: 32,3% i 32,7%, czyli tylko mniej więcej co trzeci uczeń potrafił rozwiązać swoje zadanie z tej pary. Dołączenie rysunku termometru w pierwszym z tych zadań nie miało, jak widać, żadnego wpływu na poziom wyników.

Zadania **C** i **D** okazały się nieco łatwiejsze – ich wyniki to odpowiednio 35,3% oraz 39,5%. W tym wypadku obecność rysunku utrudniła uczniom rozwiązanie zadania.

Należy sądzić, że ogromna większość uczniów w ogóle nie uświadomiła sobie, że rysunek może w czymś pomóc, że można na nim np. narysować słupek rtęci. Potwierdzają to same rozwiązania.

Najbardziej typowy błąd w tych czterech zadaniach polegał na dodaniu liczb podanych w treści:

W Olsztynie był mroźny poranek.
Termometr wskazywał temperaturę minus 6 stopni.
W Warszawie było cieplej o 4 stopnie.
Jaka temperatura była w Warszawie?

$$6 + 4 = 10$$

Odpowiedź: 2) Warszawa była temperatura 10°C



W Olsztynie był mroźny poranek. Termometr wskazywał temperaturę minus 8 stopni.
W Warszawie było cieplej o 2 stopnie. Jaka temperatura była w Warszawie?



Odpowiedź: W Warszawie było 10 stopni.

Janka opowiadała, że pierwszego dnia na zimowisku termometr wskazywał w południe 3 stopnie.
W południe drugiego dnia było zimniej o 5 stopni.
Jaka temperatura była na zimowisku drugiego dnia?



Odpowiedź: Drugiego dnia temperatura była niższa o 5 stopni.

Janka opowiadała, że pierwszego dnia na zimowisku termometr wskazywał w południe 2 stopnie. W południe drugiego dnia było zimniej o 5 stopni.
Jaka temperatura była na zimowisku drugiego dnia?



Odpowiedź: Na zimowisku drugiego dnia temperatura wynosiła 7 stopni.

Dla kolejnych zadań postąpiło tak odpowiednio: 45,2%, 43,0%, 26,0% oraz 27,8% trzecioklasistów.

Warto też odnotować, że niektórzy uczniowie (4,4%, 6,1%, 9,0%, 7,6%) mnożyli te liczby:

W Olsztynie był mroźny poranek. Termometr wskazywał temperaturę minus 8 stopni.
W Warszawie było cieplej o 2 stopnie. Jaka temperatura była w Warszawie?



Odpowiedź: W Warszawie była temperatura 16 stopni.

Janka opowiadała, że pierwszego dnia na zimowisku termometr wskazywał w południe 3 stopnie.
W południe drugiego dnia było zimniej o 5 stopni.
Jaka temperatura była na zimowisku drugiego dnia?

$$3 - 5 = \cancel{8} \\ 15$$



Odpowiedź: Na zimowisku drugiego dnia było 15 stopni.

Janka opowiadała, że pierwszego dnia na zimowisku termometr wskazywał w południe 2 stopnie. W południe drugiego dnia było zimniej o 5 stopni.
Jaka temperatura była na zimowisku drugiego dnia?

$$2 - 5 = 10$$

Odpowiedź: Temperatura na zimowisku drugiego dnia wynosiła 10 stopni.

Zatem ujawniają się strategie dobrze znane z analizy rozwiązań zadań tekstowych (por. wcześniej).

W zadaniach **A** i **B** najpopularniejsze poprawne rozwiązanie obejmowało dobrą odpowiedź i sensowne działanie wykonywane na liczbach dodatnich:

W Olsztynie był mroźny poranek.
Termometr wskazywał temperaturę minus 6 stopni.
W Warszawie było cieplej o 4 stopnie.
Jaka temperatura była w Warszawie?

$$6 - 4 = 2$$



Odpowiedź: W Warszawie było minus 2 stopnie.

W Olsztynie był mroźny poranek. Termometr wskazywał temperaturę minus 8 stopni.
W Warszawie było cieplej o 2 stopnie. Jaka temperatura była w Warszawie?

$$8 - 2 = 6$$

Odpowiedź: W Warszawie było minus sześć stopni.

Swoje rozumowanie zapisało w ten sposób 23,4% uczniów dla zadania **A** oraz 26,8% dla zadania **B**.

Zdecydowanie rzadziej: odpowiednio 7,9% oraz 4,6% trzecioklasiści posługiwali się obliczeniem zawierającym liczby (temperatury) ujemne:

W Olsztynie był mroźny poranek.
Termometr wskazywał temperaturę minus 6 stopni.
W Warszawie było cieplej o 4 stopnie.
Jaka temperatura była w Warszawie?

$$-6 + 4 = -2$$



Odpowiedź: W Warszawie było -2 stopnie

W Olsztynie był mroźny poranek. Termometr wskazywał temperaturę minus 8 stopni.
W Warszawie było cieplej o 2 stopnie. Jaka temperatura była w Warszawie?

$$-8^{\circ}\text{C} + 2^{\circ}\text{C} = -6^{\circ}\text{C}$$

Odpowiedź: W Warszawie była temperatura -6°C .

Dla zadań **C** i **D** sytuacja była odwrotna: odpowiednio 30,5% oraz 32,5% trzecioklasistów zapisała działanie, w którym występują liczby ujemne:

Janka opowiadała, że pierwszego dnia na zimowisku termometr wskazywał w południe 2 stopnie. W południe drugiego dnia było zimniej o 5 stopni.
Jaka temperatura była na zimowisku drugiego dnia?

$$2 - 5 = -3^{\circ}\text{C}$$

Odpowiedź: Drugiego dnia temperatura na zimowisku osiągała -3°C .

Janka opowiadała, że pierwszego dnia na zimowisku termometr wskazywał w południe 3 stopnie.
 W południe drugiego dnia było zimniej o 5 stopni.
 Jaka temperatura była na zimowisku drugiego dnia?



$$3 - 5 = -2$$

Odpowiedź: Drugiego dnia na zimowisku było -2 stopnie

W tym przykładzie uczeń bardzo ładnie wyjaśnił pochodzenie wyniku, odwołując się do liczb przeciwnych o sumie zero:

Janka opowiadała, że pierwszego dnia na zimowisku termometr wskazywał w południe 2 stopnie. W południe drugiego dnia było zimniej o 5 stopni.
 Jaka temperatura była na zimowisku drugiego dnia?

$$2 - 2 - 3 = -3$$

Odpowiedź: Drugiego dnia na zimowisku temperatura wynosi -3°C.

A autor tego rozwiązania uległ odwróceniu „sprawdzania”, ujawniając przy okazji jego „obrzędowy”, a nie praktyczny charakter:

$$3 - 5 = -2^{\circ}$$

$$\text{np. } -2^{\circ} + 3^{\circ} = 5^{\circ}$$

Odpowiedź: Drugiego dnia było -2°C



Zdecydowanie mniej, bo jedynie 1,5% i 1,7% uczniów, szukało potwierdzenia dobrej odpowiedzi, wykonując jakieś obliczenie z dodatnim wynikiem, np.:

Janka opowiadała, że pierwszego dnia na zimowisku termometr wskazywał w południe 3 stopnie.
 W południe drugiego dnia było zimniej o 5 stopni.
 Jaka temperatura była na zimowisku drugiego dnia?

$$5 - 3 = 2$$

Odpowiedź: Drugiego dnia było na zimowisku 2°C

Jak widać, prawie co trzeci uczeń w kontekście temperatury swobodnie „odejmuje większą od mniejszej”, czyli wkracza w świat liczb ujemnych. **Potencjał trzecioklasistów w tym obszarze jest zdecydowanie większy, niż nasza szkoła przypuszcza.**

Pojedynczy uczniowie korzystali z rysunku – nie zawsze z dobrym skutkiem:

Janka opowiadała, że pierwszego dnia na zimowisku termometr wskazywał w południe 3 stopnie.
W południe drugiego dnia było zimniej o 5 stopni.
Jaka temperatura była na zimowisku drugiego dnia?



Odpowiedź: Drugiego dnia było 2°



W Olsztynie był mroźny poranek.
Termometr wskazywał temperaturę minus 6 stopni.
W Warszawie było cieplej o 4 stopnie.
Jaka temperatura była w Warszawie?



Odpowiedź: W Warszawie było 10°C



W Olsztynie był mroźny poranek.
Termometr wskazywał temperaturę minus 6 stopni.
W Warszawie było cieplej o 4 stopnie.
Jaka temperatura była w Warszawie?

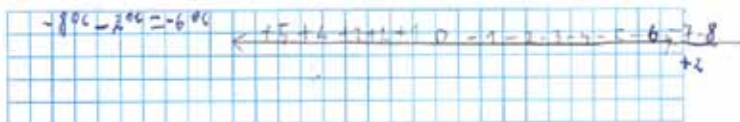


Odpowiedź: W Warszawie było -2°C .



Także zupełnie incydentalnie uczniowie próbowali rysować jakieś narzędzie w tych wersjach zadań, gdzie pomocniczego termometru nie było:

W Olsztynie był mroźny poranek. Termometr wskazywał temperaturę minus 8 stopni. W Warszawie było cieplej o 2 stopnie. Jaka temperatura była w Warszawie?



Odpowiedź: W Warszawie było -6°C .

W Olsztynie był mroźny poranek. Termometr wskazywał temperaturę minus 8 stopni. W Warszawie było cieplej o 2 stopnie. Jaka temperatura była w Warszawie?



Odpowiedź: W Warszawie było -6°C .



Należy sądzić, że zapisy podane w obu tych rozwiązaniach były próbą „uzasadnienia” odpowiedzi otrzymanej z pomocą rysunku. **Znowu daje znać o sobie stereotyp konieczności wykonania jakiegoś obliczenia w trakcie rozwiązywania zadania tekstowego.**

Wykonywanie obliczeń dotyczących pojemności z użyciem prostych ułamków zwykłych

Umiejętność operowania prostymi ułamkami zwykłymi w kontekście pojemności badano⁷¹ za pomocą następujących par zadań:

- A Mama postanowiła przelać trzy litry soku do identycznych butelek o pojemności pół litra. Ile butelek potrzebuje?
- B Mama postanowiła rozlać cztery litry soku do identycznych butelek o pojemności $\frac{1}{2}$ litra. Ile butelek potrzebuje?
- C Dwa litry soku wiano do identycznych butelek o pojemności ćwierć litra. Do ilu butelek wiano sok?
- D Trzy litry soku wiano do identycznych butelek o pojemności $\frac{1}{4}$ litra. Do ilu butelek wiano sok?

⁷¹ Dąbrowski M. (2011b).

W zadaniach **A** i **B** wykorzystywany jest ułamek $\frac{1}{2}$ – w pierwszym jest on zapisany wyrazem, w drugim za pomocą symbolu. Analogiczna sytuacja występuje w zadaniach **C** i **D**, w których używany jest – w dwóch formach zapisu – ułamek $\frac{1}{4}$. Pozostałe dane podawane w treści zadań zapisane są za pomocą wyrazów, a nie cyfr. Jak zawsze w tego typu sytuacji każdy badany uczeń rozwiązywał tylko jedno z tych zadań.

Celem zadań było m.in. sprawdzenie, na ile forma zapisu ułamków wpłynie na trudność zadań:

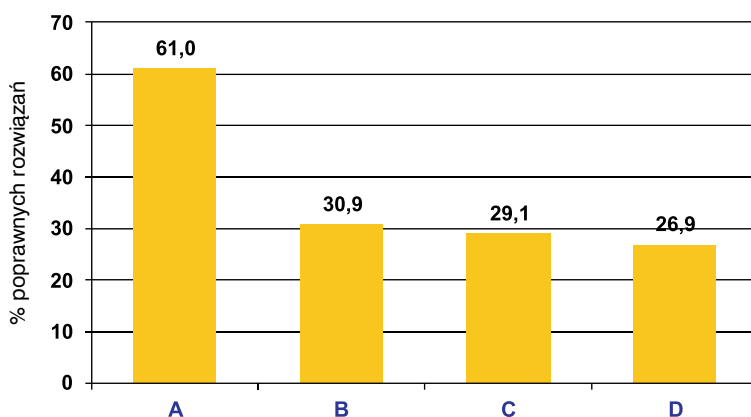


Diagram 8. Wykonywanie obliczeń dotyczących objętości z użyciem prostych ułamków zwykłych w sytuacjach praktycznych – procent poprawnych rozwiązań dla poszczególnych zadań.

Zadanie **A**, zgodnie zresztą z oczekiwaniami, okazało się dla trzecioklasistów najłatwiejsze: 61,0% poprawnych odpowiedzi. To jednak oznacza, że 39,0% uczniów, czyli ich prawie $\frac{1}{3}$, nie poradziła sobie z praktycznym zadaniem, które rozwiązuje się dosłownie na palcach.

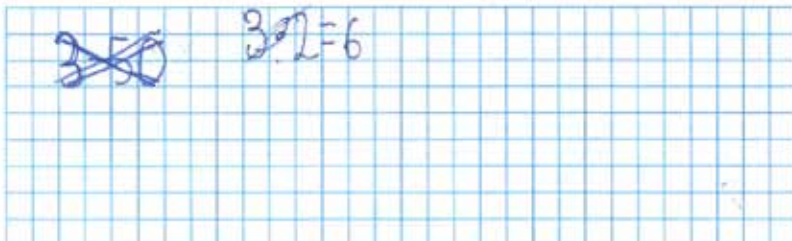
Zmiana sposobu prezentacji ułamka – z zapisu wyrazem na zapis symboliczny – przy zachowaniu w pełni analogicznej treści zadania, obniża ten wynik mniej więcej dwukrotnie – do 30,9%.

Dla zadań **C** i **D** poziom rozwiązań jest zbliżony – odpowiednio 29,1% i 26,9%. Ułamek $\frac{1}{4}$ okazał się trudny niezależnie od formy zapisu.

Wprowadzenie do treści zadania symbolicznego zapisu ułamka zwiększa frakcję opuszczeń o około 5% w stosunku do drugiego zadania z pary – wyniosła ona odpowiednio: 9,4% i 14,4% oraz 15,0% i 19,4%. **Wydaje się, że wciąż nie zdajemy sobie w pełni sprawy z tego, jak trudny dla dzieci jest język symboliczny.**

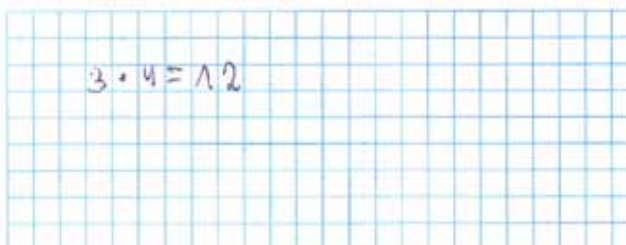
W poprawnych rozwiązaniach tych zadań najczęściej pojawiały się operacje na liczbach naturalnych, „eliminujące” potrzebę wykorzystania ułamków:

Mama postanowiła przelać trzy litry soku do identycznych butelek o pojemności pół litra. Ile butelek potrzebuje?



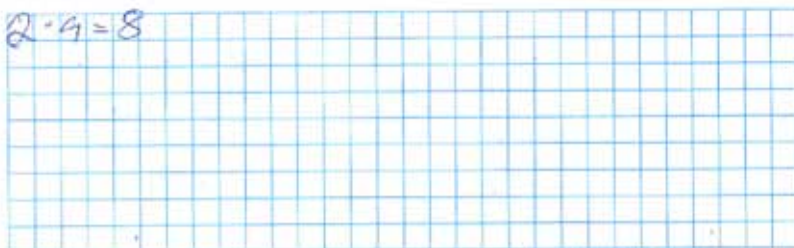
Odpowiedź: Mama potrzebuje 6 butelek.

Trzy litry soku wiano do identycznych butelek o pojemności $\frac{1}{4}$ litra. Do ilu butelek wiano sok?



Odpowiedź: Sok wiano do 12 butelek.

Dwa litry soku wiano do identycznych butelek o pojemności ćwierć litra. Do ilu butelek wiano sok?



Odpowiedź: Sok wiano do 8 butelek.

Tego typu obliczenia zapisało odpowiednio 19,6%, 10,1%, 9,8% oraz 14,3% trzecioklasistów.

Nieco rzadziej, bo w: 14,5%, 9,4%, 5,4% i 4,7% dobrych rozwiązań pojawiły się operacje na ułamkach, niekiedy bardzo matematycznie zaawansowane:

Mama postanowiła przeleć trzy litry soku do identycznych butelek o pojemności pół litra. Ile butelek potrzebuje?

$$6 \times 0,5l = 3l \text{ bo } 3l : 0,5l = 6$$

Odpowiedź: Potrzebuje 6 butelek

Trzy litry soku wiano do identycznych butelek o pojemności $\frac{1}{4}$ litra. Do ilu butelek wiano sok?

$$3l : \frac{1}{4} = 12$$

Odpowiedź: Sok wiano do 12 butelek

Dwa litry soku wiano do identycznych butelek o pojemności ćwierć litra. Do ilu butelek wiano sok?

$$2l : \frac{1}{4} = 8$$

Odpowiedź: Sok wiano do 8 butelek

Mama postanowiła rozlać cztery litry soku do identycznych butelek o pojemności $\frac{1}{2}$ litra. Ile butelek potrzebuje?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4l$$

Odpowiedź: Mama potrzebuje 8 butelek

Dały także o sobie znać typowe strategie obronne. W treści zadań **A** i **C** widać tylko jedną liczbę: trzy albo dwa, i do tych liczb najczęściej w swoich błędnych rozwiązaniach: 16,8% oraz 27,2% odwoływali się uczniowie. Natomiast w zadaniach **B** i **D** pojawiło się więcej obliczeń: 6,9% i 7,7% posługujących się ułamekami zawartymi w treści zadań:

Mama postanowiła przelać trzy litry soku do identycznych butelek o pojemności pół litra. Ile butelek potrzebuje?

$$3\text{L} : \frac{1}{2} = 3$$

Odpowiedź: *mama potrzebuje 3 butelki.*

Trzy litry soku wiano do identycznych butelek o pojemności $\frac{1}{4}$ litra. Do ilu butelek wiano sok?

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Odpowiedź: *Sok wiano do trzech butelek.*

W badaniach w roku 2011⁷² wykorzystano jeszcze jedno zadanie dotyczące ułamków i pojemności, choć jego model matematyczny był inny niż poprzednio:

- E** Mama wlała cały ugotowany kompot do 8 butelek półlitrowych. Ile litrów kompotu ugotowała mama?

Zadanie to rozwiązało poprawnie 45,6% trzecioklasistów, czyli wyraźnie mniej niż zadanie A, w którym także pojawił się ułamek $\frac{1}{2}$ w zapisie słownym. Jest to

⁷² Dąbrowski M. (2012a).

o tyle dziwne, że oba zadania daje się rozwiązać z pomocą identycznych, w swej naturze, strategii.

W zadaniu **E** uczniowie najczęściej: 19,3% wykonywali sensowne obliczenia na liczbach całkowitych, odpowiednio interpretując ich wynik:

7. Mama wiała cały ugotowany kompot do 8 butelek półlitrowych.
Ile litrów kompotu ugotowała mama?

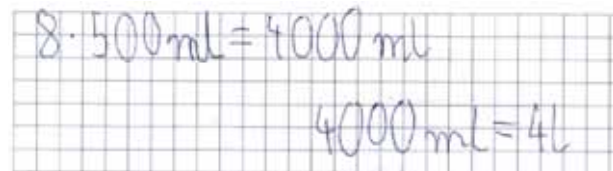


Odpowiedź: Mama ugotowała 4 litry kompotu.

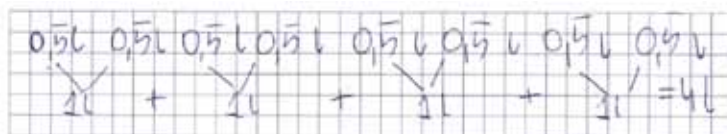


Odpowiedź: Mama miała 4L ugotowanego kompotu.

Czasami: 11,4% trzecioklasiści sięgali po zamiany jednostek:



czy bardzo kompetentnie posługiwali się ułkami zwykłymi albo dziesiętymi (8,4%):



$8 \cdot 0,5L = 4L$

$8 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4L$

$8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ litry}$

Najczęstszym błędem: 27,2% było – jak zawsze przy tak podanych danych – wykonywanie jakichś niepasujących do treści zadania obliczeń z udziałem liczby 8:

Mama wlała cały ugotowany kompot do 8 butelek półlitrowych.
Ile litrów kompotu ugotowała mama?

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 4 \\ \hline 32 \end{array}$$

Odpowiedź: Mama ugotowała 32 litry kompotu.

Mama wlała cały ugotowany kompot do 8 butelek półlitrowych.
Ile litrów kompotu ugotowała mama?

$$8 + 8 = 16$$

Odpowiedź: Mama ugotowała kompotu 16.

Popatrzmy, za pomocą jak prostych środków można rozwiązać wszystkie te zadania:

Dwa litry soku wiano do identycznych butelek o pojemności ćwierć litra.
Do ilu butelek wiano sok?

1 liter to 4 buteleki
2 l - 8 buteleki

Odpowiedź: Sok wiano do 8 butelek.

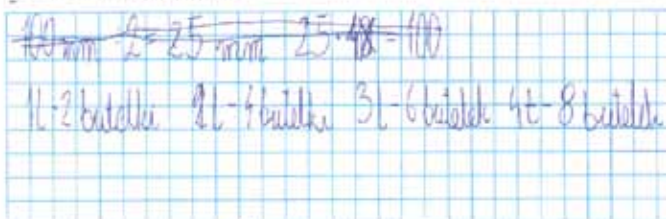
Mama postanowiła przelać trzy litry soku do identycznych butelek o pojemności pół litra.
Ile butelek potrzebuje?

1 l = 2 buteleki
3 l = 6 buteleki

Odpowiedź: Mama potrzebuje 6 butelek.

Mama postanowiła rozlać cztery litry soku do identycznych butelek o pojemności

$\frac{1}{2}$ litra. Ile butelek potrzebuje?



Odpowiedź: potrzebuje 8 butelek.

Mama postanowiła rozlać cztery litry soku do identycznych butelek o pojemności

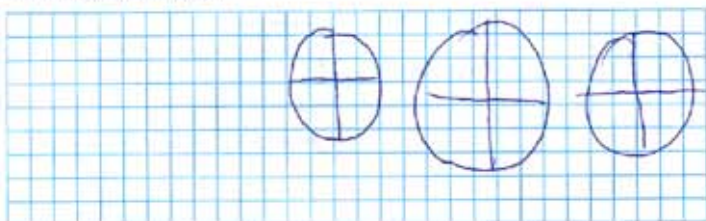
$\frac{1}{2}$ litra. Ile butelek potrzebuje?



Odpowiedź: Potrzebuje 8 butelek

Trzy litry soku wiano do identycznych butelek o pojemności $\frac{1}{4}$ litra.

Do ilu butelek wiano sok?



Odpowiedź: Sok wiano do 12 butelek.

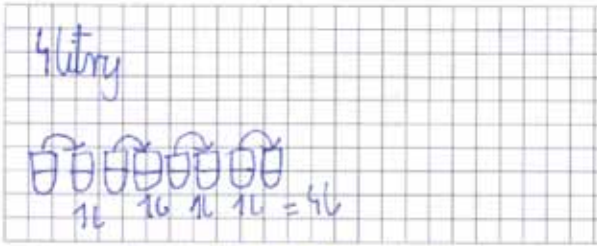
Dwa litry soku wiano do identycznych butelek o pojemności ćwierć litra.

Do ilu butelek wiano sok?



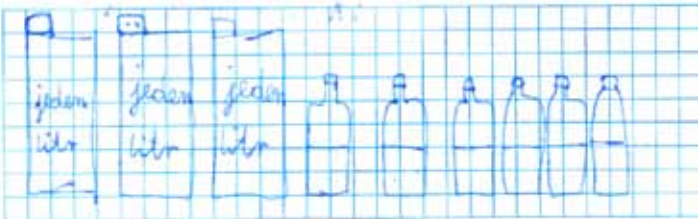
Odpowiedź: Do 8 butelek wiano sok

Mama wlała cały ugotowany kompot do 8 butelek półlitrowych.
Ile litrów kompotu ugotowała mama?



Odpowiedź: Mama ugotowała 4 litry kompotu.

Mama postanowiła przeleć trzy litry soku do identycznych butelek o pojemności pół litra.
Ile butelek potrzebuje?



Odpowiedź: Potrzebuje 6 butelek.

Przytoczone powyżej rozwiązania rysunkowe bardzo ładnie pokazują, **jak potężnym narzędziem, pozwalającym uczniom samodzielnie dochodzić do rozumienia symboliki matematycznej i tworzyć tę symbolikę, jest rysunkowe rozwiązywanie zadań. Jest to, niestety, kolejna strategia obca naszej szkole.**

W badaniu OBUT 2012⁷³ wykorzystano zamkniętą, nieznacznie zmodyfikowaną wersję zadania C:

Mama wlała dwa litry soku do identycznych butelek o pojemności ćwierć litra. Do ilu butelek wlała sok?

- A. do 16
- B. do 8
- C. do 4
- D. do 2

Rozwiązało je poprawnie 56,5% trzecioklasistów. 23,1% badanych uczniów zaznaczyło odpowiedź C, a odpowiednio 12,9% oraz 5,1% odpowiedzi D i A.

⁷³ Dąbrowski M., Wiatrak E. 2012a, s. 17-23.

Zamknięta forma zadania daje uczniom dodatkowe możliwości, np. możliwość sprawdzenia, która z podanych odpowiedzi jest poprawna, czyli spełnia warunki zadania. **W tym celu jednak warto jest wiedzieć, że na tym właśnie – na sprawdzeniu, czy otrzymana odpowiedź spełnia warunki zadania – polega sprawdzanie poprawności rozwiązania.**

Obwód prostokąta

W badaniach w roku 2008⁷⁴ wykorzystano, m.in., następujące dwa zadania:

- A** Prostokątna działka ma 40 metrów długości i 25 metrów szerokości. Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki?
- B** Oblicz obwód prostokąta o bokach 4 cm i 7 cm.

Zadanie **A** to typowe praktyczne zadanie tekstowe sformułowane w języku potocznym, które w wielu krajach wykorzystywane jest w procesie matematycznego kształcenia do budowania rozumienia pojęcia obwodu prostokąta i sposobu jego obliczania. W badaniach miało ono sprawdzać przede wszystkim umiejętność wykorzystania przez uczniów posiadanej wiedzy w sytuacji praktycznej. Natomiast zadanie **B** to bardzo typowe zadanie utrwalające procedurę obliczania obwodu prostokąta czy sprawdzające jej opanowanie. Operuje ono już pojęciem obwodu i ma czysto algorytmiczny charakter.

Pierwsze z zadań rozwiązało poprawnie 55,9% trzecioklasistów, czyli nieco ponad ich połowa. Drugie okazało się znacznie prostsze – poradziło sobie z nim 78,1% uczniów, czyli o 22,2% więcej. Biorąc pod uwagę specyfikę obu zadań, można z tych wyników wysnuć wniosek, że część trzecioklasistów potrafi obliczyć obwód prostokąta, ale nie rozumie tego pojęcia. Wróć jeszcze do tej kwestii.

Poprawne rozwiązania zadania **A** miały typowy charakter, zresztą samo to zadanie też jest bardzo typowe:

Prostokątna działka ma 40 metrów długości i 25 metrów szerokości.

Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki?

$$2 \cdot 40 \text{ m} = 80 \text{ m} \quad ; \quad 2 \cdot 25 \text{ m} = 50 \text{ m} \quad ; \quad 80 \text{ m} + 50 \text{ m} = 130 \text{ m}$$

Odpowiedź: Do ogrodzenia tej działki potrzeba 130 m siatki.

⁷⁴ Dąbrowski M. (2009b).

$$40 + 25 + 40 + 25 = 130 \text{ m}$$

Odpowiedź: Do ogrodzenia tej natki potrzeba 130 m.

Najbardziej typowy błąd w tym zadaniu polegał na dodaniu liczb podanych w jego treści:

Prostokątna działka ma 40 metrów długości i 25 metrów szerokości.
Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki?

$$40 \text{ m} + 25 \text{ m} = 65 \text{ m}$$

Odpowiedź: Do ogrodzenia tej działki potrzeba 65 metrów siatki.

$$\begin{array}{r} 40 \\ + 25 \\ \hline 65 \end{array}$$

Odpowiedź: Tej działki do ogrodzenia siatką trzeba 65 metrów siatki.

Postąpiło w ten sposób 35,1% trzecioklasistów. Raczej nie obliczyli oni połowy obwodu działki – w naszym nauczaniu początkowym nie ma aż tak silnej tradycji sięgania po wzór na obwód prostokąta w postaci $2(a + b)$, przeczy

$$\begin{array}{r} 40 \\ + 25 \\ \hline 65 \end{array}$$

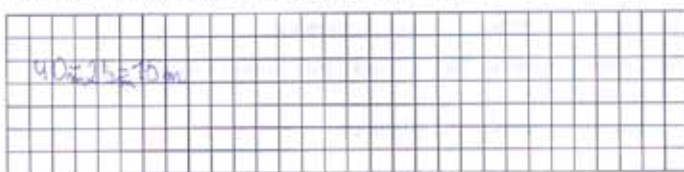
Prostokątna działka ma 65 m.

temu także postać odpowiedzi. Najprawdopodobniej zastosowali oni dobrze już nam znaną strategię polegającą na „wyjęciu” z treści zadania dwóch podanych

liczb i wykonaniu na nich najbardziej „pasującego” działania – mnożenie i dzielenie odpada, bo liczby są za duże, zatem pozostaje dodawanie i odejmowanie, liczby są mniej więcej tej samej wielkości, więc prawdopodobnie należy je dodać. Ta sama strategia, która już wielokrotnie ujawniała się w różnych sytuacjach.

Tylko nieliczne dzieci odejmowały liczby z treści albo „nadawały” działce trójkątny kształt, wykonując dodawanie $40 + 40 + 25$ albo $25 + 25 + 40$:

Prostokątna działka ma 40 metrów długości i 25 metrów szerokości.
Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki?



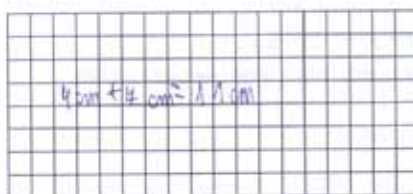
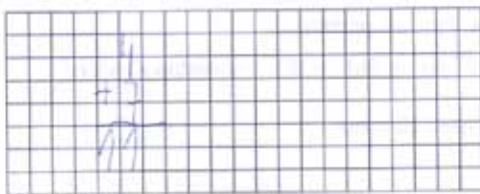
Odpowiedź: Do ogrodzenia tej działki potrzeba 65 metrów siatki.



Odpowiedź: Do ogrodzenia tej działki potrzeba 105 m siatki.

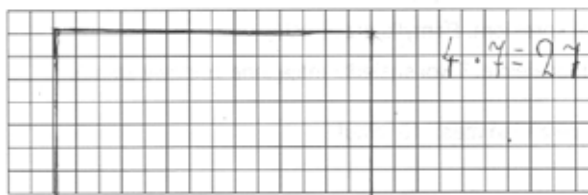
Podobne kategorie błędów, choć z wyraźnie mniejszym nasileniem pojawiły się także w zadaniu B – 7,4% uczniów dodało liczby z zadania, a 2,9% je pomnożyło. Zdarzały się także pojedyncze próby dodawania trzech liczb.

Oblicz obwód prostokąta o bokach 4 cm i 7 cm.



Odpowiedź: Prostokąt ma 11 cm.

Odpowiedź: Obwód prostokąta ma 11 cm.

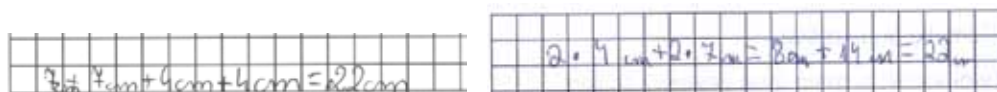


Odpowiedź: ~~Obwód prostokąta wynosi 28 cm~~



Odpowiedź: Obwód trójkąta wynosi 18 cm

W poprawnych rozwiązaniach obwód był liczony na jeden z dwóch sposobów:



co potwierdza sformułowane powyżej uwagi o pochodzeniu w zadaniu A obliczeń typu $40 + 25$.

Oba te zadania wykorzystano także w badaniach OBUT 2011⁷⁵, nadając im postać zadań zamkniętych:

A1 Prostokątna działka ma 40 metrów długości i 25 metrów szerokości. Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki?

- A. 105
- B. 65
- C. 15
- D. 130

B1 Jaki jest obwód prostokąta o bokach 4 cm i 7 cm?

- A. 11 cm
- B. 22 cm
- C. 15 cm
- D. 28 cm

⁷⁵ Dąbrowski M., Wiatrak E. (2011), s. 14-18.

Jak widać, błędne odpowiedzi dobrano na podstawie popularnych kategorii błędów pojawiających się w rozwiązaniach tych zadań w wersji otwartej.

Wyniki były zbliżone do tych z badań z 2008 roku – zadanie o działce rozwiązało poprawnie 50,5% uczniów, a zadanie o prostokącie 71,5%, czyli ponownie o ponad 20% więcej.

Warto zobaczyć, jakie błędne odpowiedzi wybierali trzecioklasiści rozwiązując te zadania:

Tabela 2. Obliczanie obwodu prostokąta – rozkład dystraktorów w badaniach OBUT 2011.

A1: działka		B1: prostokąt	
Typ błędu	% wyborów	Typ błędu	% wyborów
40 + 25	44,6	4 + 7	21,7
40 – 25	2,5	4 × 7	4,8
2 × 40 + 25	1,9	2 × 4 + 7	1,2
brak rozwiązania	0,5	brak rozwiązania	0,8

Jak widać, 44,6% uczniów wybrało jako odpowiedź w zadaniu o działce (A1) sumę wielkości podanych w treści, a 2,5% ich różnicę. Zatem blisko połowa trzecioklasistów z rocznika 2011 (47,1%) mogła zastosować wielokrotnie wcześniej opisywaną strategię: *wybieram liczby i dobieram do nich pasujące działanie*.

Także w przypadku drugiego z zadań najbardziej typowy błąd polegał na wybraniu sumy liczb podanych w treści – postąpiło tak 21,7% trzecioklasistów. Natomiast 4,8% z nich wskazało jako odpowiedź iloczyn tych liczb. Oznacza to, że ponad ¼ trzecioklasistów w tym bardzo typowym i schematycznym zadaniu także mogła sięgnąć po przytoczoną wyżej strategię.

Warto zwrócić uwagę na to, że ten typ błędów nasilił się dla obu zadań w stosunku do danych sprzed trzech lat (por. wcześniej). Mogła spowodować to zmiana formy zadania, choć może także być to efekt upowszechniania się wśród trzecioklasistów opisywanych strategii obronnych.

Każdy uczeń biorący udział w badaniach OBUT 2011 rozwiązywał oba te zadania – warto zestawić ich wyniki:

Tabela 3. Obliczanie obwodu prostokąta – zestawienie wyników procentowych z badań OBUT 2011.

		Prostokąt B1	
		0	1
Działka A1	0	24,2%	25,3%
	1	4,4%	46,1%

Nieco mniej niż połowa trzecioklasistów: 46,1% rozwiązała poprawnie oba te zadania, a 24,2%, czyli prawie $\frac{1}{4}$ nie zrobiła dobrze żadnego z nich. Oznacza to, że mniej więcej co czwarty trzecioklasista ani nie rozumie pojęcia obwodu, ani nie pamięta utrwalanej podczas zajęć procedury obliczeniowej. Aż 25,3% uczniów potrafiło wskazać właściwą odpowiedź dla zadania o prostokącie, lecz nie umiało tego zrobić dla zadania o działce – ci uczniowie, najprawdopodobniej, samą procedurę pamiętają i potrafią w najbardziej typowej sytuacji zastosować, ale nie rozumieją, co ona faktycznie oznacza i jak się ją w praktyce stosuje.

Podsumowanie

Jak o tym wspominałem, wykorzystywanie różnorodnych miar to jeden z najbardziej widocznych obszarów stosowania matematyki na co dzień. Opisywane badania dostarczają sporo informacji o tym, jak ten obszar zagadnień jest postrzegany i rozwijany przez naszą szkołę w początkowym okresie edukacji matematycznej.

Pierwszą rzeczą, która rzuca się w oczy, jest wyraźna sprzeczność pomiędzy tym, czym w tym obszarze zajmuje się szkoła, a z czym obcuja uczniowie poza nią. Nasz współczesny świat używa notacji dziesiętnej i – w zasadzie – już tylko jej. Dotyczy to nie tylko cen, ale także długości, masy czy pojemności. Szkoła na I etapie kształcenia zdominowana jest przez zapis dwumianowy wielkości, co – zwłaszcza w kontekście cen – prowadzi do wyraźnej sprzeczności z tym, czego poza nią uczą się dzieci. W efekcie walor użytkowy wiedzy zdobywanej w tym obszarze w szkole nie jest zbyt wielki – to szkoła może korzystać z tego, czego dzieci się nauczą poza nią, a nie odwrotnie.

Zestawienie efektów rozwiązywania przez uczniów zadań tekstowych o praktycznym charakterze z oderwanymi od realistycznego kontekstu obliczeniami tego samego typu, rodzi podejrzenie, że znaczna część trzecioklasistów nie widzi związku pomiędzy jednym a drugim. Wydaje się, że czymś innym dla nich jest rozwiązanie zadania tekstowego dotyczącego upływu czasu czy zakupów, a czym innym wykonanie dokładnie takiego samego obliczenia, ale bez odniesień praktycznych. Widać to po poziomie wyników, po stosowanych metodach postępowania i, po części w efekcie, po typach popełnianych błędów. Można mieć podejrzenie, że wykonywania obliczeń dzieci uczą się w szkole, a rozwiązywania zadań praktycznych poza nią – stąd, być może, te zauważalne rozbieżności.

Jedną z konsekwencji takiego podejścia do budowania gmachu matematycznej wiedzy dzieci jest brak umiejętności sięgania – w razie potrzeby – po użyteczne narzędzia, które ułatwiają zarówno radzenie sobie z sytuacją praktyczną, jak i samym obliczeniem. Także rozwiązywanie zadań o praktycznym charakterze zdominowane jest przez potrzebę zapisania i wykonania obliczenia, co owocuje tymi samymi strategiami, z którymi mieliśmy do czynienia przy zadaniach tekstowych innego typu (por. wcześniej).

Ucniowie zamiast zaufać zdrowemu rozsądkowi i rozwiązać zadanie choćby na palcach przywołują i stosują zbudowane w innych sytuacjach i w innym momencie procesu kształcenia strategie obronne. Może to być sygnał, że w naszej szkole zadania o praktycznym charakterze pojawiają się za późno.

Uważna analiza uczniowskich rozwiązań pokazuje także, że znaczna część uczniów nie rozumie pojęć matematycznych pojawiających się w tych zadaniach, choćby tak naturalnego pojęcia jak obwód.

Wydaje się, że w procesie kształcenia nie pokazujemy w wystarczający sposób użyteczności matematyki i nie uczymy rzeczy prawdziwie przydatnych – także w obszarze strategii intelektualnych.

Patrząc zarówno na poziom wykonania poszczególnych analizowanych zadań, jak i typy rozumowań uczniów, trzeba stwierdzić, że umiejętność stosowania posiadanej wiedzy matematycznej w sytuacjach codziennych nie jest silną stroną naszych trzecioklasistów.

I.4. CZYTANKI MATEMATYCZNE

Często podczas rozmów z nauczycielami spotykam się z opinią, że trudności naszych uczniów w rozwiązywaniu zadań tekstowych wynikają z tego, że nie potrafią oni przeczytać treści zadania ze zrozumieniem. Opinie te powtarzają niezmiennie od lat nauczyciele wszystkich szczebli edukacji. **Tymczasem, właśnie z czytaniem ze zrozumieniem nasi uczniowie radzą sobie ostatnio coraz lepiej⁷⁶, a w obszarze rozwiązywania zadań tekstowych sytuacja nie ulega zmianie, a może nawet się pogarsza.**

Czy rzeczywiście trzecioklasiści mają aż takie trudności z czytaniem ze zrozumieniem krótkich tekstów zawierających dane np. o liczbowym charakterze? Szukając odpowiedzi na to pytanie, przyjrzyjmy się, w jaki sposób w ciągu ostatnich kilku lat uczniowie kończący I etap kształcenia radzili sobie, w trakcie omawianych badań⁷⁷, z *czytankami matematycznymi*, czyli różnego typu tekstami o informacyjnym charakterze, zawierającymi dane potrzebne do udzielenia odpowiedzi na pytania towarzyszące tym tekstom.

Pytania te stwarzają uczniom okazję do:

- ustalania, jakie informacje są im potrzebne do udzielenia odpowiedzi,
- wyszukiwania tych informacji, np. liczbowych, w tekście,
- dokonywania na nich prostych operacji, np. arytmetycznych, co jest efektem matematyzacji problemu zawartego w pytaniu,
- wykorzystywania uzyskanych wyników do sformułowania odpowiedzi.

W efekcie, uczeń musi przeczytać cały tekst, uświadomić sobie, jaka jest funkcja poszczególnych zawartych w nim informacji i w jakim związku z sobą one pozostają. **Jest to dokładnie ten sam typ analizy, który powinien towarzyszyć (świadomemu) procesowi rozwiązywania zadania tekstowego⁷⁸.**

Wykorzystywane w badaniach serie pytań do czytanek miał zazwyczaj podobną strukturę:

- początkowe pytania wymagały znalezienia w tekście zawartych tam danych,
- kolejna grupa pytań uruchamiała przetwarzanie wydobytej informacji,
- a końcowe wiązały się z równoczesnym wykorzystaniem kilku danych, w tym czasami także tych, które pojawiły się jako odpowiedzi w poprzednich pytaniach.

⁷⁶ Daje się to zauważyć np. w wynikach badań PISA z 2009 roku (http://www.ifspan.waw.pl/pliki/pisa_2009).

⁷⁷ Dąbrowski M., Żytko M. (2007b), Kalinowska A. (2009), Kalinowska A. (2011), Dąbrowski M. (2012b).

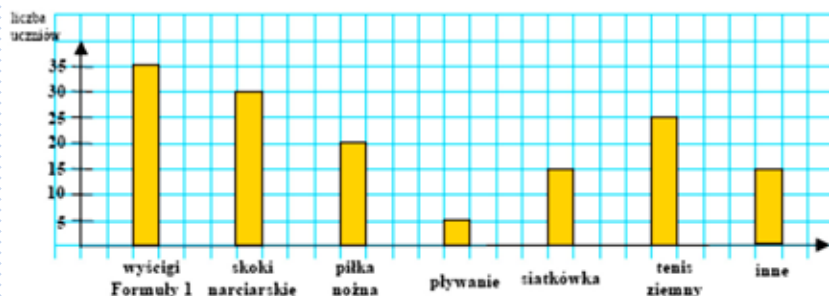
⁷⁸ Polya G. (1990), (1993).

Tego typu zadania wciąż pojawiają się na I etapie kształcenia rzadko, można więc uznać, że uczniowie rozwiązując je, znaleźli się w nowej dla nich sytuacji.

Czytanka A: Ulubione dyscypliny sportu

W badaniach z 2008 roku⁷⁹ wykorzystano czytanke, w której podstawowym źródłem danych był diagram słupkowy:

Uczniowie postanowili zaprosić do swojej szkoły najbardziej lubianego przez nich sportowca. Zaczęli od sprawdzenia, jaka dyscyplina sportu jest wśród nich najpopularniejsza. Każdego ucznia zapytano o jego ulubioną dyscyplinę. Wszystkie odpowiedzi przedstawiono na rysunku:



a) Jaka dyscyplina sportu okazała się najbardziej popularna?

b) Ilu uczniów wybrało piłkę nożną?

c) Którą z tych dyscyplin wybrało 25 uczniów?

d) Którą dyscyplinę: skoki narciarskie czy siatkówkę wybrało więcej uczniów? O ilu więcej?

e) Które dwie dyscypliny wybrało łącznie 50 uczniów?

f) Ilu razem uczniów podało swoją ulubioną dyscyplinę?

Odpowiedź:

⁷⁹ Kalinowska A. (2009).

Zgodnie z tym, o czym już wspominałem, trzy początkowe pytania dotyczą wyszukiwania danych w tym tekście złożonym, na który składa się krótki wstęp i rysunek. Wiązą się one z różnymi aspektami czytania diagramu słupkowego:

- świadomością, że najwyższy słupek odpowiada najbardziej popularnej dyscyplinie,
- umiejętnością odczytania liczby głosów dla wskazanej dyscypliny,
- umiejętnością wyszukiwania dyscypliny o podanej liczbie głosów.

Odpowiadając na nie uczeń, m.in., musi skorzystać z opisów obu osi wykresu.

Okazuje się, że trzecioklasiści z pytaniami tymi nie mieli żadnego kłopotu: poradziło sobie z nimi odpowiednio 88,7%, 84,5%, 85,6% uczniów.

Odpowiadając na pytanie d), uczniowie musieli odczytać z wykresu dwie potrzebne informacje oraz porównać je różnicowo. To pytanie okazało się trudne – poprawnej odpowiedzi udzieliło zaledwie 34,6% dzieci:

d) Którą dyscyplinę: skoki narciarskie czy siatkówkę wybrało więcej uczniów? O ilu więcej?

30 skoki narciarskie 15 siatkówka o 15 mniej uczniów wybrano siatkówkę

d) Którą dyscyplinę: skoki narciarskie czy siatkówkę wybrało więcej uczniów? O ilu więcej?

Skoki narciarskie o 15 więcej

d) Którą dyscyplinę: skoki narciarskie czy siatkówkę wybrało więcej uczniów? O ilu więcej?

SKOKI NARCIARSKIE 30 - SIATKÓWKA 15 - $30 - 15 = 15$

O złożoności tego zadania zadecydowała, najprawdopodobniej, konieczność udzielenia odpowiedzi na dwa pytania: o dyscyplinę oraz liczbę uczniów. Aż 26,1% trzecioklasistów poprawnie odpowiedziało na drugie z nich, a źle lub wcale – na pierwsze, a 15,3% odwrotnie, tzn. dobrze wskazało dyscyplinę, a źle lub wcale różnicę wyborów.

d) Którą dyscyplinę: skoki narciarskie czy siatkówkę wybrało więcej uczniów? O ilu więcej?

$30 - 15 = 15$ o 15 więcej.

d) Którą dyscyplinę: skoki narciarskie czy siatkówkę wybrało więcej uczniów? O ilu więcej?

skoki narciarskie

Inne typy błędów zdarzały się wyraźnie rzadziej:

d) Którą dyscyplinę: skoki narciarskie czy siatkówkę wybrało więcej uczniów? O ilu więcej?

Skoki narciarskie czy siatkówkę wybrało 45 uczniów.

Znacznie lepiej wypadło pytanie e), w którym były dwie poprawne odpowiedzi: *piłka nożna i skoki narciarskie* oraz *wyścigi Formuły 1 i siatkówka*. 64,4% uczniów podało jedną z nich, a 1,3% obie, co daje łączny wynik 65,7%. Niektórzy uczniowie byli zadziwiająco precyzyjni:

e) Które dwie dyscypliny wybrało łącznie 50 uczniów?

Wyścigi Formuły 1 i siatkówka, wyścigi Formuły 1 i inne, skoki narciarskie i piłka nożna.

Ostatnie pytanie także okazało się trudne: 38,8% poprawnych wyników. O zaliczeniu tego punktu decydował dobór danych – przy poprawnych danych i błędzie rachunkowym rozwiązanie było uznawane za dobre. Niektóre obliczenia ujawniały stosowane przez uczniów strategie obliczeniowe czy notacyjne:

f) Ilu razem uczniów podało swoją ulubioną dyscyplinę?

$$(35+5)+(30+20)+(25+2\cdot 15)=(40+50)+55=90+55=145$$

f) Ilu razem uczniów podało swoją ulubioną dyscyplinę?

$$25+30+25+20+15+15+5=145$$

f) Ilu razem uczniów podało swoją ulubioną dyscyplinę?

$$35+30+20+5+15+25+15=65+25+40+15=90+55=145$$

Odpowiedź: Swoją ulubioną dyscyplinę podało 145 uczniów.

wpół	5m	11A	1	9	12	i
35	+ 30	+ 20	+ 5	+ 15	+ 25	+ 15
69	85	90	105	120	145	145

Odpowiedź: Razem 145 uczniów podało swoją ulubioną dyscyplinę

$35 + 30 + 20 + 5 + 15 + 25 + 15 = 145$	$\begin{array}{r} +2 \\ \hline 135 \\ +30 \\ \hline 165 \\ +20 \\ \hline 185 \\ +5 \\ \hline 190 \\ +15 \\ \hline 205 \\ +25 \\ \hline 230 \\ +15 \\ \hline 245 \end{array}$
---	--

Odpowiedź: Ulubioną dyscyplinę podało 145 uczniów

Najczęstszy błąd polegał na pominięciu w obliczeniach jednego czy dwóch słupków – przydarzył się on 23,7% trzecioklasistów:

f) Ilu razem uczniów podało swoją ulubioną dyscyplinę?

35
30
20
25
15
+ 95
170

Odpowiedź: Razem podało swoją ulubioną dyscyplinę 170 dzieci.

Na diagramie 1. zebrano dane dla kolejnych podpunktów tego zadania. Łatwość całego tekstu była równa 0,66. Natomiast diagram 2. pokazuje rozkład uczniowskich „sukcesów”.

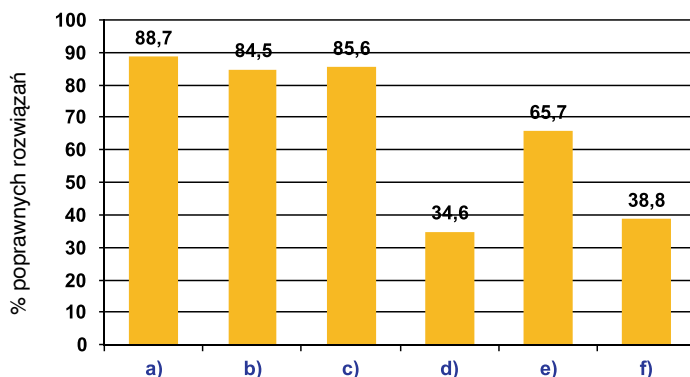


Diagram 1. Czytanie tekstu matematycznego – procent poprawnych odpowiedzi na poszczególne pytania dla czytanki *Ulubione dyscypliny sportu*.

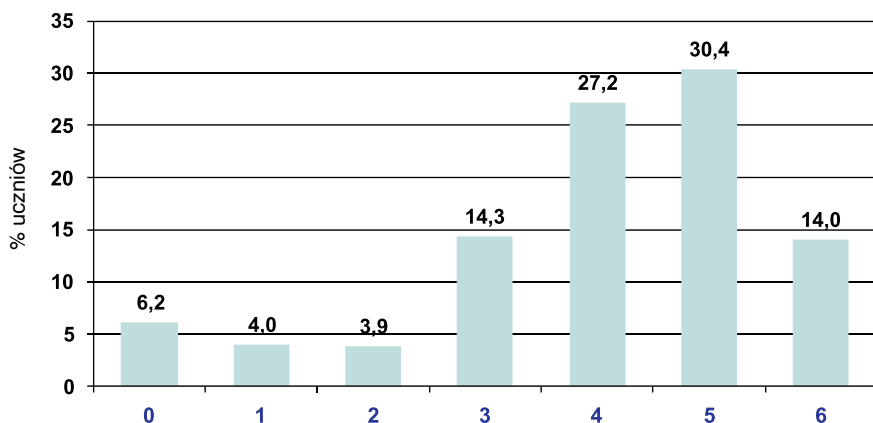


Diagram 2. Czytanie tekstu matematycznego – liczba poprawnych odpowiedzi na poszczególne pytania dla czytanek *Ulubione dyscypliny sportu*.

Najczęściej, bo w 30,4% przypadków trzecioklasiści odpowiadali poprawnie na 5 pytań, 14,0% uczniów podało wszystkie dobre odpowiedzi, a 6,2% – żadnej.

Czytanka B: O oszczędzaniu wody

W badaniach z 2010 roku⁸⁰ jedną z wykorzystanych czytanek był tekst o oszczędzaniu wody:

Ilość wody zużywanej podczas kąpieli w wannie zależy od wielkości wanny i tego, do jakiego poziomu jest ona wypełniona. Na jedną kąpiel w wannie zużywa się przeciętnie około 120 litrów wody. Kąpiąc się pod natryskiem, zużywa się około 10 litrów wody w ciągu minuty. Zamiana kąpieli w wannie na natrysk, to jedna ze skuteczniejszych metod oszczędzania wody.



- a) Ile litrów wody zużywa się przeciętnie podczas kąpieli w wannie?
- b) Typowa kąpiel pod natryskiem trwa około 5 minut. Ile litrów wody w tym czasie się zużyje?
- c) Ile minut trzeba spędzić pod natryskiem, żeby zużyć tyle samo wody, co podczas jednej kąpieli w wannie?

Wody na świecie jest coraz mniej, więc jej cena stale rośnie. Przyjmijmy, że litr wody kosztuje 2 grosze.

- d) Ile groszy kosztuje woda potrzebna do jednej kąpieli w wannie?
- e) A ile groszy kosztuje woda zużywana podczas pięciominutowego natrysku?
- f) Ile pieniędzy można zaoszczędzić, zamieniając kąpiel w wannie na trwającą 5 minut natrysk?

⁸⁰ Kalinowska A. (2011).

Pytania w zadaniu zostały tak dobrane, aby uczeń stopniowo dokonywał coraz bardziej zaawansowanej analizy tekstu – poziom ich trudności jest mocno zróżnicowany.

Odpowiadając na pytanie a), uczeń musi jedynie odszukać w tekście potrzebą informację. Jest ono tak sformułowane, że uczeń może w odpowiedzi podać zarówno liczbę, jak i wielkość mianowaną czy opis słowny⁸¹. Na pytanie to dobrze odpowiedziało 85,0% trzecioklasistów.

W pytaniu b) trzeba już odwołać się do dwóch informacji ulokowanych w różnych miejscach tekstu, choć związanych ze sobą tematycznie: przeciętnego czasu trwania kąpieli pod natryskiem oraz zużycia wody w ciągu minuty natrysku. Uczeń musi ustalić, jak te dane „pasują” do siebie i w jaki sposób należy je ze sobą połączyć. W efekcie, wynik nieco niższy niż poprzednio: 74,9%.

W kolejnym pytaniu uczeń musi zestawić ze sobą inną parę informacji: ilość wody zużywanej podczas kąpieli w wannie oraz podczas minuty natrysku. Te informacje dotyczą dwóch różnych rzeczy, ich wzajemny związek jest dużo bardziej skomplikowany, co znacząco odbiło się na poziomie rozwiązań: 46,8%.

W pytaniu d) należało dodatkowo wykorzystać nową informację – cenę litra wody. W efekcie, do udzielenia odpowiedzi potrzebne były dane znajdujące się w dwóch, znacznie oddalonych od siebie, miejscach. Poprawnej odpowiedzi udzieliło 49,5% trzecioklasistów.

W czterech początkowych pytaniach czytanki punktem wyjścia do konstruowania odpowiedzi zawsze była informacja podana w jej treści. W dwóch następnych sytuacja ulega istotnemu utrudnieniu.

Odpowiadając na pytanie e) uczeń ma dwie możliwości do wyboru:

- albo może wykorzystać swoją odpowiedź na pytanie b), mnożąc ją przez 2 grosze,
- albo może powtórzyć wcześniejsze rozumowanie, wychodząc od informacji z tekstu.

Podobne opcje ma także w ostatnim pytaniu – do wyboru ma odjęcie wielkości z odpowiedzi na dwa poprzednie pytania, albo rozpoczęcie rozwiązania od wyszukania „startowych” danych z tekstu. Poziom poprawnych rozwiązań dla tych dwóch pytań wyniósł odpowiednio 37,4% oraz 40,3%.

⁸¹ Podobną zasadę przyjęto także przy ocenianiu pozostałych pytań: nie zwracano uwagi na użyte przez ucznia miana albo ich brak.

Warto spojrzeć na dwie przykładowe prace trzecioklasistów, bo pozwala to lepiej uświadomić sobie ich wysiłek oraz dostrzec różnorodność form odpowiedzi, także z punktu widzenia samego zapisu.

W pierwszej z nich widać silną potrzebę autora „udzielania odpowiedzi pełnym zdaniem”. Dość często dawała ona o sobie znać właśnie w przypadku zadań krótkiej odpowiedzi.

a) Ile litrów wody zużywa się przeciętnie podczas kąpieli w wannie?

Podczas kąpieli w wannie zużywa się 120 litrów wody.

120L.

b) Typowa kąpiel pod natryskiem trwa około 5 minut. Ile litrów wody w tym czasie się zużyje?

Podczas 5 min zużywa się 50 litrów wody.

$120L \cdot 5 \text{ min}$
 $5 \text{ min} \cdot 10L = 50L$

c) Ile minut trzeba spędzić pod natryskiem, żeby zużyć tyle samo wody, co podczas jednej kąpieli w wannie?

Żeby zużyć tyle wody ile w wannie trzeba przebywać 12 minut.

$120L : 10L = 12$

Wody na świecie jest coraz mniej, więc jej cena stale rośnie. Przyjmijmy, że litr wody kosztuje 2 grosze.

d) Ile groszy kosztuje woda potrzebna do jednej kąpieli w wannie?

Woda potrzebna do kąpieli w wannie to 120 litrów.

$120L \cdot 2gr = 240gr = 2,40zł$

e) A ile groszy kosztuje woda używana podczas pięciominutowego natrysku?

Woda podczas 5 min natrysku kosztuje 50 litrów.

$50L \cdot 2gr = 100gr = 1zł$

f) Ile pieniędzy można zaoszczędzić, zamieniając kąpiel w wannie na trwający 5 minut natrysk?

Podczas natrysku można zaoszczędzić 70 litrów.

$2,40zł - 1zł = 1,40zł$

Autor kolejnej pracy (obok) udzielił właściwej odpowiedzi na pytania a) i d), ale zaliczono mu także odpowiedzi na dwa ostatnie pytania.

Jego rozumowanie w obu przypadkach było poprawne, złe wyniki były konsekwencją błędu zrobionego w podpunkcie b), w którym uczeń podał zużycie wody w ciągu minuty, a nie całej kąpieli pod natryskiem⁸².

W przypadku pytania e) tego typu sytuacja jak obok, tzn. dobre rozumowanie-zły wynik występowała sporadycznie, jedynie w 1,6% prac. Natomiast w f) zdecydowanie częściej, bo aż w 15,5% rozwiązań.

120 litrów

10 litrów

5 minut

240 groszy

20 groszy

220 groszy

⁸² Błąd ten pojawił się w 9,8% prac.

Diagram 3. zbiera wyniki dla kolejnych pytań tego tekstu. Jego łatwość w 2010 roku wyniosła 0,56. Na diagramie 4. przedstawiono rozkład liczby pytań, na które trzecioklasiści poprawnie odpowiedzieli.

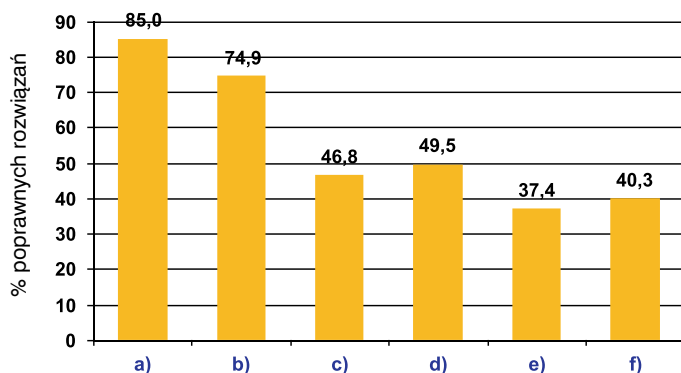


Diagram 3. Czytanie tekstu matematycznego – procent poprawnych odpowiedzi na poszczególne pytania dla czytanki *O oszczędzaniu wody*.

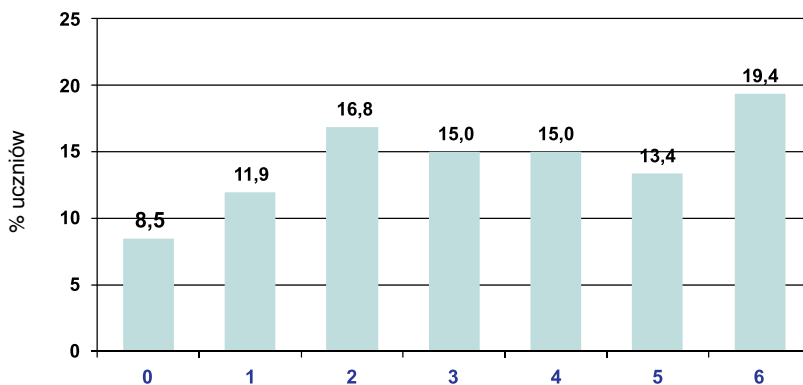


Diagram 4. Czytanie tekstu matematycznego – liczba poprawnych odpowiedzi na pytania dla czytanki *O oszczędzaniu wody*.

Dla tej czytanki najczęstszym rezultatem było udzielenie poprawnej odpowiedzi na wszystkie sześć pytań – zrobiło tak 19,4% trzecioklasistów. 8,5% uczniów nie odpowiedziało dobrze na żadne pytanie.

W porównaniu z poprzednią czytanką rozkład, jak widać, jest zdecydowanie bardziej wyrównany.

Czytanka C: Dyplomy

Oto inna, także w swoim charakterze, czytanka z badań 2010⁸³:

Przyjrzyj się uważnie tym dyplomom.

DYPLOM dla ----- NOWAKA za zdobycie brązowego medalu w skoku w dal	DYPLOM dla ----- JÓZWICKIEGO za zdobycie złotego medalu w biegu na 60 metrów	DYPLOM dla ----- KOWALCZYKA za zajęcie V miejsca w biegu na 1 kilometr
DYPLOM dla ----- JANIKA za zdobycie brązowego medalu w biegu na 60 metrów	DYPLOM dla ----- MALINOWSKIEGO za zdobycie srebrnego medalu w skoku w dal	DYPLOM dla ----- BARANOWSKIEGO za zdobycie złotego medalu w rzucie piłeczką

Cztery z nich to dyplomy czwórki przyjaciół: Piotra, Michała, Adama i Jurka.

Każdy z chłopców startował w innej konkurencji i każdy zajął inne miejsce.

Adam, choć nie zdobył medalu, był bardzo zadowolony, bo od niedawna trenuje i po raz pierwszy brał udział w zawodach. Piotr był trochę zmartwiony mimo srebrnego medalu, bo bardzo chciał wygrać, ale cieszył się ze zwycięstwa Jurka.

Odpowiedz na poniższe pytania. Dla ułatwienia: Michał nie nazywa się Nowak, a nazwisko Jurka nie zaczyna się na literę J.

a) W jakiej konkurencji startował Adam?

b) A w jakiej konkurencji startował Piotr?

c) Jak nazywa się Jurek?

d) A jak nazywa się Michał?

e) Wpisz imiona tych czterech chłopców na właściwych dyplomach powyżej.

⁸³ Kalinowska A. (2011).

Tym razem mamy do czynienia z rozbudowaną zagadką logiczną, w której potrzebne informacje podane są zarówno w tekście, jak i na towarzyszących mu dyplomach. Kolejne pytania „sterują” uczniem w procesie końcowej identyfikacji osób i ich sportowych osiągnięć. Uczniowie nie tylko muszą wyszukiwać potrzebne informacje, ale – przede wszystkim – analizować ich konsekwencje oraz związki pomiędzy nimi. Przy tej okazji stykają się z zaprzeczeniami typu: *Michał nie nazywa się Nowak, czy dokonują eliminacji.*

Znalezienie odpowiedzi na pytanie a) wymaga wyszukania w tekście informacji o tym, że Adam nie zdobył medalu, po czym znalezienie na rysunku odpowiedniego dyplomu i odczytanie z niego nazwy konkurencji. Z tym dwustopniowym rozumowaniem poradziło sobie 71,8% trzecioklasistów.

W pytaniu b) procedura się powtarza – najpierw informacja w tekście o srebrnym medalu, potem identyfikacja konkurencji na rysunku. Końcowy wynik nieco wyższy, bo 77,4%, co oznacza, że to wnioskowanie stało się udziałem ponad $\frac{3}{4}$ uczniów.

Kolejne pytanie wymaga jeszcze dłuższego rozumowania. Punktem wyjścia może w nim być informacja z pierwszej części tekstu o wygranej Jurka, uzupełniona o wskazówkę z drugiej części, że: *nazwisko Jurka nie zaczyna się na literę J.* Teraz pora na odwołanie się do rysunku i wyselekcjonowanie ze złotych medalistów tego, który ten drugi warunek spełnia. Rozumowanie zatem trzyetapowe, więc i rezultat niższy niż poprzednie: 48,9%.

Także w przypadku pytania d) potrzebne jest złożone wnioskowanie: najpierw trzeba ustalić, że Michał zdobył brązowy medal, po czym w oparciu o eliminację nazwiska Nowak, dojść do wniosku, że nazywa się Janiak. Efekt: 39,5% poprawnych odpowiedzi.

Ostatni podpunkt tego zadania to wpisanie imion czterech chłopców na ich dyplomach. Z tym finalnym zadaniem poradziło sobie 31,6%, czyli prawie $\frac{1}{3}$ badanych trzecioklasistów.

Autorzy poniższych rozwiązań poprawnie odpowiedzieli na wszystkie pytania. Widać jednak, m.in. dzięki poprawkom widocznym na pracach, że dość często umykało im przy pierwszym czytaniu to, że w tekście niektóre dane podawane były w formie zaprzeczenia:

DYPLOM dla <hr/> NOWAKA za zdobycie brązowego medalu w skoku w dal	DYPLOM dla <i>Jurka</i> <hr/> JÓŻWICKIEGO za zdobycie złotego medalu w biegu na 60 metrów	DYPLOM dla <i>Adama</i> <hr/> KOWALCZYKA za zajęcie V miejsca w biegu na 1 kilometr
DYPLOM dla <i>Michał</i> <hr/> JANIAKA za zdobycie brązowego medalu w biegu na 60 metrów	DYPLOM dla <i>Piotra</i> <hr/> MALINOWSKIEGO za zdobycie srebrnego medalu w skoku w dal	DYPLOM dla <i>Jurka Jurka</i> <hr/> BARANOWSKIEGO za zdobycie złotego medalu w rzucie piłeczką

7. Przyjrzyj się uważnie tym dyplomom.

DYPLOM dla <i>Michał</i> <hr/> NOWAKA za zdobycie brązowego medalu w skoku w dal	DYPLOM dla <hr/> JÓŻWICKIEGO za zdobycie złotego medalu w biegu na 60 metrów	DYPLOM dla <i>Adama</i> <hr/> KOWALCZYKA za zajęcie V miejsca w biegu na 1 kilometr
DYPLOM dla <i>Michał</i> <hr/> JANIAKA za zdobycie brązowego medalu w biegu na 60 metrów	DYPLOM dla <i>Piotra</i> <hr/> MALINOWSKIEGO za zdobycie srebrnego medalu w skoku w dal	DYPLOM dla <i>Jurka</i> <hr/> BARANOWSKIEGO za zdobycie złotego medalu w rzucie piłeczką

Cztery z nich to dyplomy czwórki przyjaciół: Piotra, Michała, Adama i Jurka. Każdy z chłopców startował w innej konkurencji i każdy zajął inne miejsce. Adam, choć nie zdobył medalu, był bardzo zadowolony, bo od niedawna trenuje i po raz pierwszy brał udział w zawodach. Piotr był trochę zmartwiony mimo srebrnego medalu, bo bardzo chciał wygrać, ale cieszył się ze zwycięstwa Jurka.

Odpowiedz na poniższe pytania. Dla ułatwienia: Michał nie nazywa się Nowak, a nazwisko Jurka nie zaczyna się na literę J.

- W jakiej konkurencji startował Adam?
- W jakiej konkurencji startował Piotr?
- Jak nazywa się Jurka?
- Jak nazywa się Michał?
- Wpisz imiona tych czterech chłopców na właściwych dyplomach powyżej.

<i>w biegu na 1 kilometr</i>
<i>w skoku w dal</i>
<i>Baranowski</i>
<i>Nowak Janiak</i>

Spora grupa uczniów, bo aż 22,6% (por. diagram 6.) odpowiedziała poprawnie na dwa – najczęściej początkowe – pytania. Kolejne podpunkty czytanki okazały się dla nich już zbyt trudne:

<p>DYPLOM dla <i>Jurek</i></p> <p>Jurek NOWAKA za zdobycie brązowego medalu w skoku w dal</p>	<p>DYPLOM dla</p> <p>JÓŹWICKIEGO za zdobycie złotego medalu w biegu na 60 metrów</p>	<p>DYPLOM dla</p> <p><i>Adama</i> KOWALCZYKA za zajęcie V miejsca w biegu na 1 kilometr</p>
<p>DYPLOM dla</p> <p><i>Michał</i> JANIKA za zdobycie brązowego medalu w biegu na 60 metrów</p>	<p>DYPLOM dla</p> <p><i>Piotrek</i> MALINOWSKIEGO za zdobycie srebrnego medalu w skoku w dal</p>	<p>DYPLOM dla</p> <p>BARANOWSKIEGO za zdobycie złotego medalu w rzucie piłeczką</p>

- W jakiej konkurencji startował Adam?
- W jakiej konkurencji startował Piotr?
- Jak nazywa się Jurek?
- Jak nazywa się Michał?
- Wpisz imiona tych czterech chłopców na właściwych dyplomach powyżej.

<i>Kowalczyk w biegu na jeden kilometr.</i>
<i>w skoku w dal</i>
<i>Jurek Nowak</i>
<i>Piotrek Janowski</i>

Ale i w takich pracach widać, że uczniowie podejmowali próby poradzenia sobie z tą, wcale nie taką prostą, zagadką logiczną.

Na diagramie 5. zebrane są wyniki kolejnych podpunktów, a diagram 6. przedstawia rozkład liczby pytań, na które trzecioklasiści poprawnie odpowiedzieli. Czytanka *Dyplomy* miała łatwość 0,54.

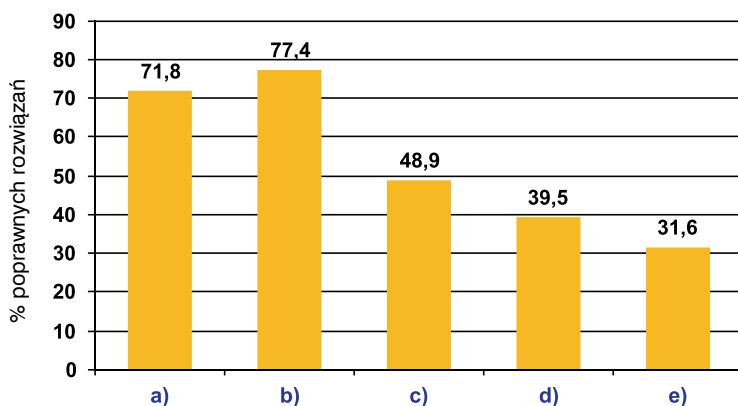


Diagram 5. Czytanie tekstu matematycznego – procent poprawnych odpowiedzi na poszczególne pytania dla czytanki *Dyplomy*.

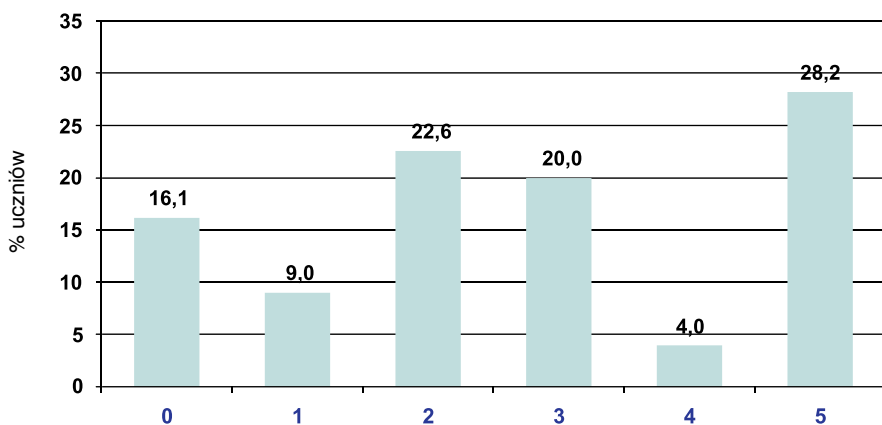


Diagram 6. Czytanie tekstu matematycznego – liczba poprawnych odpowiedzi na pytania dla czytanki *Dyplomy*.

Jak widać, najczęstszym rezultatem było udzielenie poprawnej odpowiedzi dla każdego z pięciu podpunktów czytanki – taki rezultat uzyskało 28,2% trzecioklasiistów. Drugim, co do częstości występowania, wynikiem były dwie poprawne odpowiedzi: 22,6% uczniów. Bez żadnego sukcesu pozostało 16,1% badanych dzieci.

Pierwsze trzy pytania czytanki badają umiejętność wyszukiwania informacji podanych w jawny sposób w tekście.

W przypadku pytania 3a) uczeń miał ustalić, w którym programie TVP: 1 czy 2 nadawany był teleturniej – słowo to raz tylko pojawiało się w tekście załączonego programu. Numer właściwego programu podało 81,0% trzecioklasistów.

W pytaniu 3b) należało znaleźć wskazaną audycję i odczytać godzinę jej rozpoczęcia – wcześniej trzeba było ustalić, w którym programie TVP jest ona pokazywana. Ta czynność okazała się banalnie prosta: 96,3% poprawnych odpowiedzi, czyli kłopoty z nią miał średnio jeden uczeń w liczącej 25 osób klasie.

W trzecim pytaniu z tej serii trzeba podać tytuł filmu dokumentalnego wyświetlanego we wskazanym programie – oba programy TVP proponują filmy dokumentalne, trzeba było wybrać ten właściwy. Tym razem poziom wykonania 85,8%.

Odpowiedzi uczniów na te trzy pytania w większości wyglądały podobnie:

3. Przeczytaj uważnie te programy telewizyjne i odpowiedz na pytania:

a) W którym programie TVP jest teleturniej?

TVP2

2 TVP

b) O której godzinie rozpoczyna się program „Aleja gwiazd”?

10:40

o 10:40

c) Jaki tytuł ma film dokumentalny wyświetlany w TVP1?

Sto tysięcy bożanów

Wskazaliśmy Sto tysięcy bożanów

Czasami tylko dochodziła do głosu potrzeba udzielenia odpowiedzi pełnym zdaniem⁸⁵:

a) W którym programie TVP jest teleturniej?

PROGRAM 2 TVP.

(gwiazda)

b) O której godzinie rozpoczyna się program „Aleja gwiazd”?

O 10:40 zaczyna się Aleja

c) Jaki tytuł ma film dokumentalny wyświetlany w TVP1?

Tytuł filmu dokumentalnego to „Sto tysięcy bożanów”.

3. Przeczytaj uważnie te programy telewizyjne i odpowiedz na pytania:

a) W którym programie TVP jest teleturniej?

W Programie 1 TVP

b) O której godzinie rozpoczyna się program „Aleja gwiazd”?

Program „Aleja gwiazd” rozpoczyna się o godz. 10:30

c) Jaki tytuł ma film dokumentalny wyświetlany w TVP2?

Najbardziej tajemnicze skrytka świata

Film dokumentalny wyświetlany w 2 TVP ma tytuł: /

⁸⁵ Druga z prac dotyczy wersji czytanki pochodzącej z równoległej grupy testu.

Kolejne pytania wiązały się nie tylko z wyszukaniem potrzebnych danych, lecz także z wykorzystaniem ich w obliczeniu czasowym.

W pytaniu 4a) należało, po ustaleniu początku i końca programu dla przedszkolaków, obliczyć czas jego trwania – poradziło sobie z tym zadaniem 66,6% trzecioklasistów.

Analogiczne czynności, choć dla bardziej skomplikowanych danych, trzeba było także wykonać udzielając odpowiedzi na następne pytanie – w efekcie wynik sporo niższy, bo 48,9%.

W pytaniu 4c), z którym poradziło sobie 59,7% uczniów, należało – w oparciu o znajomość czasu trwania programu i chwili jego rozpoczęcia – ustalić czas zakończenia.

Odpowiadając na te pytania uczniowie najczęściej nie ujawniali swoich sposobów poszukiwania wyników:

4. Znajdź w programach potrzebne informacje i odpowiedz na pytania:

a) Ile minut trwa program dla przedszkolaków?

~~25~~ 25 min

b) Ile czasu trwa program na żywo?

2 godz 10 min

c) O której godzinie kończy się „M jak miłość”, jeśli odcinek trwa 55 minut?

13:30

4. Znajdź w programach potrzebne informacje i odpowiedz na pytania:

a) Ile minut trwa program dla przedszkolaków?

25 min

b) Ile czasu trwa program na żywo?

10:10 - 8:30 = 2:10

c) O której godzinie kończy się „M jak miłość”, jeśli odcinek trwa 55 minut?

13:50

Kolejne dwie prace, mimo usterek w punkcie b, ładnie pokazują, że strategia dopełniania zdaje egzamin w obu typach obliczeń czasowych:

4. Znajdź w programach potrzebne informacje i odpowiedz na pytania:

a) Ile minut trwa program dla przedszkolaków?

~~50~~ 25 min

b) Ile czasu trwa program na żywo?

8:30 → 9:00 → 10:10
22 min → 10:10 → 10:10
1 godz 10 min

c) O której godzinie kończy się „M jak miłość”, jeśli odcinek trwa 55 minut?

12:55 → 13:30 → 13:30
35 min → 13:30 → 13:30
13:30

4. Znajdź w programach potrzebne informacje i odpowiedz na pytania:

- a) Ile minut trwa program dla przedszkolaków?
b) Ile czasu trwa program na żywo?
c) O której godzinie kończy się „M jak miłość”,
jeśli odcinek trwa 55 minut?

9:50 - 10:15 = 25 min
8:20 - 9:10 = 50 min
12:55 - 13:20 = 25 min

W tych samych badaniach uczniowie rozwiązywali zadanie tekstowe⁸⁶:

Maciek zaczął odrabiać lekcje o 15:50, a skończył o 16:17. Ile czasu mu to zajęło?

które jest praktycznie identyczne z pytaniem 4a. W obu wypadkach trzeba ustalić dokładnie to samo:

- ile czasu mija od 9:50 do 10:15 – dla pytania 4a;
- ile czasu mija od 15:50 do 16:17 – dla zadania powyżej.

Nawet, obiektywnie, pytanie stawia trzecioklasistom nieco wyższe wymagania, bo muszą odszukać samodzielnie potrzebne dane, podczas gdy w zadaniu tekstowym są one podane.

Tym dziwniejsze jest zestawienie uzyskanych wyników: 66,6% poprawnych odpowiedzi dla 4a) i 54,0% dobrych rozwiązań dla przytoczonego zadania. W obu wypadkach sposób oceniania był identyczny – liczyło się podanie poprawnej odpowiedzi.

Dlaczego wynik dla pytania z czytanki jest aż o 12,6% wyższy?

Wydaje mi się, że jednym z powodów może być to, że cała czytanka jest „mało szkolna” – nie ma liczb podanych w treści pytania, może więc do głosu dochodzi zdrowy rozsądek, a nie opisywane wcześniej strategie obronne.

Nieco więcej uczniowskich strategii ujawniło się przy okazji ostatniego zadania tej czytanki, w którym trzeba było wykorzystać kilka informacji, a ponadto starannie analizować, które programy były obejrzone w całości, a które tylko częściowo:

5. Janek włączył telewizor tego dnia o 11:00 i przez dwie i pół godziny oglądał drugi program. Podaj tytuły programów, które obejrzał w całości.

Familiada	+	Kajuspanialonec otwarcia Świata	+
25		7 godz 10 min	
Bożja Tajemnica	+	Sport-telegram	+
15		5	
			40

⁸⁶ Dąbrowski M. (2012a); zadanie to jest uproszczoną wersją zadania z badań w roku 2010 (por. wcześniej).

5. Janek włączył telewizor tego dnia o 11:00 i przez dwie i pół godziny oglądał drugi program. Podaj tytuły programów, które obejrzał w całości.

$11:00 + 2:30 = 13:30$
 Familiada, Najwspanialsze akwarium świata, Porcja Twarzy ludzki, Sport - Telegram, Złotopolicy, ~~...~~

5. Janek włączył telewizor tego dnia o 11:00 i przez dwie i pół godziny oglądał drugi program. Podaj tytuły programów, które obejrzał w całości.

11:00 Familiada
 11:25 Najwspanialsze akwarium świata
 12:30 Porcja Twarzy ludzki
 12:45 Sport - Telegram
 12:50 Złoto polski

Autor pierwszego z tych rozwiązań starał się zliczać czas kolejnych programów, natomiast autor drugiego zaczął od ustalenia „ram czasowych”, co pozwoliło mu, finalnie, na korektę rozwiązania. Jak widać w trzeciej pracy, wystarczała staranna „wylizanka”.

I przykład z drugiej wersji tego tekstu – tym razem całość rozumowania została przeprowadzona na programie:

Program 1 TVP		Program 2 TVP	
09:20	Weekendowy magazyn filmowy – program kulturalny	08:15	Pytanie na śniadanie – program na żywo
09:50	Jedynkowe przedszkole – program dla przedszkolaków	10:30	Aleja gwiazd – program rozrywkowy, Polska
10:20	Baśnie i bajki polskie – serial, Polska	10:55	Dzieciaki górą – program rozrywkowy, Polska
10:45	Sto tysięcy bocianów – film dokumentalny, Polska	11:15	Najwspanialsze akwarium świata – film dokumentalny, Wielka Brytania
11:10	Hannah Montana – serial, USA	12:10	Król Maciuś Pierwszy – serial, Polska/Francja
11:40	Jaka to melodia – teleturniej	12:20	Historia piłki nożnej – program sportowy
12:05	Wiadomości	13:25	Makłowicz w podróży – program kulinarny
12:15	Złota rączka – serial, USA	13:55	Złotopolicy – serial, Polska
12:55	M jak miłość – serial, Polska		

5. Janek włączył telewizor tego dnia o 10:00 i przez dwie i pół godziny oglądał pierwszy program. Podaj tytuły programów, które obejrzał w całości.

Baśnie i bajki polskie, Sto tysięcy bocianów, Hannah Montana, Jaka to melodia? Wiedomości

Z zadaniem tym poradziło sobie jedynie 18,4% trzecioklasistów. Dużo trudności sprawiały im programy obejrzone tylko częściowo przez Janka – 16,3% uczniów włączyło jeden lub oba do swojej odpowiedzi:

5. Janek włączył telewizor tego dnia o 11:00 i przez dwie i pół godziny oglądał drugi program. Podaj tytuły programów, które obejrzał w całości.

11:00 - 2:30 = 1:30
~~Familiada~~, Najwspanialsze akwarie świata, Pasażerzy ludzi, Sport-telegram, Złotopolscy, Panorama

Co ciekawego w telewizji?

Program 1 TVP		Program 2 TVP	
09:20	Klub przyjaciół Myszki Miki – serial, USA	08:30	Pytanie na śniadanie – program na żywo
09:50	Jedynkowe przedszkole – program dla przedszkolaków	10:40	Aleja gwiazd – program rozrywkowy, Polska
10:15	Baśnie i bajki polskie – serial, Polska	11:05	✓ Familiada – teleturniej
10:45	Sto tysięcy bocianów – film dokumentalny, Polska	11:25	✓ Najwspanialsze akwarie świata – film dokumentalny, Wielka Brytania
11:10	Brodzik od kuchni – program kulinarny	12:30	✓ Poezja łączy ludzi – program kulturalny
11:40	Kabaretowa jedynka – program rozrywkowy	12:45	✓ Sport-telegram – wiadomości sportowe
12:05	Wiedomości	12:50	✓ Złotopolscy – serial, Polska
12:15	Złota rączka – serial, USA	13:30	✓ Panorama
12:55	M jak miłość – serial, Polska		

5. Janek włączył telewizor tego dnia o 11:00 i przez dwie i pół godziny oglądał drugi program. Podaj tytuły programów, które obejrzał w całości.

~~11:00 - 2:30 = 1:30~~
 11:05 Złota rączka do 13:30

Diagram 7. zbiera wyniki dla kolejnych pytań, a diagram 8. przedstawia rozkład liczby sukcesów. Czytanka okazała się równie prosta dla trzecioklasistów, jak pierwsza z prezentowanych – jej łatwość była równa 0,66.

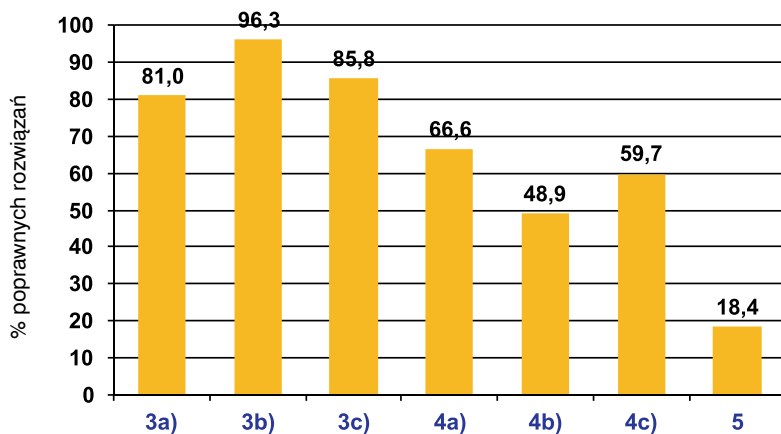


Diagram 7. Czytanie tekstu matematycznego – procent poprawnych odpowiedzi na poszczególne pytania dla czytanki *Co ciekawego w telewizji?*

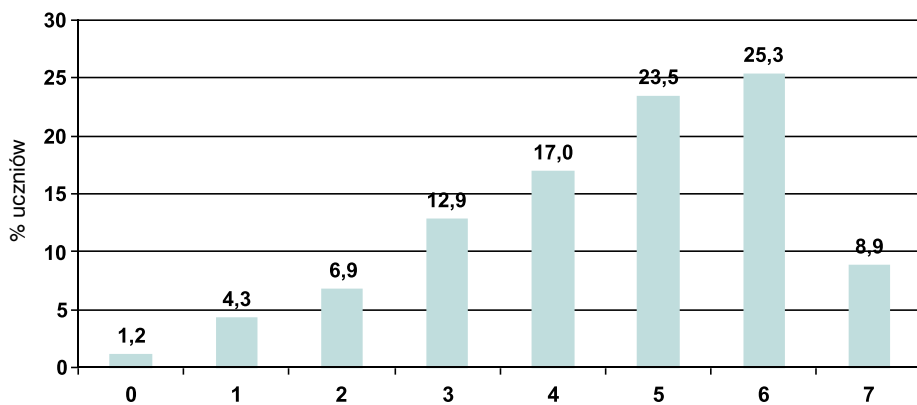


Diagram 8. Czytanie tekstu matematycznego – procentowy rozkład liczby zadań poprawnie rozwiązanych przez uczniów pytania dla czytanki *Co ciekawego w telewizji?*

Najczęściej spotykanym wynikiem było 6 poprawnych odpowiedzi – stało się to udziałem 25,3% trzecioklasistów, czyli ich ponad $\frac{1}{4}$. Ze wszystkimi siedmioma zadaniami poradziło sobie 8,9% uczniów, a jedynie 1,2% nie podało żadnej dobrej odpowiedzi.

Warto zwrócić uwagę na kształt tego rozkładu i rozkładu dla czytanki *Ulubione dyscypliny sportu*. W przypadku obu tych czytanek rozkład sukcesów jest zbliżony do rozkładu normalnego, z pewnym przesunięciem w prawo. Może to efekt realistycznego charakteru obu tych czytanek?

Podsumowanie

Odpowiadając na pytania w czytankach matematycznych pokazanego typu uczniowie mają okazję do wydobywania danych z tekstu, wnioskowania, operowania jedną lub kilkoma informacjami, formułowania wniosków i odpowiedzi, zatem do wielu matematycznie (i nie tylko) ważnych aktywności. I okazuje się, że niezależnie od tematyki czytanki radzą sobie z tym całkiem nieźle⁸⁷:

- wydobywanie informacji podanych w tekście i proste wnioskowanie – wykonanie średnio na poziomie ponad 83%,
- przetwarzanie wyszukanej informacji i bardziej złożone wnioskowanie – wykonanie średnio na poziomie ponad 51%,
- posługiwanie się w syntetyczny sposób kilkoma informacjami – wykonanie średnio na poziomie ponad 33%.

Łatwość przytoczonych czytanek wahała się od 0,54 do 0,66 – średnio uczniowie odpowiadali poprawnie na ponad 60% pytań, co daje wynik dwukrotnie wyższy niż „minimum maturalne”.

Moim zdaniem, tego typu teksty trzecioklasiści czytają znacznie lepiej i znacznie chętniej niż wydaje się dorosłym – m.in. nauczycielom i rodzicom. I to nie w braku umiejętności czytania ze zrozumieniem trzeba szukać podstawowej przyczyny ich kiepskich osiągnięć w zakresie rozwiązywania zadań tekstowych.

Być może tego typu czytanki są dla uczniów swoistym wyzwaniem intelektualnym, tym atrakcyjniejszym, że nie wiążącym się – w ich świadomości – z doświadczeniami szkolnymi. To może tłumaczyć zarówno poziom wyników, jak i mniejsze niż dla typowych zadań tekstowych nasilenie występowania strategii obronnych.

⁸⁷ Wyniki na podstawie czterech przedstawionych czytanek matematycznych.

ROZDZIAŁ II. RZUT OKA NA SZKOLNĄ CODZIENNOŚĆ

Badania umiejętności matematycznych trzecioklasistów pokazują⁸⁸, że nasze szkoły „rozpadają” się na dwie grupy istotnie różniące się uzyskiwanymi wynikami. Pierwsza z nich obejmuje szkoły z dużych (liczących ponad 100.000 mieszkańców) oraz średnich (od 10.000 do 100.000 mieszkańców) miast. Rezultaty uczniów tych szkół są wyraźnie powyżej średniego wyniku dla całego rocznika trzecioklasistów. Uczniowie z pozostałych typów szkół, czyli szkół wiejskich oraz szkół z małych miast (do 10.000 mieszkańców) mają na ogół bardzo zbliżony poziom rezultatów, który jest wyraźnie słabszy od wyniku średniego.

Rozpiętość wyników tych dwóch grup szkół dla niektórych zadań wynosi kilkanaście procent.

Przyjrzyjmy się „edukacyjnej codzienności klasy trzeciej” w szkołach z obu tych grup.

Wykorzystamy w tym celu obserwacje zajęć z zakresu edukacji językowej i edukacji matematycznej, które w maju i czerwcu 2008 roku przeprowadzono w 20 szkołach z dużych miast⁸⁹, a dwa lata później, czyli w maju i czerwcu 2010 roku, w 20 szkołach wiejskich⁹⁰.

Podczas każdego zajęcia dwóch obserwatorów wypełniało specjalnie w tym celu przygotowane arkusze obserwacji⁹¹ – jeden z nich skupiał się na wypowiedziach nauczyciela, podczas gdy drugi śledził przebieg zajęć oraz notował wypowiedzi uczniów.

Łącznie w obu typach szkół obserwowano 148 zajęć w 40 klasach trzecich, trwających 6638 minut. To ogromna porcja obserwacji i wielka dawka informacji o procesie językowego oraz matematycznego kształcenia w klasie trzeciej. Szczegółowe dane o obserwowanych zajęciach zbiera tabela 1. oraz diagram 1.

⁸⁸ Por. np. Dąbrowski M. (red.) 2009a, 2011a; Murawska B., Żytko M. (red.) 2012.

⁸⁹ Por. Dąbrowski M. 2009e.

⁹⁰ Por. Dąbrowski M. 2011e.

⁹¹ Arkusze zostały zaprojektowane z wykorzystaniem wybranych kategorii zachowań proponowanych przez R. F. Balesa oraz N. A. Flandersa, por. Putkiewicz E. 2002.

Tabela 1. Liczba, czas trwania, lokalizacja i tematyka obserwowanych zajęć.

	Zajęcia ogółem		Edukacja językowa		Edukacja matematyczna	
	Liczba zajęć	Czas (min)	Liczba zajęć	Czas (min)	Liczba zajęć	Czas (min)
Szkoły ogółem	148	6638	83	3726	65	2912
Szkoły wiejskie	70	3117	37	1673	33	1444
Szkoły miejskie	78	3521	46	2053	32	1468

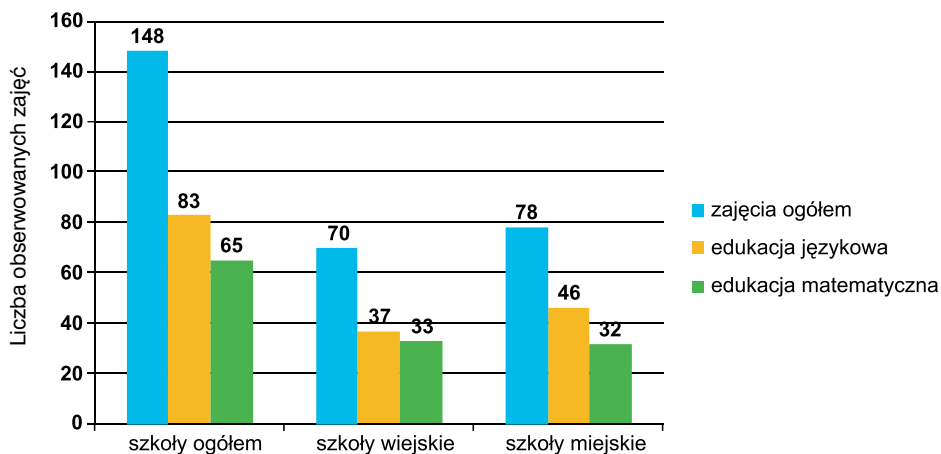


Diagram 1. Liczba, lokalizacja i tematyka obserwowanych zajęć.

Zgodnie z planowaną organizacją badań, obserwatorzy w każdej ze szkół mieli uczestniczyć w dwóch zajęciach poświęconych rozwijaniu umiejętności językowych dzieci oraz w dwóch zajęciach poświęconych rozwijaniu umiejętności matematycznych. Okazało się jednak, że nie wszędzie udało się to wyegzekwować – niektórzy nauczyciele wyraźnie chętniej pokazywali, jak uczą języka. W efekcie przeprowadzono obserwacje 83 zajęć językowych (3726 minut) oraz 65 zajęć matematycznych (2912 minut). Można wysnuć wniosek, że niektórzy nauczyciele uczestniczący w badaniach zdecydowanie mniej pewnie czuli się w obszarze rozwijania umiejętności matematycznych uczniów, stąd taka końcowa proporcja obserwowanych zajęć.

Przytaczać będę przede wszystkim wypowiedzi nauczycieli, z zachowaniem ich kolejności, formy i układu, zazwyczaj pomijając towarzyszące im reakcje uczniów. Wypowiedzi uczniów będę podawać jedynie wtedy, gdy istotnie wpływają one na dalsze wydarzenia.

Na początku każdej sekwencji wypowiedzi podany jest identyfikator szkoły. Szkoły wiejskie mają identyfikatory W1-W20, szkoły miejskie: M1-M20.

II.1 PROCES KSZTAŁCENIA?

Tabela 2. prezentuje informacje na temat wybranych rodzajów aktywności ucznia podczas obserwowanych zajęć. Przytoczone dane dotyczą procentu czasu przeznaczanego na poszczególne typy działań uczniów⁹².

Tabela 2. Procentowy udział wybranych rodzajów aktywności ucznia w procesie kształcenia na obserwowanych zajęciach.

Uczniowie:	Zajęcia ogółem			Edukacja językowa			Edukacja matematyczna		
	Szkoły razem	Szkoły wiejskie	Szkoły miejskie	Szkoły razem	Szkoły wiejskie	Szkoły miejskie	Szkoły razem	Szkoły wiejskie	Szkoły miejskie
uczestniczą w czynnościach organizacyjnych	7,8	7,1	8,4	8,0	8,0	8,1	7,5	6,1	8,8
uczestniczą w procesie sprawdzania wiedzy	60,0	61,1	59,0	45,3	40,6	49,1	78,8	84,9	72,8
sluchają nauczyciela, który mówi, czyta, prowadzi pogadankę	24,2	27,3	21,5	31,9	38,1	26,9	14,4	14,7	14,0
dyskutują i rozmawiają z nauczycielem i kolegami	2,4	3,7	1,3	4,2	6,8	2,1	0,1	0,1	0,2
są aktywni twórczo/badawczo	2,7	2,3	3,0	4,6	4,0	5,1	0,2	0,4	0,1
biorą udział w grach i zabawach dydaktycznych	2,4	4,0	1,0	1,0	2,2	0,1	4,1	6,2	2,1
czas trwania zajęć (w minutach)	6638	3117	3521	3726	1673	2053	2912	1444	1468

Sprawdzanie wiedzy

Jak widać, średnio 60,0% czasu na obserwowanych zajęciach nauczyciele przeznaczali na szeroko rozumiane sprawdzanie wiedzy uczniów. Proces ten mógł przyjmować różną postać: zwykłego odpytywania, utrwalania umiejętności poprzez wykonywanie przez uczniów kolejnych ćwiczeń albo obliczeń czy poprzez rozwiązywanie serii podobnych zadań. W przypadku trwających 45 minut zajęć oznacza to 27 minut tego typu działań uczniów.

Zjawisko to z bardzo zbliżonym nasileniem występuje dla obu typów szkół.

Zdecydowanie większy nacisk na sprawdzanie wiedzy kładli nauczyciele na zajęciach z edukacji matematycznej – średnio poświęcili na to 78,8% czasu trwania

⁹² Działania te nie były traktowane rozłącznie, tzn. jeśli pogadanka nauczyciela służyła sprawdzeniu wiedzy uczniów, to czas na nią przeznaczony był uwzględniany zarówno w pozycji: *uczniowie uczestniczą w procesie sprawdzania wiedzy*, jak i w pozycji: *uczniowie słuchają nauczyciela, który mówi, czyta, prowadzi pogadankę*.

zajęć (ponad 35 minut na typowej lekcji). Oznacza to, że przez znaczną większość czasu zajęć o tematyce matematycznej uczniowie obserwowanych klas trzecich wykonywali kolejne podobne obliczenia albo rozwiązywali kolejne podobne zadania tekstowe, odpowiadając przy okazji na różne, także typowe, pytania nauczyciela. W nieco większym stopniu było to udziałem uczniów szkół wiejskich: 84,9% czasu zajęć, czyli ponad 38 minut typowej lekcji, w nieco mniejszym – uczniów szkół miejskich: 72,8%, czyli prawie 33 minuty.

Ci sami nauczyciele podczas zajęć językowych na sprawdzanie wiedzy uczniów przeznaczali wyraźnie mniej czasu: 45,3%. Tym razem częściej byli „odpytywani” uczniowie szkół miejskich: 49,1% czasu, nieco rzadziej wiejskich: 40,6%.

Pogadanka czy dyskusja?

Podczas obserwowanych zajęć uczniowie przez 24,2% czasu słuchali nauczyciela, który przede wszystkim prowadził pogadankę. Częściej miało to miejsce w szkołach wiejskich: 27,3% niż miejskich: 21,5%. Zgodnie z oczekiwaniami, pogadanka pojawiała się przede wszystkim podczas zajęć z edukacji językowej: 31,9% czasu zajęć (odpowiednio: 38,1% w szkołach wiejskich, 26,9% w miejskich), zdecydowanie rzadziej w trakcie zajęć z edukacji matematycznej: 14,4% czasu (odpowiednio: 14,7% i 14,0%).

Pogadanki prowadzone przez obserwowanych nauczycieli ograniczały udział uczniów do udzielania odpowiedzi na bardzo konkretne i zamknięte, w sensie oczekiwanych odpowiedzi, pytania. Czasami zresztą nauczyciel sam na swoje pytania odpowiadał (por. także dalej). Oto kilka przykładów tego typu „narracji”:

W2: (uczniowie czytają głośno wiersz nawiązujący do Dnia Matki)

- *Jakie były zawody?* [dzieci podają, jakie zawody mamy były wymienione w wierszu]
- *Poszukajcie. Jeszcze był jakiś zawód. Nie nazwał go autor wprost, ale mówił co robi! Poszukajcie w wierszu. O jakim zawodzie zapomnieliście?*
- *Wróćmy do zawodów wypisanych. Kiedy mama jest pielęgniarką, co wtedy musi zrobić?*
- *Kto mamie pomaga?*
- *W czym pomagasz, gdy mama jest kucharką? Jaką zupę byś ugotowała?*
- *Kiedy mama jest księgową? Poszukajcie, co mówi autor.*
- *W czym dzieci pomagają w ogródku?*
- *Co jeszcze robi mamusia? Kto powinien sprzątać zabawki?*

- *Co na pewno robią mamy, a nie dzieci?*
- *Jak byśmy nazwali zawód, w którym pani zajmuje się praniem?*
- ...
- *To robią wszystkie mamy w domu. Ale niektóre mamy chodzą jeszcze do pracy. Kiedy mamy chodzą do pracy, co robią?*

W6:

- *Czy wszystkie dzieci zrozumiały tekst?*
- *Jak mieli na imię chłopiec i dziewczynka z opowiadania?*
- *Jak zachowują się dzieci? Czy tak należy się zachowywać?*
- *Co się dzieje w tym autobusie? Oni zajmowali się czym?*
- *Czy to jest dobre zachowanie?*

...

- *W którym miejscu Krzysz źle postąpił?*
- *Kogo spotyka? Mamę, która niesie co?*

W10: [po przeczytaniu czytanki „Sztorm”]

- *Jak załoga zachowywała się podczas sztormu?*
- *Słuchajcie, bo oni byli w trakcie połowu. Mieli sieci pełne ryb.*
- *Co musieli zrobić? Odcięli sieci.*
- *Chociaż byli zadowoleni z tego połowu, ale musieli z tego zrezygnować, żeby ratować siebie, ludzi, kuter.*
- *Więc oni tutaj, jak się zachowali mimo niebezpieczeństwa? Wypompowywali wodę, tak?*
- *Odcięli sieci.*
- *Kto ich uratował?*
- *Łódź, która była w po-bli-żu udzieliła im pomocy.*

W18:

- *Jakie rodzaje znacie pociągu?*
- *Zostawcie już tę lokomotywę parową!*
- *Pociągi przewożące co? Towar. I kogo? Ludzi.*
- *Właśnie. O to mi właśnie chodziło.*
- *Czyli mamy towarowe i pasażerskie.*
- *Na jakie byście podzielili pociągi pasażerskie?*
- *Moi drodzy! Na osobowe, pospieszne, expressowe, intercity i eurocity.*
- *Każdy z tych pociągów się czymś charakteryzuje.*

[Nauczycielka opisuje je ze względu na częstotliwość zatrzymywania się.]

– *I mamy też różne wagony.*

[Nauczycielka prezentuje różne oznaczenia, jakie można spotkać w wagonach, np. zakaz palenia, ...]

...

– *Gdzie musielibyście iść, jeżeli chcielibyście kupić bilet? Dowiedzieć się o rozkład jazdy?*

– *Dwo... Dworzec. Jaki? Kolejowy.*

– *A na przykład, gdy chcemy dowiedzieć się więcej informacji, to gdzie my musimy iść?*

– *Do okienka, gdzie będzie napis INFORMACJA.*

M13:

– *Kto przeniósł stolicę i kiedy?*

– *Ale chciałabym wiedzieć, w którym wieku. Kosma?*

– *Jakie było przeznaczenie zamku, Ola?*

– *A co się stało z zamkiem podczas II wojny światowej?*

– *Kto go odbudował?*

– *A co obecnie mieści się w Zamku Królewskim?*

M5:

– *Podobała wam się ta bajka?*

– *Jakie postacie występują w tej bajce?*

– *Dobrze.*

– *Kto jest bohaterem?*

– *Świetnie. Bardzo dobrze.*

– *Jaki był rycerz?*

– *Dobrze, świetnie, bardzo dobrze.*

– *Co można jeszcze powiedzieć?*

– *Oczywiście, świetnie.*

– *Nie, nie, nieopodal czyli blisko.*

– *Co on zrobił? Jakie miał zadanie?*

– *Ale powiedz całym zdaniem.*

– *Miał smoka zwyciężyć.* (nauczycielka sama kończy odpowiedź)

– *Co on zrobił?*

– *Właśnie. Po-pro-sił*

– *Smok jaki był? Za-sko-czo-ny* (ponownie sama odpowiada)

- *Co się stało ze smokiem?...*
- *I co zrobił? Od-le-ciał* (znowu sama odpowiada na zadane pytanie)

M1:

- *Słuchajcie, powiedzcie mi, dlaczego po autostradzie tak się fajnie jeździ?*
- *Nie ma dziur, można szybciej jechać, światła mnie nie zatrzymują.* (powtarza za uczniami) *No a w mieście? Na jakie problemy napotykać ludzie w mieście? Jeździecie po mieście z rodzicami.*
- *Na rowerzystów* (powtarza za uczniem), *rowerzyści jeżdżą ostatnio ścieżkami rowerowymi.*
- *Proszę, korki!* (powtarza za uczniem), *zmorą kierowców, plagą polskich dróg są korki. Pamiętasz, jak się spóźniłeś na gimnastykę? Bo stałeś w korku! A dlaczego powstają korki?*
- *W takim razie nasze drogi są zbyt wą., wąskie* (podpowiada) *i dlatego są te korki. Słuchajcie, zamknijcie na chwilę podręczniki, mam dla was taką zagadkę związaną z korkami ulicznymi.*

Ten ostatni przytoczony fragment pogadanki miał doprowadzić do „naturalnego” sformułowania zagadki o korkach ulicznych. Tego typu zabiegi „wkładania” właściwych słów w usta dzieci pojawiały się zresztą dość często w różnych szkołach. Jak widać z przytoczonych przykładów, udział dzieci w tego typu „rozmowie” ma bardzo konkretne ramy, a pytania stawiane przez nauczyciela są najczęściej tak formułowane, że mogą na nie paść jedynie te oczekiwane „właściwe” odpowiedzi. Gdy nie padają one z ust uczniów, podaje je sam nauczyciel. Niekiedy pogadanka przekształcała się w wykład prowadzony przez nauczyciela.

Podczas obserwowanych zajęć zdecydowanie rzadziej dochodziło do faktycznej dyskusji pomiędzy nauczycielem i dziećmi – zajęła ona 2,4% czasu obserwacji, co oznacza mniej więcej minutę na typowej 45-minutowej lekcji. Nieco łatwiej było ją zaobserwować w szkołach wiejskich: 3,7% niż miejskich: 1,3% oraz na zajęciach z edukacji językowej: 4,2% niż edukacji matematycznej: 0,1%⁹³.

Dyskusja wystąpiła na 18 spośród 148 obserwowanych zajęć: na 8 zajęciach na 70 w szkołach wiejskich oraz 10 na 78 w miejskich. Nie pojawiła się natomiast na **żadnych zajęciach** w 27 szkołach (na 40): 14 wiejskich oraz 13 miejskich.

⁹³ Średnio mniej niż 3 sekundy na typowej lekcji.

Oto fragmenty tych nielicznych i na ogół krótkich dyskusji:

W9:

- *Te buźki symbolizują różne nastroje. Macie wybrać po jednej buźce, symbolizującej Wasze odczucia po III klasie. Sugerujcie się swoimi odczuciami, a nie kolegów i koleżanek. Przyklejamy na lewe ramię.*
- *Wstają teraz buźki żółte, czyli te wesołe. Wstają teraz te buźki różowe, czyli takie mieszane uczucia.*
- *Maciuś, widzę, że masz buźkę różową. Wstań i opowiedz o swoich uczuciach.*
- ...
- *Ach, to Cię martwi? Wycieczka do Krakowa? Z przyczyn pogodowych musieliśmy ją odwołać, ale nie martw się, bo będzie ona we wrześniu.*
- *Sylwia, a Ty powiedz, dlaczego?*
- *A jak byście poradzili Sylwii? W jaki sposób może to poprawić?*
- ...
- *Dokuczały Ci? A kiedy, w jakich okolicznościach? A z jakiego powodu dzieci Ci dokuczały?*

W20:

- *Możecie to sobie wyobrazić? 14 tysięcy odmian ryżu.*
- *Jak jecie ryż, to zastanawiacie się, jaką jecie odmianę? No nie, prawda?*

U: *I jaśminowy ryż też.*

- *Jaśminowego nie widziałam, ale być może.*

[rozmawia z dziećmi na temat sposobu odżywiania się mieszkańców Azji]

U: *Ja chcę powiedzieć, że oni nie mogą dotykać sztuccami buzi, mogą jeść tylko jedzenie i dlatego pałeczkami jedzą.*

- *... No może jest taki zwyczaj, taki przesąd, że nie można sztuccami dotykać ust, być może. To jest taka ciekawostka, o której ja też nie wiedziałam. Co jeszcze Michał?*

U: *I jeszcze ja słyszałem, że Chińczycy jedzą drewnianymi pałeczkami, dlatego że wierzą, że metal może zmienić smak potrawy, a drewno zostawia smak tej potrawy taki, jaki jest prawdziwy. (...)*

M12:

- *Jak wyobrażacie sobie urządzenie, które jest w tekście?*
- *Czy zamontowane na ścianie? Jak sobie wyobrażasz?*
- *Kto ma jeszcze jakiś pomysł?*

- *To się przeniesiesz w inne miejsce? Taki środek lokomocji?*
- *Wszystkie wasze pomysły są bardzo ciekawe.*

M15:

- *Jakimi cechami charakteru odznaczał się Jarek?*
- *Czy był łatwym celem? Jak uważacie?*
- *Jak sądzisz, czy miał tego świadomość?*

M16:

- *Proszę powiedzieć czym różniło się wypracowanie Tomka od innych?*
- *Co byś chciała dopowiedzieć?*
- *Zastanówcie się, w jaki sposób mogą spełnić się czary Tomka?*
- *Jakie jeszcze macie propozycje?*
- *Wyobraźcie sobie, że macie taką czarodziejską moc. Co byście dziewczynce powiedzieli?*

Aktywność twórcza uczniów

Aż w 29 szkołach: 16 wiejskich i 13 miejskich nie pojawił się żaden fragment zajęć, w którym uczniowie mieliby okazję do faktycznego twórczego działania. Pewne przejawy dziecięcej twórczości dały się zauważyć podczas 15 zajęć: 7 w szkołach wiejskich (na 70) oraz 8 w szkołach miejskich (na 78). **Na pozostałych 133 obserwowanych zajęciach działania uczniów były absolutnie i wyłącznie odtwórcze.**

W efekcie, dzieci były twórcze średnio przez 2,7% zajęć, tzn. nieco ponad minutę w ciągu typowej lekcji. W obu typach szkół okazji tych było jednakowo mało. Zdecydowanie więcej szans na twórczość uczniowie mieli w trakcie zajęć z edukacji językowej⁹⁴, podczas których mogli oni samodzielnie:

- napisać, dlaczego kochają swoje mamy,
- opisać Krainę Czarów,
- sformułować pisemną wypowiedź o stosunku do osób o innym kolorze skóry,
- napisać krótki wiersz dotyczący morza i wakacji,
- napisać zakończenie opowiadania,
- napisać receptę na przyjemną podróż pociągiem,
- ułożyć przysłowie o przyjaźni,

⁹⁴ Niektóre z sytuacji, które pojawiły się w szkołach miejskich miały charakter plastyczny. Usunięcie ich z tego zestawienia znacznie obniża czas przeznaczony na zajęciach z edukacji językowej na twórczość.

- zaprojektować maszynę, np. do tworzenia chmur i napisać do niej instrukcję obsługi,
- napisać wiersz,
- zaprojektować i wykonać plakat zapraszający do zwiedzania Warszawy,
- przewidzieć i namalować wygląd Polski za 50 lat,
- przedstawić w postaci dramowych scenek to, co by chciały wyczarować dla siebie i innych, gdyby miały taką możliwość,
- zaprojektować okładkę książki.

Sześć początkowych sytuacji wystąpiło w szkołach wiejskich, siedem pozostałych – w miejskich.

Podczas zajęć rozwijających umiejętności matematyczne tylko dwa razy dano dzieciom szansę na wykazanie twórczej inicjatywy: w jednej ze szkół wiejskich wymyślały jak najwięcej działań, dających w wyniku 6, a w jednej z miejskich formułowały różne pytania pasujące do podanej treści zadania. **Daje to średnio nieco ponad 5 sekund matematycznej twórczości na 45 minut zajęć.**

Jak widać, zarówno w obserwowanych szkołach miejskich, jak i w szkołach wiejskich, **poziom aktywności intelektualnej dzieci był jednakowo niski.** W obu środowiskach twórczość uczniów podczas obserwowanych zajęć okazała się zjawiskiem marginalnym.

Daje się jednak zauważyć pewną różnicę. W szkołach miejskich kilkakrotnie podczas zajęć pojawiły się także inne sytuacje, które – prawdopodobnie – miały dawać okazję dzieciom do twórczości. Miały, ale z powodu „nadaktywności” nauczyciela funkcji tej nie pełniły, gdyż po sformułowaniu zadania problemowego nauczyciel nie dał uczniom szansy na podjęcie prób jego samodzielnego rozwiązania – ściśle kierując krok po kroku ich czynnościami sam podawał to rozwiązanie. Podczas zajęć obserwowanych w szkołach wiejskich tego typu prób nie zauważono. Można więc zaryzykować tezę, że nauczyciele szkół z dużych miast mieli świadomość, że jest to wskazany czy „oczekiwany” element zajęć, lecz zawiódł nieco ich warsztat zawodowy, natomiast nauczyciele szkół wiejskich nie ujawnili tego typu wiedzy.

Oto kilka przykładów tego typu sytuacji:

M1:

- *Oczywiście korek jest bardzo długi, ale nas interesują tylko cztery samochody, które w tym korku stoją. Mateuszu, weź swoją kartkę i przeczytaj, jaka jest pierwsza wskazówka.*
- *Tico nie jest pierwszy (powtarza za uczniem), zatem mamy jakąś drogę, na pewno nie jest to autostrada i gdzieś na tej drodze stoi Tico. Umieść ten samochód gdzieś na tej drodze. Może być tutaj.*

- *Przeczytaj drugą wskazówkę.*
- *O jakich dwóch samochodach mówi ta wskazówka?*
- *Spróbuj tutaj u góry ustawić te samochody tak, aby spełniały warunki tej wskazówki.*
- *Czy teraz kierowca mikrobusu może widzieć dzieci na tylnym siedzeniu? Może widzieć!*
- *Proszę mi powiedzieć, jaka jest kolejna wskazówka?*
- *W takim razie, gdzie będzie stał TIR?*
- *Ułożyłeś dwie pary samochodów, ale one stoją w korku. Jak powinny stać w stosunku do siebie, te dwie pary samochodów?*
- *Dlaczego właśnie w takiej kolejności?*
- *Sprawdźmy, czy wszystkie warunki zadania są spełnione, przeczytaj jeszcze raz wskazówkę. (Uczeń czyta, klasa akceptuje i nauczyciel też).*

M1:

- *Ale zanim wpiszesz liczbę, bo nie to jest najważniejsze, aby wpisać liczbę, tylko najważniejsze jest, abyś pokazał tym kolegom, co nie wiedzą, co tam wpisać, jak szukasz zasady, w jaki sposób szukasz zasady, co musisz przeanalizować.*
- *Czyli musisz sprawdzić, jak z jednej liczby otrzymać kolejną. (powtarza za uczniem)*
- *Jakie są związki między tymi liczbami? Gdzie będziemy szukać zasady, tutaj gdzie są luki, czy gdzie jest ciąg liczb?*
- *Zatem rysując takie łuczki, szukaj, powiedz nam, co, jakie związki są między tymi liczbami.*
- *Żeby z 7 otrzymać 12, co trzeba zrobić? Proszę, napisz to.*
- *Żeby z 12 otrzymać 10 ... dobrze*
- *Żeby z 10 otrzymać 15 ...*
- *Żeby z 15 otrzymać 13 ... i dalej*
- *Czyli jaka tu obowiązuje zasada? Na przemian dodajemy 5 i odejmujemy 2, powtarzają się te działania naprzemiennie. W takim razie, jakie powinno być tu działanie?*
- *Skoro tu jest działanie plus 5, to jakie powinno być tutaj?*
- *Popatrz, jakie działania występują na przemian, plus 5, minus 2, plus 5, minus 2. Proszę wszyscy patrzeć na tablicę i uważają.*
- *Jakie powinno być tutaj, proszę bardzo. (powtarza pytanie, wskazując miejsce zapisu)*
- *Kochanie, plus pisze się tak jak uczyłam w I klasie.*

- *Teraz sprawdzimy tę zasadę, licz głośno.*
- *Dobrze, sprawdzamy czy zasada działa.*
- *Zgadza się?*

M5:

- *Wypisałam na tablicy przymiotniki. Które byście wybrali do rycerza? Co jeszcze do rycerza pasuje?*

I ostatni fragment zajęć, w ramach podsumowania:

M14:

(Dzieci przygotowują czasopismo. Nauczycielka zbiera przygotowane przez nie materiały.)

- *Ja, **zgadując propozycje**, mam kolorowy sznurek i spróbuję to złożyć w całość.*
- ***Już zrobiłam to czasopismo**, możemy pokazać mamom na spotkaniu.*

Na bazie przeprowadzonych obserwacji można przypuścić, że taka jest właśnie codzienność sytuacji problemowych w polskiej szkole – jeśli się nawet sporadycznie pojawiają, to zazwyczaj pobudzają aktywność nauczyciela, a nie uczniów.

Gry i zabawy dydaktyczne

Kolejnymi „wielkimi nieobecnyymi” na obserwowanych zajęciach były gry i zabawy dydaktyczne – zajmowały one przeciętnie 2,4% czasu zajęć: 4,0% w szkołach wiejskich oraz jedynie 1,0% w szkołach miejskich. Gry i zabawy pojawiły się na 20 zajęciach spośród 178: 17 razy w szkołach wiejskich i tylko 3 razy w miejskich. W ośmiu przypadkach były to gry językowe (1,0% czasu zajęć), w dwunastu – matematyczne (4,1% czasu zajęć).

Wśród gier, które pojawiły się na zajęciach językowych, były m.in.:

- quiz ortograficzny,
- zabawa w kalambury: *jaki to sport?*,
- zabawa w kalambury: *jakie to zwierzę?*,
- odgrywanie scenek dramatycznych prezentujących wybrane emocje,
- rozwiązywanie krzyżówki,
- ilustrowanie tekstu dźwiękami (szkoła miejska).

Natomiast podczas zajęć z edukacji matematycznej pojawiły się m.in.:

- zabawa ruchowa: *szukamy działania z takim samym wynikiem*,
- odgadywanie wybranych przez nauczycielkę liczb,
- gra planszowa doskonaląca znajomość tabliczki mnożenia,
- gra karciana typu *Piotruś* doskonaląca znajomość tabliczki mnożenia,
- zabawa typu *wyścig rzędów* także dotycząca mnożenia,
- zabawa na rozpoznawanie liczb parzystych i nieparzystych,
- zabawa na rozpoznawanie opisywanych wielokątów,
- zabawa na rozpoznawanie wielokrotności liczb 2, 3 i 5,
- gra liczbowa *Bingo*,
- gra dotycząca szacowania (szkoła miejska),
- gra *Bum* dotycząca wielokrotności 5 i 7 (szkoła miejska).

Jak widać, różnorodność gier matematycznych była nieco większa.

II.2 RAZEM CZY OSOBNO?

Podstawową formą pracy uczniów w klasach biorących udział w badaniach była praca całą klasą – zajęła ona prawie 60% czasu obserwowanych zajęć, zarówno globalnie, jak i dla każdej z obu grup szkół (por. tabela 3. oraz diagram 2.). Ta forma pracy była stosowana częściej: 65,8% czasu zajęć podczas rozwijania umiejętności językowych dzieci – i to mniej więcej jednakowo często w szkołach wiejskich i miejskich, a znacznie rzadziej: 48,4% przy okazji rozwijania ich umiejętności matematycznych. Różnica popularności pracy całą klasą dla obu edukacji przekracza 17%, a w przypadku szkół wiejskich osiąga nawet poziom ponad 23%.

Przez 33,1% czasu obserwowanych zajęć uczniowie pracowali indywidualnie – na ogół wypełniając te same karty pracy czy rozwiązując kolejne podobne zadania z zeszytu ćwiczeń (por. niżej). Ta forma pracy była ponad dwukrotnie bardziej popularna podczas zajęć z edukacji matematycznej niż z edukacji językowej – odpowiednio zajęła ona 44,6% oraz 24,3% czasu na obserwowanych zajęciach z obu edukacji. Najrzadziej: 20,7% korzystano z niej w szkołach wiejskich podczas rozwijania umiejętności językowych dzieci, a najczęściej: 47,0% w tych samych szkołach(!) podczas zajęć matematycznych. Tym razem różnica w stosowaniu tej formy pracy wynosi dla obu edukacji ponad 20%, a dla szkół wiejskich ponad 26%. Dla szkół wiejskich praca indywidualna uczniów okazała się najbardziej popularną formą pracy podczas rozwijania umiejętności matematycznych.

Tabela 3. Procentowy udział różnych form pracy ucznia na obserwowanych zajęciach.

Uczniowie:	Zajęcia ogółem			Edukacja językowa			Edukacja matematyczna		
	Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie	Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie	Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie
pracują indywidualnie	33,1	32,9	33,5	24,3	20,7	27,1	44,6	47,0	42,3
pracują w parach	1,7	3,2	0,4	1,2	2,4	0,2	2,4	4,2	0,7
pracują w grupach	6,9	7,4	6,5	8,7	9,3	8,2	4,6	5,1	4,1
pracują całą klasą	58,1	56,6	59,6	65,8	67,5	64,5	48,4	43,9	52,9
czas trwania zajęć (w minutach)	6638	3117	3521	3726	1673	2053	2912	1444	1468

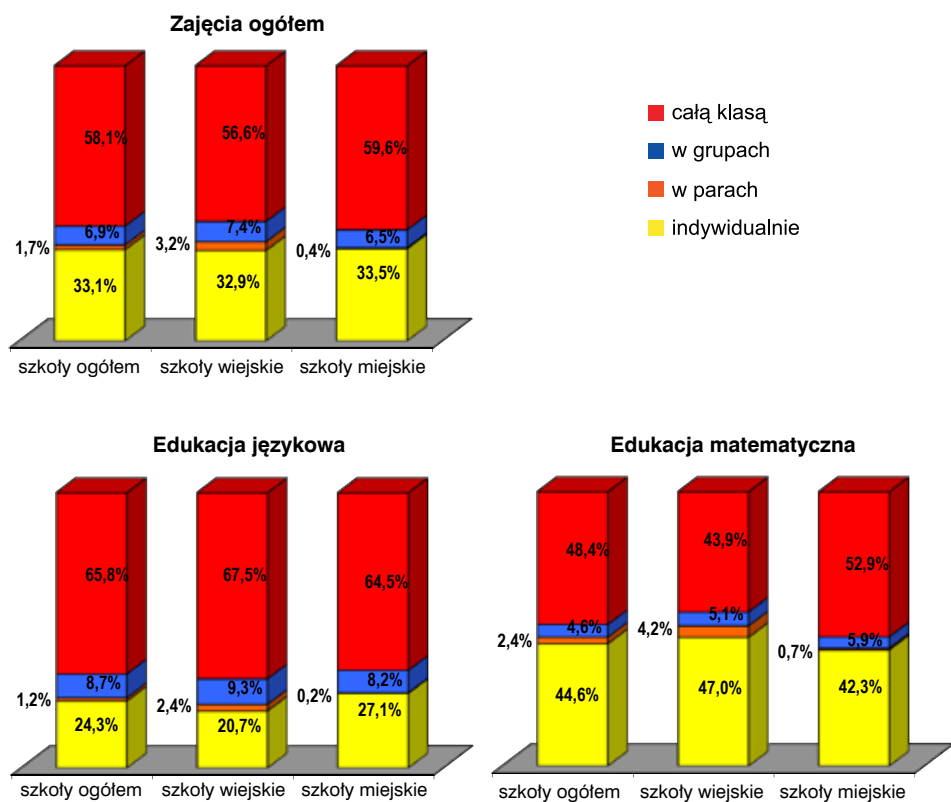


Diagram 2. Procentowy udział różnych form pracy ucznia na obserwowanych zajęciach.

Na 101 zajęciach spośród 148 obserwowanych (43 na 70 w szkołach wiejskich oraz 58 na 78 w miejskich) jedynymi wykorzystywanymi formami pracy uczniów była praca całą klasą oraz indywidualnie. Oznacza to, że praca w parach czy w grupach pojawiła się, zazwyczaj przez chwilę, na mniej niż $\frac{1}{3}$ zajęć.

Praca w parach okazała się znacznie bardziej popularna w szkołach wiejskich: 3,2% czasu obserwowanych zajęć przy 0,4% w szkołach miejskich. W obu grupach szkół ta forma pracy pojawiała się nieco częściej podczas edukacji matematycznej: 2,4% niż językowej: 1,2%.

Także praca w grupach gościła na zajęciach niezbyt często – poświęcono na nią 6,9% czasu zajęć, co dla typowej lekcji oznacza nieco ponad 3 minuty. Częściej była stosowana podczas zajęć językowych: 8,7% niż matematycznych: 4,6%.

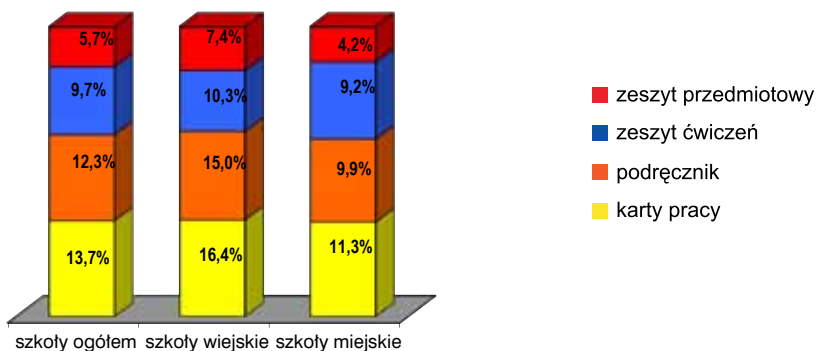
Jak widać, na obserwowanych zajęciach uczniowie pracowali w bardzo podobny sposób niezależnie od lokalizacji szkoły.

W tabeli 4. oraz na diagramie 3. zebrano dane dotyczące pracy uczniów z materiałami drukowanymi oraz zeszytem przedmiotowym.

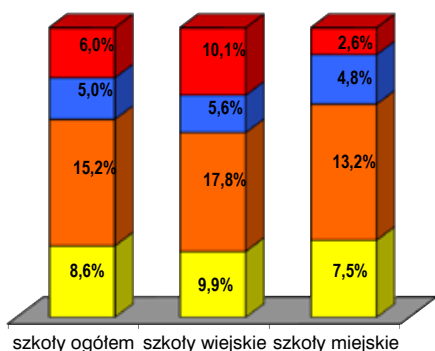
Tabela 4. Procentowy udział pracy z materiałami drukowanymi i zeszytem przedmiotowym na obserwowanych zajęciach.

Uczniowie:	Zajęcia ogółem			Edukacja językowa			Edukacja matematyczna		
	Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie	Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie	Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie
wypełniają karty pracy	13,7	16,4	11,3	8,6	9,9	7,5	20,3	24,0	16,6
pracują z podręcznikiem	12,3	15,0	9,9	15,2	17,8	13,2	8,5	11,8	5,2
pracują z zeszytem ćwiczeń	9,7	10,3	9,2	5,0	5,6	4,8	15,5	15,7	15,4
pracują z zeszytem przedmiotowym	5,7	7,4	4,2	6,0	10,1	2,6	5,4	4,2	6,5
Razem	41,4	49,1	34,6	34,8	43,4	28,1	49,7	55,7	43,7
czas trwania zajęć (w minutach)	6638	3117	3521	3726	1673	2053	2912	1444	1468

Zajęcia ogółem



Edukacja językowa



Edukacja matematyczna

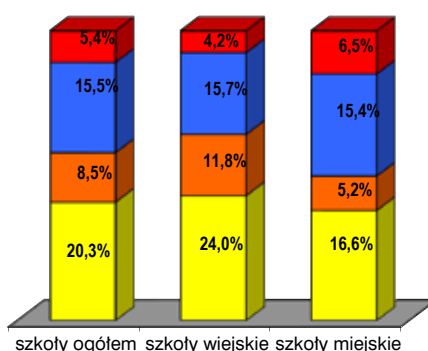


Diagram 3. Procentowy udział pracy z materiałami drukowanymi i zeszytem przedmiotowym na obserwowanych zajęciach.

Globalnie, przez nieco ponad 40% czasu obserwowanych zajęć uczniowie korzystali z materiałów drukowanych lub zeszytu przedmiotowego. Częściej miało to miejsce w szkołach wiejskich: 49,1% czasu zajęć przy 34,6% dla szkół miejskich – różnica to blisko 15% czasu.

Materiały były bardziej „popularne” podczas zajęć z edukacji matematycznej – towarzyszyły one dzieciom przez blisko połowę czasu pracy: 49,7%, a w szkołach wiejskich nawet ponad połowę, bo 55,7% czasu zajęć. Także podczas rozwijania umiejętności językowych częściej po nie sięgano w szkołach wiejskich: 43,4% czasu niż miejskich: 28,1%.

Spójrzmy na poszczególne typy materiałów.

Karty pracy były najbardziej popularne na zajęciach matematycznych w szkołach wiejskich – dzieci wypełniały je przez 24,0% czasu zajęć. Ci sami nauczy-

cielo podczas nauki języka sięgali po nie już znacznie rzadziej: 9,9% czasu zajęć. Także zeszyt ćwiczeń pojawiał się przede wszystkim podczas rozwijania umiejętności matematycznych dzieci – dzieci korzystały z niego przez 15,5% czasu zajęć. Podczas zajęć językowych sięgano po niego mniej więcej trzykrotnie rzadziej. W obu typach szkół intensywność używania zeszytów ćwiczeń była bardzo zbliżona.

Z podręcznikiem uczniowie pracowali częściej w szkołach wiejskich: 15,0% niż w miejskich: 9,9% oraz podczas zajęć językowych: 15,2% niż matematycznych: 8,5%. Podręczniki były najbardziej popularne podczas nauki języka w szkołach wiejskich: 17,8%, a najmniej popularne podczas rozwijania umiejętności matematycznych uczniów z miast: 5,2%.

Zeszyt przedmiotowy był używany rzadziej – uczniowie korzystali z niego przez 5,7% czasu zajęć. Pojawiał się on przede wszystkim podczas zajęć językowych w szkołach wiejskich, gdzie był używany przez 10,1% czasu zajęć.

Reasumując: widać, że ci sami nauczyciele – i to zarówno w jednej, jak i w drugiej grupie szkół – zachowują się w istotnie różny sposób w zależności od tego, czy rozwijają umiejętności językowe dzieci czy ich umiejętności matematyczne. Można zaryzykować hipotezę, że w tym pierwszym przypadku okazują pewien poziom „profesjonalnej śmiałości”, a w tym drugim część z nich przyjmuje postawę zdecydowanie „defensywną”.

II.3 KTO PYTA NIE BŁĄDZI?

Jak widać z dotychczasowego opisu, uczniowie w obu grupach obserwowanych klas byli bardzo silnie „sterowani” – ich działania były przede wszystkim i prawie wyłącznie odtwórczą reakcją na działania nauczycieli. Znajduje to także odbicie w formie oraz częstości spontanicznych pytań uczniów (por. tabela 5.). Spontanicznych – tzn. formułowanych z inicjatywy samych dzieci.

Tabela 5. Liczba i częstość⁹⁵ spontanicznych pytań uczniów na obserwowanych zajęciach.

Podczas obserwowanych zajęć uczniowie zadawali:		Zajęcia ogółem			Edukacja językowa			Edukacja matematyczna		
		Szkoły razem	Szkoły wiejskie	Szkoły miejskie	Szkoły razem	Szkoły wiejskie	Szkoły miejskie	Szkoły razem	Szkoły wiejskie	Szkoły miejskie
pytania organizacyjne	liczba	743	336	407	381	160	221	362	176	186
	częstość	8,9	9,3	8,7	9,8	10,5	9,3	8,0	8,2	7,9
pytania o wyjaśnienie, uzasadnienie	liczba	46	18	28	27	14	13	19	4	15
	częstość	144,3	173,2	125,8	138,0	119,5	157,9	153,3	361,0	97,9
inne pytania merytoryczne	liczba	153	67	86	86	31	55	67	36	31
	częstość	43,4	46,5	40,9	43,3	54,0	37,3	43,5	40,1	47,4
czas trwania zajęć (w minutach)		6638	3117	3521	3726	1673	2053	2912	1444	1468

Zdecydowanie najczęstszą formą spontanicznej wypowiedzi uczniów były pytania dotyczące strony organizacyjnej zajęć. Średnio padały one z ust dzieci co 9 minut – częstość ta jest prawie identyczna dla obu typów szkół. Nieco częściej były one zadawane podczas zajęć matematycznych, rzadziej – podczas językowych.

Warto przyjrzeć się bliżej tym pytaniom i ich ewentualnemu „przeznaczeniu”.

Część z nich w typowy sposób wiąże się ze „szkolnymi procedurami”:

Do torby? [chować] Piórnik też?

Jutro przychodzimy z torbami?

Teraz mamy się uczyć tych wierszów⁹⁶? Każdy ma takie same? [wiersze]

Proszę Pani, to teraz trzeba będzie przepisać?

Całe zdanie?

A można to przepisać ładnie?

To mają być trzy zdania?

Można otworzyć okno?

Ćwiczenia, a nie testy?

Jakie zeszyty otworzyć?

I mamy napisać?

Można drukowanymi?

⁹⁵ Liczby charakteryzujące częstość informują, co ile średnio minut na zajęciach pojawiał się dany typ pytania.

⁹⁶ Forma oryginalna.

*A zadanie 1 na lekcji łączonej?
Proszę Pani, to jest na ocenę?
Otwieramy matematykę?
Zamykamy? [podręcznik]
Proszę Pani, na tej w kratkę? [tablicy]
Pisemnie?
Proszę Pani, pod kreską?
Proszę Pani, podpisywać się?
Numerować pytania?
Mogę to wywalić? [do kosza]
A Pani zrobi z tego kartkówkę?
U nas jest tylko trzech, a u nich pięciu?
Proszę Pani, a można kolorowym?
Czy można się przesunąć na brzeg ławki?
Jaki jest temat?
Który dzisiaj jest?
Dzisiaj jest 28?
Lekcję zapisać?
W linie? (zeszyty)
Czy będzie potrzebne ćwiczenie do polskiego?
Proszę Pani, na której stronie?
A jakie było pytanie?
Ale które mam przeczytać?
Ale to napisać? To, co Pani napisała?
Mam to przepisywać?
To też robić?
Piszemy odpowiedź?
Czy mogę zatemperować kredkę?
Czy mogę tutaj narysować?
Na tej stronie mam rysować?
Na dwóch kartkach czy na jednej?
Mogę to pokolorować w domu?
A będziemy to obliczać na tablicy później?
Mamy to wszystko z tablicy spisać?
Czy będziemy coś mnożyć pod kreską?
Proszę Pani, a zadanie domowe?
A mamy książki schować?*

O 13.50 kończymy zajęcia?

Proszę Pani, pierwsze zadanie też robimy w domu?

Proszę Pani, możemy się przesiąść?

Inne wydają się być przede wszystkim ilustracją poziomu szkolnej bezradności dzieci i poziomu dominacji nauczyciela, który podejmuje decyzje za uczniów nawet w najbardziej banalnych sytuacjach:

Proszę Pani, tu przepisywać?

Proszę Pani, gdzie pisać?

Od nowej linii?

A co tam pod spodem trzeba zapisać?

Przejsć na drugą stronę?

Proszę Pani, napisać stewardesa?

A co mamy rysować?

Możemy to przykleić?

Gdzie przyklejać?

Proszę Pani, to będzie tak?

Proszę Pani, a jak mazak nie chce pisać? [To proszę wymienić.]

A można to przyciąć?

A gdzie rozciąć?

Trzeba wpisać te wyniki?

Wklejamy to na końcu podręcznika? A można teraz wkleić?

Najpierw rozwiązujemy, a potem wklejamy, czy najpierw wklejamy, a potem rozwiązujemy?

Piszemy?

A jak piszemy te zdania, to piszemy od nowej linijki?

A to, proszę Pani, nowe zadanie?

A to można pokolorować pisakami?

Proszę Pani, tu wpisać?

Można tak zaznaczyć?

Proszę Pani, a można na tej kartce robić obliczenia?

A możemy podpisać?

Proszę Pani, gdzie się podpisujemy?

Będzie do tego potrzebny ołówek?

Czy muszę pisać ołówkiem?

Co mam tutaj wpisać?

Proszę Pani, tutaj wynik?

Wpisujemy tutaj, czy nie wpisujemy?
Tutaj minus?
Można użyć flamastra?
A jak wyjechałam na inne województwo, to też maluję?
A województwo łódzkie też malujemy?

Ostatnia grupa to pytania, które są chyba przede wszystkim przejawem zwykłego znużenia i znużenia uczniów, ale też chęci i potrzebny działania:

Mogę przeczytać, co napisałem?
Proszę Pani, mogę przeczytać?
Proszę Pani, mogę teraz ja?
Proszę Pani, mogę powiedzieć wynik?
Proszę Pani, można to?
Mogę już przepisać? [Poczekaj na razie.]
Trzy pytania? A nie można więcej?
Proszę Pani, mogą być trzy fragmenty? [Dwa!]
A jak ktoś rozwiąże zadanie? [To czeka, jak zawsze, Natalko.]
Można zadanie 2? [Nie można drugiego!]
Kto napisał, będzie wychodzić?
A jak się już przepisało?
A mogę już drugą stronę zacząć?
Można już przeczytać zadanie?
Można już robić obliczenia? [Nie]
Można robić następne?
A można robić czwarte?
Można coś sobie dorysować?
Możemy już pisać?
Możemy to zrobić samodzielnie? (nauczyciel nie reaguje)
A jak ktoś skończył?
Proszę Pani, można grzyba narysować?
Proszę Pani, a jak skończyło się piąte?
A teraz co mamy robić?

Zdecydowanie rzadziej uczniowie zadawali pytania o charakterze merytorycznym, tzn. dotyczące bezpośrednio problematyki zajęć.

Pytania o wyjaśnienie czy uzasadnienie pojawiały się absolutnie sporadycznie – mniej więcej co 144 minuty, czyli średnio na trzech zajęciach padało jedno takie

pytanie. Łącznie w trakcie obserwacji odnotowano ich jedynie 46:18 w szkołach wiejskich oraz 28 w miejskich. Nieco więcej na edukacji językowej: 27 niż na matematycznej: 19. Najbardziej padały w szkołach wiejskich w trakcie rozwijania(?) umiejętności matematycznych – przeciętnie jedno pytanie o wyjaśnienie czy uzasadnienie podczas 8 lekcji.

Oto niektóre z nich, wraz z odnotowanymi reakcjami nauczycieli:

Autorytet? (uczeń nie rozumie słowa, nauczycielka wyjaśnia)

Tryumfalnie? (nauczycielka wyjaśnia sens słowa)

Co to jest turystyka? (nauczycielka wyjaśnia)

Proszę Pani, dlaczego z wielkiej litery Ojczyzna? [Dlaczego z wielkiej litery Ojczyzna? Nasz Dom, Nasz Kraj, z szacunku, miłości.]

Proszę Pani, a dlaczego piszemy dzień dobry osobno? [Tak się pisze.]

A dlaczego nie mogły? (kobiety brać udziału w igrzyskach). [Takie były zasady.]

A ja mam jedną wątpliwość: co jest większe od złotego? [Są tylko złote i grosze.]

A dlaczego nie ma brązowych i srebrnych? [Tak ustalono.]

Samolot bez silnika? Jak on lata? (tu i dalej brak jakiegokolwiek reakcji nauczyciela)

A co to jest nawałnica? A mżawka?

A co to jest szczapa?

Proszę Pani, a gdzie ja zrobiłem błąd?

Jak można od 430 odjąć to i dodać to i wyjdzie większy wynik?

Aż na 118 zajęciach spośród 148 uczniowie nie zadali żadnego pytania o wyjaśnienie czy uzasadnienie. Nie pojawiło się ono ani razu w 19 badanych szkołach (na 40).

Ponad trzy razy częściej, bo średnio raz na ok. 43 minuty, padały inne merytoryczne pytania – odnotowano ich łącznie 153. Ich rozkład był dość jednorodny:

- 67 pytań padło w szkołach wiejskich, a 86 w miejskich,
- 86 na zajęciach językowych, a 67 podczas matematycznych.

Oto niektóre z nich:

Czy z Niemcami to wielką literą?

A jak piszemy dżudo? Ta pani się nazywa dżokejka?

Mogę napisać, jak kolega wpadł na pana? A można napisać, że na wycieczce było ciekawie? (podczas pisania w grupach sprawozdania z wycieczki)
Pola, to jest naturalny? (krajobraz)
A jak się nazywają powbijane paliki? [Falochron.]
A jak się nazywa taki mały statek?
A co było przed Warszawą stolicą Polski?
A mamy takie miasto jak Białystok?
Proszę Pani, ilu jest mieszkańców w naszym mieście?
Proszę Pani, a w wierszu muszą być rymy?
A gdzie ten chłop poszedł odpocząć? [Do karczmy.] A karczmy z wielkiej litery?
Czy można napisać dwa wyrazy w jednym zdaniu? Czy można na początku zdania napisać jestem? (przy układaniu zdań z podanymi wyrazami)
Mianownik to jest to na dole, tak?
Trzeba pisemnie, czy tak normalnie można?
Trochę samo h?
To był Polak? (chodzi o Kolumba) To dlaczego nie mówią po polsku?
Proszę Pani, czy słowo balon można wypisać?
A panda mała też tam żyje?
A panda wielka to jest ...?
Ile w rządzie siedzi pasażerów? (przy rozwiązywaniu zadania tekstowego)
Proszę Pani, ile to jest kilogram?
Trzeba w każdym namiocie? W każdym po 6 ma spać?
Proszę Pani, co teraz mam obliczyć? [Sumę cyfr, robiliśmy już takie zadania.]
7500 to chyba nie jest parzysta? [Parzysta.]
Proszę Pani, ale którą liczbę? 365?

Zdecydowana większość tego typu pytań wynikała z potrzeby uzupełnienia wiedzy przez ucznia w trakcie wykonywania jakiegoś zadania. Rzadziej wiązały się one ze słowami wypowiedzianymi przez nauczyciela np. w trakcie pogadanki. Częstotliwość ich zadawania była dość zbliżona – najrzadziej padały podczas zajęć językowych w szkołach wiejskich, a najczęściej – podczas zajęć tego samego typu w szkołach miejskich.

Warto odnotować, że na 70 spośród obserwowanych 148 zajęć⁹⁷, tzn. prawie na połowie zajęć(!) nie pojawiło się żadne pytanie ucznia inne niż o charakterze organizacyjnym.

⁹⁷ 33 w szkołach wiejskich oraz 37 w miejskich.

Należy sądzić, że jest to w ogromnej mierze efekt stylu edukacyjnego dominującego w naszej szkole, wspartego jeszcze codziennym „treningiem”. **Mówienie, w tym także zadawanie pytań to domena nauczyciela.**

II.4 DWA KOŃCE TEGO SAMEGO KIJA?

Jednym z podstawowych zadań nauczyciela powinno być motywowanie uczniów do uczenia się. Na obserwowanych zajęciach najłatwiejszym do zaobserwowania narzędziem służącym temu celowi było nagradzanie i karanie dzieci. Wypowiedzi typu:

Dobrze; Bardzo dobrze; Świetnie

czy

Znowu nie uważacie; Bardzo proszę słuchać uważnie; Usiądź porządnie!

i inne zbliżone padały z ust nauczycieli z ogromną regularnością (por. tabela 6. i diagram 4.).

Tabela 6. Liczba i częstość⁹⁸ wybranych zachowań nauczyciela służących motywowaniu uczniów.

Nauczyciel:		Zajęcia ogółem			Edukacja językowa			Edukacja matematyczna		
		Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie	Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie	Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie
nagradza i ośmiela, okazuje zadowolenie	liczba	907	363	544	490	169	321	417	194	223
	częstość	7,3	8,6	6,5	7,6	9,9	6,4	7,0	7,4	6,6
krytykuje i upomina	liczba	1271	495	776	636	231	405	635	264	371
	częstość	5,2	6,3	4,5	5,9	7,2	5,1	4,6	5,5	4,0
czas trwania zajęć (w minutach)		6638	3117	3521	3726	1673	2053	2912	1444	1468

Jak widać, nauczyciele na obserwowanych zajęciach częściej krytykowali i upominali uczniów (średnio raz na 5,2 minuty), niż ich chwalili i nagradzali (raz na 7,3 minuty). Częściej formułowali tego typu wypowiedzi nauczyciele szkół miejskich, którzy posługiwali się nimi w bardzo zbliżony sposób na obu typach edukacji. Rekordzista wygłosił pod adresem uczniów podczas jednych czterdziestopięciminutowych zajęć 32 krytyki i 26 pochwał – można przypuszczać, że ze względu na intensywność tego typu wzmocnień, jego uczniowie już przestali na nie reagować.

⁹⁸ Liczby charakteryzujące częstość informują, co ile średnio minut na zajęciach pojawiał się dany typ zachowania nauczyciela.

Najczęściej, bo co 4 minuty, krytykę słyszeli uczniowie szkół miejskich podczas zajęć z edukacji matematycznej, najrzadziej: co 7,2 minuty dzieci wiejskie rozwijając swoje umiejętności językowe.

Zwraca uwagę bardzo zbliżony stosunek krytyk i pochwał (por. diagram 4.), jedynie w przypadku edukacji matematycznej w szkołach miejskich zwiększa się dominacja upomnień. Wydaje się, że mamy tu raczej do czynienia z pewnym „rytuałem”, niż faktycznym reagowaniem na rozwój wydarzeń w klasie.

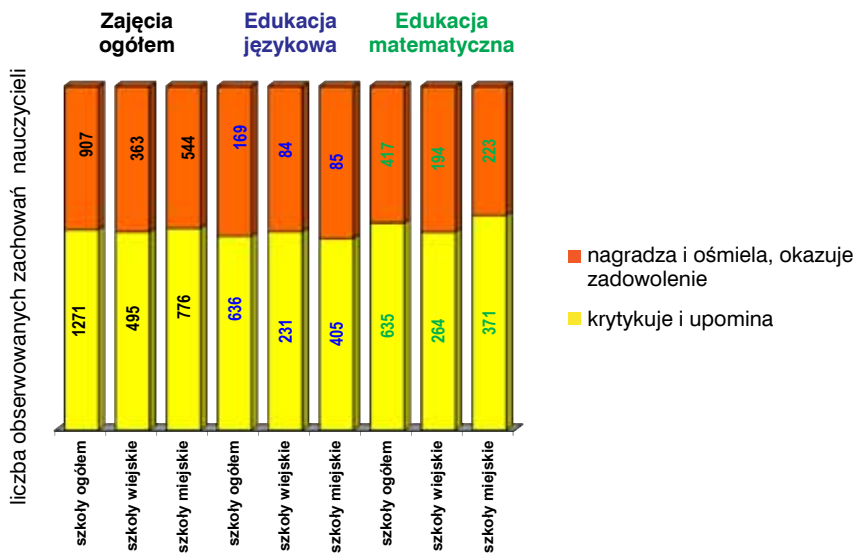


Diagram 4. Liczba wybranych zachowań nauczyciela służących motywowaniu uczniów.

Oto przykładowe krótkie oceny poczynań uczniów:

- *Znowu nie uważacie!*
- *Czytajcie szybciej!*
- *Wojtek, jak ty się zachowujesz?!*
- *Magda! Usiądź prosto!*
- *Artur! Źle!*
- *Tu masz źle. Postaw sobie minusa.*
- *A co tu masz? Zobacz, z błędem przepisujesz.*
- *To jest dobrze? Źle! $240 : 60$, to jakie 400 ? Jakie 40 ?*
- *No, przecież musisz to ..., pójdziesz na miejsce, dostajesz dwójkę.*
- *Co ty masz dzisiaj zaćmienie księżyca?*
- *Odbieram Twoje zachowanie jako prowokację.*

- *Dobrze!*
- *Właśnie tak!*
- *Bardzo ładnie!*
- *Super!*
- *Kto ma dobrze, stawia sobie plusik.*
- *Łukasz pięknie się popisał. Brawo!*
- *Kuba! Pięknie! Świetnie ułożyłeś zadanie.*
- *Pięknie, o jak pięknie! Nie spodziewałam się, że tak szybko.*
- *Super! Brawo! Piękne zdania. Naprawdę piękne zdania.*

I kilka bardziej rozbudowanych przykładów:

- *Kotki, chciałam zwrócić uwagę na taką rzecz, uczyliśmy się już tego, ale niektórzy zapomnieli. Przed takimi wyrazami, jak: ponieważ, gdyż, bo, co stawiamy? Przecinek, który oddziela od siebie dwa zdania pojedyncze. Ale nie stawiamy przecinka na początku linii, o tym kilkaset razy wam mówiłam, przecinek stawiamy po.*
 - *Słuchajcie! Julia dostaje 5, bo ona jako jedyna rozwiązała to zadanie prawidłowo. Brawa dla Julki.*
 - *Bardzo mi jest przykro, w ogóle mnie nie słuchasz. Asia! U fryzjera jesteś czy gdzie, bo nie wiem? Brzoza iglasta, tak? Brawo. Moi drodzy.. Nie, nie będzie czytania.*
 - *Jeśli masz odpowiedź, rysuj całe serduszko. Super wam poszło. Teraz liczymy po cichu serduszka.*
 - *Rysujemy duże serduszko w zeszytcie. Wpisujecie w nie swoją liczbę serduszek. Teraz się pochwalicie. Proszę. Natalia ile? Daniel?*
 - *Czy ktoś zdobył więcej niż 13 serduszek? Brawo Kamil i Natalia.*
 - *Te osoby, które zdobyły mniej serduszek też pięknie pracowały. Teraz pokolorujcie serce na czerwono.*
 - *Chciałabym zwrócić uwagę na ocenę wypowiedzi ustnych. Na szczególne uznanie, na wyróżnienie zasługuje... Mateusz nakleja sobie ...*
- (Nauczycielka rozdaje naklejki, które są gratyfikacją za aktywność na lekcji.)
- Przyklejamy w zeszytcie od razu, pod tematem lekcji, żeby nie pogubić. Kto tu jeszcze ...? Sara też brała udział w lekcji.*
- *Dalej będziemy pracować i dzieci, które będą ładnie pracowały dostaną taką karteczkę. Dzieci za wykonanie pracy indywidualnej dostaną koziołki, (...) bo nasza lekcja jest głównie o Poznaniu.*

- *Bartek, dlaczego tak się zachowujesz, sprawiasz mi przykrość. Spójrz na mnie. Jeśli nie chcesz sprawić przykrości tacie, to przestań! Najpierw myślimy, potem mówimy. Jutro wracasz na swoje miejsce za karę. Kolejną karą będzie uwaga.*

Wydaje się, że nagroda i kara są raczej reakcją na bieżące działania ucznia i ich zgodność lub nie z oczekiwaniami nauczyciela, także w zakresie dyscypliny, niż stosowaną w przemyślany i konsekwentny sposób metodą motywowania. Zresztą, widoczne na obserwowanych zajęciach ich nadużywanie, zdecydowanie obniża czy wręcz niweluje ich wartość motywującą.

II.5 WYSTARCZY PODPOWIEDZIEĆ?

Pochwały i krytyki to tylko część typowych kategorii wypowiedzi nauczyciela podczas obserwowanych zajęć. W tabeli 7. zebrane są informacje o częstotliwości wybranych typów innych wypowiedzi oraz zachowań nauczyciela.

Tabela 7. Częstość⁹⁹ wybranych typów wypowiedzi i zachowań nauczyciela podczas zajęć.

Nauczyciel:	Zajęcia ogółem			Edukacja językowa			Edukacja matematyczna		
	Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie	Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie	Szkoly razem	Szkoly wiejskie	Szkoly miejskie
wydaje polecenia	2,3	2,4	2,2	2,4	2,7	2,3	2,1	2,2	2,1
zadaje pytania sprawdzające wiedzę uczniów	3,4	3,4	3,4	3,5	3,9	3,2	3,3	2,9	3,7
formuluje pytania otwarte, o wyjaśnienie, uzasadnienie	27,7	43,9	20,8	20,6	27,0	17,3	49,4	160,4	29,4
podpowiada, odpowiada za ucznia	8,0	8,4	7,6	9,1	10,3	8,2	6,9	6,9	6,9
wspiera, ukierunkowuje pracę dzieci	93,5	97,4	90,3	143,3	139,4	146,6	64,7	72,2	59,7
akceptuje propozycje i pomysły uczniów, słucha	41,7	42,1	41,4	31,1	34,9	28,5	74,7	55,5	112,9
ignoruje pomysły uczniów, nie słucha	72,2	74,2	70,4	69,0	76,0	64,2	76,6	72,2	81,6
czas trwania zajęć (w minutach)	6638	3117	3521	3726	1673	2053	2912	1444	1468

⁹⁹ Liczby charakteryzujące częstość informują, co ile średnio minut na zajęciach pojawiał się dany typ wypowiedzi czy zachowania nauczyciela.

Najczęściej używaną przez nauczyciela formą wypowiedzi jest **polecenie** – podczas obserwowanych zajęć odnotowano ich 2896, co oznacza, że średnio polecenia padały co 2,3 minuty. Widać, że ich częstotliwość nie zależy ani od rodzaju edukacji, ani od typu szkoły, jest to po prostu pewien stały, w zasadzie już chyba niezauważalny, element zajęć. Polecenia dotyczą albo strony organizacyjnej zajęć:

- *Otwórzcie zeszyty, zapiszcie dzisiejszą datę. W środku napiszcie: Zasady zachowania w pociągu.*
- *Teraz przygotujcie czerwoną i zieloną kredkę.*
- *Pierwsze zdanie przeczyta nam Dawid.*
- *Który wyraz jest czasownikiem? Ładował, tak. Podkreślamy czerwoną kredką.*
- *Otwórzcie tekst na stronie 87.*
- *Kto skończył, czeka na resztę i siedzi prosto.*
- *Samodzielnie wykonacie zadanie 2.*
- *Wszyscy odszukują w słowniku Mazury.*
- *Dzieci przyjrzą się ilustracji.*
- *Kto obejrzał, usiądzie prosto. Będzie to sygnał, że mogę zadać kolejne pytania.*

albo ich strony merytorycznej – zdejmują wówczas z ucznia np. ciężar podjęcia decyzji, co i w jaki sposób ma zrobić:

- *Proszę wpisać w żółte okienko: od 13:10 do 14:10, czyli ile upłynęło czasu od wystartowania do lądowania. Wpisujemy 1 godzina 00 minut.*
- *Przecinacie ten prostokąt tak, aby powstały dwa.*
- *To teraz pod ten wzór podstawiamy dane.*
- *To proszę oznaczyć samodzielnie teraz.*
- *I ja właśnie proszę, żebyście dodali sposobem pisemnym.*

Prawie równie popularnym elementem tego, co dzieje się w klasie są **pytania sprawdzające wiedzę uczniów** – padają one z ust nauczyciela średnio co 3,4 minuty. Najczęściej pojawiały się one podczas zajęć z edukacji matematycznej w szkołach wiejskich: co 2,9 minuty, najrzadziej podczas zajęć z edukacji językowej u tych samych nauczycieli: co 3,9 minuty. Jak widać, dla obu grup szkół oraz obu edukacji częstotliwość ich zadawania była bardzo zbliżona.

Te dwa typy wypowiedzi nauczyciela: polecenia i pytania sprawdzające kreują szkolną rzeczywistość. „Rekordowy” wynik to 52 polecenia i 53 pytania sprawdzające sformułowane przez tę samą nauczycielkę w ciągu czterdziestopięciominutowych zajęć.

Pytania otwarte, służące m.in. uruchomieniu myślenia twórczego (dywergencyjnego) dzieci i zaangażowaniu ich w tok lekcji, czy **pytania o wyjaśnienie albo uzasadnienie**, budujące u uczniów rozumienie omawianych zagadnień pojawiały się zdecydowanie rzadziej – nauczyciel zadawali je średnio co 27,7 minuty. W ciągu wszystkich obserwacji odnotowano 240 takich pytań: 71 w szkołach wiejskich oraz 169 w miejskich. Jak widać, nauczyciele szkół miejskich formułowali je mniej więcej średnio dwukrotnie częściej niż ich koledzy ze szkół wiejskich.

Ta forma pytań pojawiała się wyraźnie częściej podczas zajęć językowych: co 20,6 minuty niż matematycznych: co 49,4 minuty. Zwłaszcza w przypadku edukacji matematycznej jest to wynik bardzo mocno niepokojący. Dla szkół wiejskich jedno takie pytanie przypadało na 160,4 minuty zajęć z edukacji matematycznej, czyli na ponad trzy godziny lekcyjne¹⁰⁰! W szkołach miejskich pytań tego typu w procesie matematycznego kształcenia też było zdecydowanie za mało – mimo że pojawiały się ponad czterokrotnie częściej.

Oto przykłady takich pytań nauczyciela z obserwacji w obu typach szkół:

W2:

– *Czy to jest dobra odpowiedź? Agatka powiedziała: obsłużyła, Tomek: może obsłużyć. Czy obie są dobre?*

W4:

– *Dlaczego tak uważasz? Uzasadnij.*

W6:

– *Jakie uczucie to opowiadanie wzbudziło w Was?
Kto miał inne uczucie?
Jakie to było uczucie? Współczucie, że miał łzy (...)
Sympatię? (...)
A w stosunku do chłopców? Co z nimi należy zrobić?
A co zrobić, gdyby w naszej szkole to się wydarzyło?
Czy tych chłopców możemy nazwać tolerancyjnymi? Dlaczego?
Jacy są ci chłopcy?*

¹⁰⁰ W tej sytuacji mówienie np. o potrzebie relacyjnego rozumienia matematyki (por. Skemp R.R. 1976), które jest budowane przez uczniów m.in. podczas prób badania i wyjaśniania związków oraz uzasadniania poglądów, staje się czymś z pogranicza fantazy.

W9:

- *A jaki ten rok był pod względem nauki dla Was?*
- *A dlaczego to są przymiotniki?*
- *A dlaczego ten kwadrat jest takim szczególnym rodzajem prostokątów?*
- *A dlaczego prostokąt jest prostokątem?*
- *A dlaczego prostokąt nie jest kwadratem?*

W13:

- *Z czym się Wam kojarzy kraina czarów?*
- *Czy macie ulubione zabawki i dlaczego? Chcę usłyszeć, dlaczego.*
- *A czy Wy macie marzenia? Czy ktoś chce mi zdradzić swoje marzenie? Nie musicie.*
- *Czy warto mieć marzenia? A dlaczego?*

W14:

- *A dlaczego mogą się powtarzać? A nawet muszą?*

W16:

- *No to jak obliczyłaś? Bo każdy inaczej.
Ale skąd się to wzięło?
I co teraz? Dlaczego?*

M5:

- *Co to znaczy opryskliwy?*
- *A co to znaczy, że ktoś jest rozważny?*
- *Kto chce narysować rycerza?*
- *A dlaczego chcecie narysować rycerza?*
- *Kto chce narysować smoka i dlaczego?*

M13:

- *Z czym kojarzy się zwrot „nasze podwórko”?
Co czujecie, czytając wiersz?
Jaki to zwrot, co to znaczy?
Jakie podwórko ukryte jest pod tym zwrotem?
Co czujecie wy? Jak myślicie, co czuje autor?
Jak ty to rozumiesz?
Zgadza się? Jakie jest wasze zdanie na ten temat?*

M14:

- *Weronika wytłumacz, jak to zrobiłaś?*
Kto innym sposobem obliczył?
A Klaudia jak?
Wytłumacz mi, to ciekawy sposób.
Ktoś miał inny sposób?

M15:

- *Czy w książce „Miejsca niezwykle” można coś znaleźć o Krakowie? Dlaczego?*
A w książce „Cuda Polski – skarby architektury”? Jakie informacje?

M16:

- *Gdybyście byli czarodziejami, to co byście wyczarowali?*
Sylwek, gdybyś ty był czarodziejem, co byś zrobił dla siebie i dla innych?

Podczas 74 zajęć (45 w szkołach wiejskich oraz 29 w miejskich) nie padło ani jedno pytanie otwarte czy o wyjaśnienie lub uzasadnienie.

Niekiedy zadane pytanie tylko pozornie miało otwarty charakter, bo nauczyciel oczekiwał jednej konkretnej odpowiedzi. Często przy tej okazji odzywała się także tradycja stałego „trzymania ręki na pulsie”:

W10:

- *Zadanie 4. Natalka przeczytaj polecenie.*
Jest 28 zuchów. Mamy 5 namiotów. Jak można ich rozłokować?
To robicie samodzielnie.
Filip chodź zapisać swoją propozycję. [6, 6, 6, 6, 4]
Kto ma inaczej? No chodź proszę. [6, 6, 6, 5, 5]
Dobrze. Innej możliwości nie będzie.

W13:

- *A czy warto czytać książki?*
A co się dzieje z naszą wyobraźnią, jak czytamy?
A czy bogacimy swoje słownictwo? A ortografię?

M18:

- *Jak patrzycie na jakieś województwo, to na co zwracacie uwagę?*
A co jeszcze? Jest pod....kreśło...ne.

*Co znajduje się w Warszawie? (dzieci udzielają różnych odpowiedzi)
No, ale tam są nasze wła....dze.
A kto zarządza? Słowo pochodzi od słowa województwo.*

M20:

- *Mówiliśmy sobie kiedyś, że zwierzęta możemy podzielić... Stop. Zosia powiedziała, że ssaki i o to mi chodzi.*

Na zadane przez siebie pytania często odpowiadał sam nauczyciel. **Podpowiadanie uczniom, czy też odpowiadanie za nich** to kolejny stały i normalny element działań nauczyciela:

W2:

- *Jak jeszcze można nazwać sprzedawczynię? Eks...*
- *Kiedy jeszcze mamy są koniecznie potrzebne? Kiedy jest smutno, to co robimy? W ramionach mamy jak my się czujemy?*
- *Co od mamy pożyczacie dziewczynki? Nigdy się do mamy kosmetyków nie zaglądało?*

W3:

- *Jak mnożymy 60×8 ?
Wystarczy wiedzieć, ile jest 6×8 i dopisujemy jedno zero.
 $48 : 4$? 12, dopisujemy zero.*
- *Co jest jeszcze dane w zadaniu?
Pociąg pośpieszny potrzebuje ilu godzin ...
780 podzielić na 10, to ile to będzie?
 $78 : 1$, to ile? 78
I co musimy jeszcze zrobić?*
- *Ile więcej? Musimy obliczyć różnicę.*
- *Jakie działania tu mamy? Mno...*

W4:

- *Teraz mamy pięciokrotność, czyli mnożymy przez 5!*

W7:

- *Możecie sobie tam w wolnym miejscu zrobić dodawanie pisemne, można to wolne miejsce wykorzystać.*
- *Podzielić jest po? Razy!*

W8:

- *Spróbujemy teraz odnaleźć w wierszu wyrażenia poetyckie. Jakie to są wyrażenia? Posługujemy się nimi na co dzień? Nie, na co dzień nie – spotykamy je w wierszach.*

Co to znaczy, że ulewa bije o ziemię? Jak to wytłumaczyć? Spadają, albo uderzają.

W10:

- *Transport, statki. Jak byście podzielili? I ry... rybackie. Kutry, które wyruszają w podróż, żeby łowić ryby. Popatrzcie na mapę. Mamy tu mapę Europy. Transport wodny odbywa się po morzach i oceanach. Po czym jeszcze? Czyli ten po morzach nazywamy mor-skim. A ten po rzekach – śród-lą-do-wy. (przy rozwiązywaniu zadania tekstowego)*
- *Czyli mamy teraz policzone, ile trwały poszczególne części. Teraz trzeba co zrobić? Czyli musimy to wszystko poodejmować. Zobaczmy, ile nam zostanie.*

W15:

- *A dlaczego? On się zatrzymuje na wszystkich stacjach: małych i dużych, dlatego jedzie wolno. Czyli podsumujmy to: najszybciej jeżdżą ekspresowe, szybko jeżdżą pociągi pospieszne, a najwolniej osobowe, dlatego, że się zatrzymują na wszystkich stacjach.*
- *No, jeśli jest zero w mnożeniu, to w wyniku jest zero.*
- *Od wszystkich miejsc odjąłeś te, co są zajęte, więc obliczyłeś, ile zostało wolnych miejsc.*
- *To teraz dodaj, ile razem podróżowali.*

W17:

- *A jak nazywają się te deski wychodzące w morze? Mo... Mo..., no molo, tak.*

W18:

- *Czyli jego zachowanie było jakie? Złe. A Marek zachowywał się jak? Kulturalnie, bardzo dobrze.*
- *Co trzeba zrobić? Pomnożyć kilometry przez godziny!*

M1:

- *Zatem powiedzcie mi, jaki powinien być kierowca?
Jaki jeszcze, trzeźwy na pewno, to jest podstawa, jaki jeszcze?
Jak inaczej możemy go określić? Człowiek spokojny, to inaczej ...o, ...opa...,
opanowany, tak?*

M2:

- *Książki są przygotowane i potem, ta książka, wędruje do osoby, która nam tę
książkę oprawia. Ola powie, jak się nazywa ta osoba.
Ola: Okładkarz.
No, nie, jak się nazywa osoba, która oprawia książki? Justyna powie, jak się
nazywa ten, ta osoba, która oprawia?
Justyna: Oprawczyk.
No, kto oprawia książki? Int..., introliga..., introligator.*

M5:

- *Jak piszemy odpowiedzialny? Razem, oczywiście.*
- *Dlaczego nie można odmówić, gdy ktoś grzecznie prosi? Jaki jesteś? Nie-ko-
le-żeński.*

M8:

- *Słowacja, stolica jaka, no? ... Bra...
I Czech. Stolicą Czech jest? ... Pra...
Jak nazywa się ta budowla w Warszawie? Bar ... ba ... kan.*
- *540 było od Bałtyku do Sudetów, a połowa tej drogi to jest 270 km.
A teraz z Berlina do Poznania? Dlaczego? Bo z Berlina ...
Jest 620, a Poznań jest w połowie drogi, czyli $620 : 2 = 310$.*

M10:

- *Co to jest Kopiec Kościuszki? Górka, którą krakowiaci usypali.
Dzwon Zygmunta gdzie jest? Na Wawelu.
Ile razy jest grany hejnał? Dlaczego cztery razy?*
- *W pierwszym zadaniu jest pytanie o pion i poziom. Co to jest pionowo i pozio-
mo? Pion to to co stojące, poziom leżące.*
- *Adaś, tutaj wpisujesz wynik i liczysz. Ile się równa?
Teraz tu liczysz i sprawdzasz. Ile tu jest?*

M11:

- *Dziś będziemy mówić o krajobrazie. Co to jest krajobraz? Nie, narysowany to pejzaż. Wolna przestrzeń, którą wi... Nie pytam o obraz, pytam o krajobraz. Co to jest krajobraz? Może inaczej. Jakie elementy składają się na krajobraz? To, co widzimy przed sobą? Może być latarnia nad mo...rzem. Czyli roślinność, woda, niebo, dobrze, chaty też. Może być naturalny lub wytworzony przez czło ...wieka. Co jest wytworem ludzi? Zabu.... Ale jeszcze jest...? Fa... (Śmiech na dziecka fale, chodziło o fabryki.) A jak na wsi mamy buraki, owies, to jest pole upra....*

M16:

- *Jedna godz. i 10 min. to siedem....*

M20:

- *Ponieważ jest pięć boków, to ile literek musimy użyć? Co musimy teraz zrobić, żeby obliczyć jego obwód? Musimy to wszystko zsu... mo...wać.*

Średnio, takie podpowiedzi pojawiały się co 8 minut, nieco rzadziej podczas zajęć z języka: co 9,1 minuty niż z matematyki: co 6,9 minuty. Ich częstotliwość (por. tabela 7.) jest bardzo jednorodna – **takie podpowiedzi nauczyciela to kolejny trwały element szkolnej praktyki.**

Mniej więcej dwunastokrotnie rzadziej występowały takie sytuacje, w których nauczyciel – stawiając dodatkowe pytanie lub odwołując się do wcześniejszych doświadczeń ucznia – **próbował wspierać i ukierunkowywać wysiłek ucznia, nie odbierając mu szansy samodzielnego pokonania zaistniałej trudności:**

W1:

- *Co my wiemy o informacjach z zadania? Co musimy obliczyć, żeby wiedzieć, o ile książka była droższa od albumu?*
- *Czy to wystarczy nam na obliczenie, o ile jest więcej jabłoni niż gruszy?*

W4:

- *Jakie było pytanie? Czyli co musimy zrobić?*
- *Czy możemy tę drogę obliczyć? Jaka wiadomość nam tu będzie potrzebna?*

W7:

- *Wyobraź sobie to albo narysuj, jak to wyglądało. (...) bo myślenie masz dobre.*

W8:

- *Nie wiem, co tutaj zrobić, trzeba się zastanowić. Czy to, że podzieliś, do czegoś Cię doprowadzi?*

W9:

- *Jeśli ktoś ma wątpliwości, niech sprawdzi w słowniku.*
- *Wytnij Krzysiu te figury i zobaczmy te części, czy one dają się na siebie nałożyć, bo tak coś wiem, że masz wątpliwości.*

W11:

- *Weź sobie do ławki tabliczkę mnożenia, jak potrzebujesz.*

W20:

- *Ale pomyśl, o czym rozmawialiśmy wczoraj, dzisiaj.*
- *Jeżeli ktoś potrzebuje sprawdzić coś na mapie, to może tam sobie podejść.*

M5:

- *Jak nazywamy wyrazy odpowiadające na pytanie „jak”?*
Nie, pomyślcie. Bo przymiotnik, to na jakie pytanie odpowiada?

M10:

- *Zastanów się, czy 24. Podejź do tablicy.*
W jaki sposób sobie rozpisujemy talerzyki? (model ilustrujący mnożenie)
32! (powtarza za uczniem) I to jest prawidłowa odpowiedź.

M12:

- *Żeby odpowiedzieć na pytanie, jakie daty musimy znać?*

Tego typu sytuacji odnotowano tylko 71 (32 w szkołach wiejskich oraz 39 w miejskich) – były obecne na 33 zajęciach (na 148). W tym samym czasie obserwatorzy zauważyli 833 przypadki podpowiadania czy odpowiadania za ucznia. Zjawisko wspierania uczniów występowało mniej więcej jednakowo często, czy raczej jednakowo rzadko, w szkołach obu typów i częściej podczas zajęć z edukacji matematycznej: co 64,7 minuty niż językowej: co 143,3 minuty.

Przy dominującej postawie nauczycieli na obserwowanych zajęciach (por. wcześniej) uczniowie rzadko ujawniali swoje propozycje i pomysły. Nieco częściej były one przez nauczycieli akceptowane: 159 przypadków niż ignorowane: 92 przypadki (por. tabela 7.).

Ponad dwukrotnie częściej ci sami nauczyciele akceptują propozycje dzieci podczas zajęć językowych: co 31,1 minuty niż matematycznych: co 74,7 minuty. Najczęściej zdarzało się to podczas zajęć matematycznych w szkołach miejskich – jeden przyjęty pomysł na 112,9 minuty. Co ciekawsze, nie ma takiej dysproporcji przy ignorowaniu pomysłów uczniów – wyniki dla obu typów szkół i zajęć są zbliżone. Oto po kilka przykładów sytuacji obu typów:

W2:

- *Kuba powiedział: Jakub miał 900 zł. Każdy samochód kosztował 3 zł. I to jest dobrze. Jakie musi być pytanie?*

W8:

- *Słusznie zauważyłeś, ale nie mam takiego znaku.* (do umieszczenia na mapie pogody)

W15:

- *Dlaczego nie można wystawiać rąk przez okno w samochodzie?*
Uczeń: *Można dostać reumatyzmu.*
Tak? Nawet nie wiedziałam. A może? ... Musimy poczytać coś na ten temat.

W17:

- *Bartek, zrobiliś bez pisemnego? No to chodź.* (do tablicy)

W19:

- *Pustynia to nie tylko piasek, żwiry ... tak, kamienie.*
- *Tak, można w tabelce.* (obliczyć różnicę wyrażen dwumianowanych)

M6:

- Uczeń: *Ja mam coś o tym Pierre de Coubertin.*
- *Coubertin chcesz nam przeczytać, proszę bardzo, będzie coś dodatkowego. Pierre de Coubertin był założycielem pierwszego komitetu olimpijskiego.*
Uczeń: *A mogę przeczytać o płomieniu olimpijskim?*
Zaraz, bo ja chcę najpierw o historii, a potem dopiero o aktualnych rzeczach.
...
 - Kuba chciał przeczytać o ogniu olimpijskim, proszę.*

M12:

- *Pomyśl jeszcze, co można by zrobić.*
A, to Słońce też jest bardzo ważne.
Aha, czyli to podział na różne chmury. ...
Czyli z każdego wychodzi inna chmurka?
Bardzo dobrze, ale jeszcze jest coś do zrobienia.
Widzę, że macie różne pomysły.

M14:

- *A Klaudia jak?*
Wytłumacz mi, to ciekawy sposób.

W8:

- *Skąd to masz? Mówiłam, żeby nie dodawać swoich. (czasowników do zmiany czasu)*

W17:

- *Uczeń: Mi się wydaje, że trochę bardziej na lewo. (leży miejscowość na mapie)*
– To nie ma znaczenia.
Uczeń: Ale jeszcze jedna wycieczka była, do Białej Góry!
– No tak, ale do Białej Góry nie doszliśmy, bo to było 12 kilometrów.

W19:

- *Skończymy, to będziecie dyskutować, dobrze?*
Może teraz wysłuchacie do końca, a potem zapytacie.

W20:

- *Uczeń: Mogę coś swojego dodać?*
– Nie, na razie nie.

M8:

- *Dlaczego Kuba chciał odejmować, to nie wiem.*
Uczeń: Może on najpierw odjął duże koperty od dużych i małe od małych,
a dopiero potem to.
Można tak, ale jakie jest pytanie Wojtek?
Uczeń: Ile jest kopert w biurze.
Czy jest pytanie, czy małych czy dużych, czy jest podział?

Uczeń: Ale pod koniec można to połączyć.

Ale czy jest taka potrzeba, jak jest pytanie o wszystkie razem?

M9:

– *Nie, nie mój drogi. Twój tok myślenia jest nie taki, jak powinien.*

M19:

– *Kto już zaznaczył sobie $\frac{5}{8}$?*

To jest prostokąt Kuba? Tak?

A dlaczego nie kolejno? Tylko tak?

To proszę kolejno. ...

Słuchajcie, wy sobie nie komplikujcie życia, halo! Jeżeli macie prostokąt, to zróbcie to tak... (Nauczycielka rysuje na tablicy.)

Warto spojrzeć jeszcze raz na proporcje czterech typów wypowiedzi nauczycieli: **polecenia, pytania sprawdzające, pytania otwarte, o wyjaśnienie i uzasadnienie** oraz **podpowiedzi** w obrębie grup szkół i rodzajów zajęć:

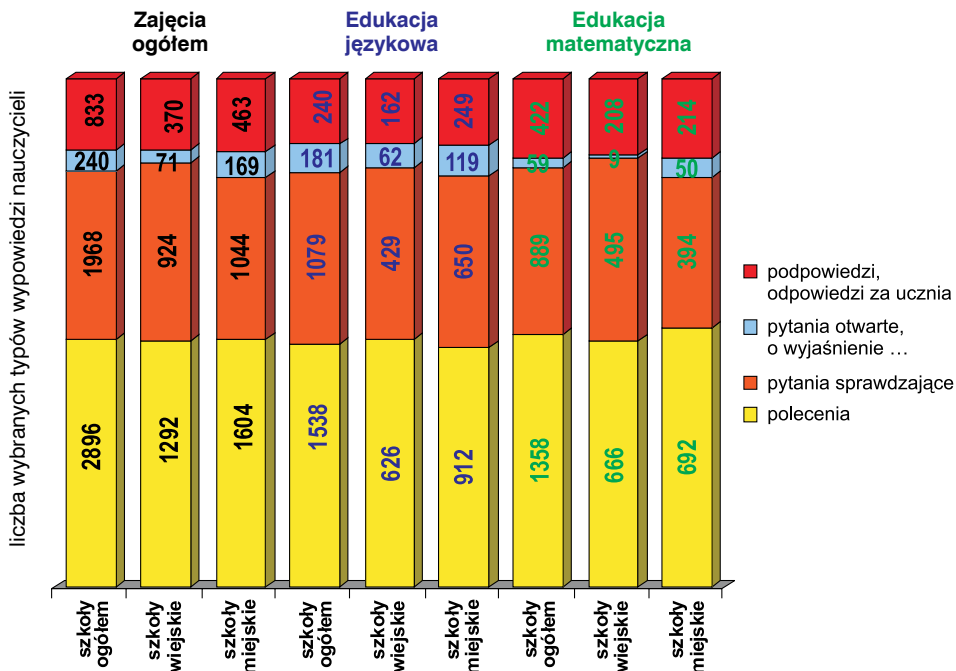


Diagram 5. Liczba i proporcje wybranych typów wypowiedzi i zachowań nauczyciela podczas zajęć.

Jak widać, wśród wypowiedzi nauczycieli dominują polecenia i pytania sprawdzające, zwłaszcza w szkołach wiejskich oraz podczas rozwijania umiejętności matematycznych dzieci. Podpowiedzi dość równomiernie rozkładają się pomiędzy oba typy szkół i są wyraźniejsze dla edukacji matematycznej, a pytania otwarte oraz o wyjaśnienie czy uzasadnienie są zauważalne jedynie podczas zajęć językowych.

Na „typowych” zajęciach z edukacji matematycznej mamy do czynienia z (mniej więcej) 21 poleceniami nauczyciela i 14 pytaniami sprawdzającymi, 6 podpowiedziami kierowanymi do uczniów i (mniej niż) jedną próbą wsparcia ich w samodzielnym pokonaniu trudności, a także z (mniej niż) jednym pytaniem otwartym oraz z akceptacją i zignorowaniem (mniej niż) jednego pomysłu dzieci. Przyjrzyjmy się takiej „średniej” lekcji dokładniej.

II.6 TYPOWE CZYLI JAKIE?

Tabela 8. zawiera zestawienie bardziej i mniej popularnych zaobserwowanych aktywności dzieci podczas zajęć z edukacji matematycznej.

Tabela 8. Procent obserwowanych zajęć z edukacji matematycznej, na których wystąpiły wymienione typy aktywności uczniów.

Podczas obserwowanych zajęć dzieci:	Edukacja matematyczna		
	Szkoły razem	Szkoły wiejskie	Szkoły miejskie
ćwiczyły wykonywanie obliczeń	96,9	93,9	100,0
rozwiązywały zadania tekstowe	73,8	81,8	65,6
śluchały nauczyciela prezentującego gotowe metody postępowania	64,6	54,5	75,0
grały w gry dydaktyczne rozwijające umiejętności matematyczne	16,9	27,3	6,3
rozwiązywały problemy brane z życia codziennego	15,4	9,1	21,9
dostawały do rozwiązania zadania problemowe	9,2	3,0	15,6
czytały mapy, plany, diagramy, tabele	7,7	0,0	15,6
badaly modele obiektów geometrycznych i posługiwały się nimi	4,6	3,0	6,3
liczba obserwowanych zajęć	65	33	32

Rzut oka na tabelę wyjaśnia, dlaczego matematyka jest postrzegana – najpierw przez uczniów, a potem prawie całe dorosłe społeczeństwo – jako nauka o licze-

niu: sprawność rachunkowa była rozwijana na prawie wszystkich obserwowanych zajęciach, co więcej, była zazwyczaj rozwijana w bardzo tradycyjny i typowy sposób, dzięki wykonywaniu kolejnych obliczeń w „obowiązujący” sposób. Takie rozumienie przedmiotu wspierają także nieświadomie sami nauczyciele: *Na tych zajęciach będziemy robić działania z matematyki.*

Na mniej więcej $\frac{3}{4}$ obserwowanych zajęć (73,8%) uczniowie rozwiązywali zadania tekstowe, choć bliższe rzeczywistości jest stwierdzenie, że (mniej lub bardziej biernie) uczestniczyli w ich rozwiązywaniu. Nieco większy nacisk na tę czynność kładzono w szkołach wiejskich: 81,8% zajęć w porównaniu z 65,5% w szkołach miejskich. Oto kilka przykładów sytuacji ilustrujących szkolne realia rozwiązywania zadań tekstowych:

W3:

- *Ja wykonam rysunek pomocniczy do zadania.
Ile było wagonów? Co jest dane w zadaniu?
Czego jeszcze dowiadujemy się?
Czyli obliczamy, ilu było pasażerów w trzech wagonach.*

W18:

- *Czyli co mamy tutaj zrobić? Krzysio! ...
Właśnie. Musimy policzyć, ile trwa podróż Jacka z Krakowa do Warszawy.
I mamy tutaj zegar. Wyjechał o 6:05, czyli mała wskazówka jest na 6, a duża na 5.
(nauczycielka prezentuje na zegarze, ile czasu upłynęło do 7:05)
A dojechali o 8:40, więc trzeba liczyć dalej. Czyli już mamy 8:05. Czyli już wiemy, że podróż trwa co najmniej 2 godziny. Jedziemy do 8:40. Wiemy, że pełnych godzin zajęło Jackowi 2 godziny i 35 minut.*
- *Więc tutaj w tym zadaniu, co musimy zrobić? Obliczyć różnicę.*
- *Przeczytaj zadanie. (...)
Czyli tak – wagon kolejowy ma 23 m 50 cm.
Długość samolotu ma długość trzech takich wagonów.
To jak policzymy długość samolotu?
Jakie centymetry? Metry!
Proszę do tablicy. Zetrzyj to i na środku piszemy.
Razy 3! Trzy, a nie dwa, tam były trzy wagony.
Najpierw pomnożymy przez 3 co?
Co nam jeszcze zostało pomnożyć?*

Dobrze. No, napisz zero!

No napisz. Tu mamy metry, a tu centymetry.

W19:

– *I teraz słuchamy zadania. (czyta)*

Jakie będzie działanie, Dawidek?

No to piszemy: 107 dodać 89. (pisze na tablicy)

M1:

– *I słuchacie, tam jest jeszcze wskazówka, przeczytaj Iza wskazówkę.*

Myszę, że rysunek pomocniczy będzie nam potrzebny. Co będziemy rysować?

(Uczeń proponuje rysowanie kresek.)

Co będą oznaczały kreski?

Czyli, ile tych kresek musielibyśmy narysować?

Poczekajcie dzieci, musimy spokojnie Mateuszowi wyjaśnić, po co taka wskazówka jest w zadaniu, żeby nam ułatwić, czy utrudnić. Czy myślisz, że autor by nam ułatwił, gdyby kazał nam rysować 245 pasażerów? Nie byłoby to dla nas ułatwienie, natomiast będzie ułatwieniem, jeśli narysujemy 4 autokary. Oczywiście, posługujemy się symbolami, a więc nasze autokary to będą prostokąty. Kto na ochotnika przyjdzie je narysować?

Chodź Sebastian, nie byłeś dzisiaj przy tablicy. Ile prostokątów musisz narysować?

A, my patrzymy najpierw na tablicę, będziemy korygować rysunek kolegi, jeśli okaże się, że coś jest nie tak. Wiesz co, boję się, że ci się nie zmieści. Gdybyś tak zaczął od brzegu, bo może się nie zmieścić.

...

Zrobiliśmy rysunek pomocniczy: mamy trzy autokary i jeden piętrowy. Teraz, co wiemy z zadania?

Tak, wszystkie miejsca są zajęte i siedzi w tych autokarach 245 turystów. To teraz powiedzcie, czy wiemy, ile jest w zwykłym autokarze? Patryk, powiedz, czy wiemy, ile jest w zwykłym autokarze? No to mamy problem, proszę.

Kochani, może pomyślimy najpierw. Słuchajcie uważnie. Czy wiemy, ile jest w małym autokarze? Nie wiemy. Jak nie wiemy czegoś, to jak oznaczamy jakąś rzecz¹⁰¹? Co to jest X?

¹⁰¹ Zadanie, zdaniem autorów wykorzystywanego w tej klasie pakietu edukacyjnego, należało rozwiązać używając równania.

To napiszmy: w pierwszym autokarze jest niewiadomo ile ludzi. A w drugim jest tyle samo co tutaj.

Mikołaj mówi, że w tym dużym muszą być dwa X , bo w nim jest dwa razy więcej ludzi niż w małym. Powiedzcie mi teraz, ile mamy tych X .

Bardzo dobrze. Mikołaj podejdzie w takim razie i ułoży równanie do tego zadania. Pamiętajmy, co to jest równanie? Działanie z niewiadomą.

Sebastian mi powie, ile razy na rysunku pojawia się niewiadoma.

Jeśli niewiadoma powtórzy się 5 razy, to da to jaką liczbę?

Pięć tych niewiadomych to jest liczba pasażerów, no, to jak zapiszemy? Co musimy zrobić, żeby obliczyć, ilu jest pasażerów?

M3:

– *Strona 24 zadanie 7. Karol przeczytasz nam głośno?*

Jakie mamy dane w tym zadaniu?

Jakie musimy tutaj zastosować działania?

Przypominam jak piszemy liczby wielocyfrowe. ...

Teraz zrobimy zadanie 9. Musimy tym razem pomnożyć i podzielić.

M5:

– *Co my wiemy z zadania? ...*

Właśnie, więc teraz trzeba pomnożyć. Trzeba dokładnie czytać zadanie. ...

W ilu grupach jadą? W pięciu grupach. (Nauczycielka sama odpowiada.)

W każdej grupie było po ile?

Więc jak obliczyć, ile było w pierwszej grupie? ...

W pierwszym dniu było ile? W drugim dniu?

Uwaga, jaki znak mamy wpisać, aby odpowiedzieć na pytanie?

M8:

– *Zadanie z treścią jest następne, musimy je najpierw przeczytać, zanim powiem, kto przyjdzie do tablicy. Dodawanie jest łatwiejsze czy trudniejsze od odejmowania?*

Uczeń: Łatwiejsze.

Łatwiejsze prawda, łatwiej dodać, niż odejmować pisemnie. Teraz będzie zadanie pisemne¹⁰², posłuchajcie proszę. (Nauczyciel czyta zadanie z treścią.)

Wszyscy uzgodnijmy sobie dane, które mamy w zadaniu. ...

¹⁰² Czyli obliczenie trzeba wykonać z pomocą pisemnego algorytmu.

Jakie pierwsze działanie będzie?

Uczeń: 386 – 265. (Inni uczniowie się nie zgadzają.)

Chwileczkę, ręka do góry, kto zgłasza sprzeciw. Bardzo proszę, bo nie jest to dobra odpowiedź.

Uczeń: 386 + 265.

M11:

– *Proszę mi powiedzieć, ilu wioślarzy wsiadło do łodzi? Całym zdaniem oczywiście! A do łodzi czteroosobowych?*

Jakie jest pytanie?

Jakie pierwsze obliczenie?

To były łodzie dwuosobowe, a teraz? Teraz mamy czteroosobowe.

Na razie analizujemy zadanie. Czy ja kazałam pisać?

Co najpierw musimy zrobić?...

Proszę mi powiedzieć, ilu wioślarzy brało udział w zawodach?

Najpierw musimy opisać znaczki na drzewku¹⁰³.

Między 60, a 20 jaki musi być znak? Ślicznie.

Jakie pierwsze obliczenie na podstawie drzewka?

Dzieci, czy to będzie pierwsze obliczenie? Następne. Na drzewko cały czas patrzemy!

Jak widać, nauczyciele sprowadzali rozwiązanie zadanie do wyboru właściwego działania do wykonania, najczęściej sami zdradzając, o jakie działanie chodzi i w jaki sposób wykonane – najlepiej pisemnie. Uczniowie zazwyczaj nie mieli okazji do zaprezentowania własnych pomysłów na rozwiązanie tego czy innego zadania.

Swoboda intelektualna ucznia podczas zajęć z edukacji matematycznej jest zdecydowanie mniejsza niż np. podczas rozwijania umiejętności językowych (por. też wcześniej) – na 64,6% zajęć nauczyciel prezentował gotowe metody postępowania i nakłaniał dzieci do ich stosowania. Wiele przykładów tego typu sytuacji już podałem, oto kilka kolejnych:

¹⁰³ Tym razem zadanie należało rozwiązać z pomocą drzewka.

W5:

- *Pamiętamy, co to jest obwód kwadratu? Jak obliczamy?*

Dzieci: 4a.

Jak możemy inaczej obliczyć?

Dzieci: 4b.

Nie, nie możemy b, jeśli mamy a.

M20:

- *Jak obliczymy obwód tego trójkąta? Kto mi poda wzór?*

To teraz pod ten wzór podstawiamy swoje dane.

W6:

- *Następne ćwiczenie. Proszę, po kolei.*

*Następne ćwiczenie – też bardzo proste.*¹⁰⁴

Jeszcze jedno, żebyście sobie utrwalili.

Teraz będzie zadanie trudniejsze, to jest na myślenie. Ja Wam pokażę.

Aruś, co ty robisz? On już wyprzedza, pędzi, pędziwiatr.

M15:

- *Proszę podzielić go (prostokąt) na 4 równe części.*

Mateusz, podziel bok na pół i jeszcze raz na pół.

- *$\frac{1}{5}$ z 10 tysięcy możecie wydać na sprzęt. Ile pieniędzy możecie wydać? Licznik wskazuje, jaką mamy liczbę do podziału, a mianownik przez co dzielić.*

M16:

- *Słuchajcie dzieci, aby zrobić zadanie 4 muszę wam o czymś powiedzieć. Kiedy odejmujemy godziny i minuty, musimy pożyczyć 1 godzinę.*

(Nauczyciel prezentuje opisywane odejmowanie na tablicy).

Ile godzina ma minut? Czyli 60 minut dodajemy do tych 20. Czy teraz możemy obliczyć? Chodzi o to, żeby zwiększyć minuty tak, by dało się odjąć.

M19: (Nauczycielka pisze na tablicy przykład dotyczący dodawania ułamków o tym samym mianowniku.)

- *Licznik się zmienia, a mianownik zostaje. Na tej kresce zapiszę sobie wszystkie liczniki. Popatrzcie: $\frac{8}{8}$. Mówiłam, że jeżeli jest $\frac{2}{2}$ albo $\frac{8}{8}$ to jest jedna całość.*

¹⁰⁴ Cytat z komentarza obserwatora: *Dzieci nie miały żadnych trudności z rozwiązywaniem kolejnych ćwiczeń. W ciągu całej lekcji nie padła żadna błędna odpowiedź.*

W szkołach miejskich zaobserwowano takie sytuacje na 75,0% zajęć, w szkołach wiejskich na 54,5%. To zjawisko jest zresztą jeszcze bardziej masowe niż wynika to z danych z obserwacji – na pozostałych zajęciach sytuacji takiej wprawdzie nie odnotowano, ale na ogół uczniowie zarówno przy wykonywaniu obliczeń, jak i rozwiązywaniu zadań tekstowych stosowali metody „zaproponowane” kiedy indziej przez nauczyciela.

Pora na te aktywności, które podczas obserwacji pojawiały się rzadko.

Na mniej więcej co szóstych zajęciach (16,9%) były wykorzystywane gry, które zazwyczaj służyły rozwijaniu arytmetycznych umiejętności dzieci – częściej sięgali po nie nauczyciele szkół wiejskich.

Nieco rzadziej: 15,4% zajęć uczniowie mieli okazję do rozwiązywania zadań branych z życia codziennego – tym razem miało to miejsce przede wszystkim w szkołach miejskich.

Jeszcze rzadziej: 7,7% i tylko w szkołach miejskich wykorzystywane był jako element zajęć mapy, plany, diagramy, tabele – w szkołach wiejskich zabrakło tego szkolnego odpowiednika „matematyki stosowanej”.

Na mniej więcej co dziesiątych zajęciach: 9,2% pojawiały się problemy – przy czym, jak już wspominałem, ich rozwiązywaniem zajmowali się zazwyczaj sami nauczyciele.

Sporadycznie: 4,6% zajęć dzieci obcowały z modelami obiektów geometrycznych i rozwijały swoje intuicje i umiejętności geometryczne.

Trzeba powtórzyć jeszcze raz – **edukacja matematyczna w praktyce szkolnej to przede wszystkim rozwijanie sprawności rachunkowej dzieci. Takie rozumienie matematyki niszczy jej walory kształcące i motywujące.** Znika matematyka jako nauka służąca rozwiązywaniu problemów i zadań, także praktycznych, w której należy badać regularności, dostrzegać związki, przewidywać i wyjaśniać. Zamiast niej pojawia się dyscyplina, w której liczy się w sposób pokazany przez nauczyciela i ćwiczy podane przez niego metody reagowania w typowych sytuacjach. Ta dyscyplina z matematyką nie ma już zupełnie nic wspólnego.

Przy wszystkich drobnych różnicach w strukturze zajęć czy nasileniu pewnych zjawisk należy uznać, że sposób działania nauczycieli podczas obserwowanych zajęć służących rozwijaniu umiejętności matematycznych dzieci był bardzo zbliżony, niezależnie od środowiska, w jakim była zlokalizowana szkoła.

Nasze szkoły są do siebie bardzo podobne. Przekonanie, że **jeśli czegoś nauczyciel nie powiedział, to dzieci tego nie wiedzą**, ujawnia się w praktyce w obu typach szkół i we wszystkich obserwowanych szkołach:

- *Morze. A jaki to krajobraz? Nie mówiliśmy jeszcze o tym, może to troszkę trudne.*
- *Bartek! Co ty wymyślasz? Skąd ty to wziąłeś, jeśli nie było tego jeszcze na lekcji?* (ułamek $\frac{2}{4}$)
- *Nie uczyłam was mnożenia przez liczbę 12. To wy liczyście takim sposobem?*

I ostatni już cytat z obserwacji – ich podsumowanie „w pigułce”:

- *Żeby cokolwiek zrobić trzeba czekać na moje polecenie. I trzeba dobrze mapkę ułożyć. **Ja to ocenię, a nie ty.***
*Otwieramy zeszyty. Nic nie robicie. **Ja wszystko powiem i wytłumaczę.***
*Mapkę wklejamy w tę stronę na wolnej kartce. **Pokazuję i ja mówię.***

Brak wiary w możliwości ucznia to jedna z najbardziej typowych cech obserwowanych zajęć. W ślad za nią podążają kolejne zjawiska – dominujący i dużo mówiący nauczyciel, a w efekcie mało aktywne intelektualnie dzieci, powtarzające schematy narzucone przez nauczyciela i – w efekcie – niezbyt zainteresowane wydarzeniami dziejącymi się na lekcji.

Z czego wynika taki właśnie początek szkolnej przygody dzieci z matematyką?

II. 7 SKUTECZNY NAUCZYCIEL?

Podczas gdy uczniowie wypełniali kolejne testy, ich wychowawcy – nauczyciele klas trzecich poddawani byli badaniom ankietowym, które dostarczyły dodatkowych informacji zarówno o wszystkich nauczycielach biorących udział w kolejnych edycjach badań, jak i konkretnie tych, których lekcje były obserwowane.

Jedna z ankiet: *Nauczyciel o sobie, podręczniku i swojej pracy*¹⁰⁵ dostarczyła danych o formalnych kompetencjach czterdziestu nauczycieli pracujących w obserwowanych klasach. Aż 36 z nich ukończyło studia magisterskie z zakresu na-

¹⁰⁵ Por. Dąbrowski M., Wiatrak E. 2009, Dąbrowski M. 2011d.

uczania początkowego, jeden – studia I stopnia, a dwóch uzyskało uprawnienia do nauczania w klasach 1-3 dzięki odpowiednim studiom podyplomowym¹⁰⁶. Wszyscy w chwili realizacji badań posiadali już spory staż w pracy nauczyciela i spory dorobek zawodowy – dwadzieścia trzy osoby były zatrudnione na stanowisku nauczyciela dyplomowanego, a szesnaście – nauczyciela mianowanego. Średnia wieku wynosiła około 45 lat. Należy więc uznać, że obserwowani nauczyciele to grupa o wysokim poziomie wykształcenia i dużym doświadczeniu zawodowym.

Wypełniając inną z ankiet: *Nauczyciele o edukacji językowej i edukacji matematycznej* nauczyciele badanych klas ustosunkowywali się do kilkudziesięciu stwierdzeń dotyczących celów edukacyjnych obu edukacji oraz praktyki nauczania w klasach 1-3 na czterostopniowej skali: *zdecydowanie tak (+)*, *raczej tak (+)*, *raczej nie (-)*, *zdecydowanie nie (-)*. Poniżej fragment kwestionariusza wykorzystanego w roku 2010:

1.	Nie można pozostawić dzieciom zbyt wiele swobody w pisaniu, bo wtedy piszą nie na temat.	+	+	-	-
2.	Należy dążyć do tego, aby jak najwięcej dzieci tworzyło własne sprytne metody wykonywania obliczeń.	+	+	-	-
3.	Dyscyplina i cisza w klasie podczas nauki języka gwarantują lepszą pracę.	+	+	-	-
4.	Tworzenie nawet prostych argumentacji i wyjaśnień przekracza możliwości większości uczniów klas 1-3.	+	+	-	-
5.	Udział dzieci w dyskusjach na lekcji, to ważny element edukacji językowej w klasach początkowych.	+	+	-	-
6.	Najważniejszym celem edukacji matematycznej w klasach 1-3 jest zapoznanie uczniów z symboliką matematyczną.	+	+	-	-

Przyjrzyjmy się tym stwierdzeniom, które dotyczyły edukacji matematycznej i powtórzyły się w identycznej lub bardzo zbliżonej postaci zarówno w badaniach 2008, jak i 2010.

¹⁰⁶ Jedna osoba – nauczycielka ze szkoły M12 z przyczyn losowych nie wypełniła ankiet.

Spośród nich dziewięć dotyczyło rozwijania umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych:

Tabela 9. Procentowy rozkład opinii nauczycieli badanych klas 1-3 w latach 2008 i 2010 – rozwijanie umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych.

stwierdzenia	+	+	-	-	rok
<i>Zawsze należy pozwalać uczniom na samodzielne wybieranie metody rozwiązywania zadania tekstowego.</i>	30,4	53,4	15,4	0,8	2008
	39,3	47,7	11,9	1,1	2010
<i>Najlepsze rozwiązanie zadania tekstowego to to, które uczeń samodzielnie wymyśli.</i>	24,9	45,9	24,9	4,3	2008
	14,9	50,3	30,6	4,2	2010
<i>Warto znaleźć czas na to, aby uczniowie prezentowali własne metody rozwiązania tego samego zadania.</i>	72,5	27,1	0,0	0,4	2008
	74,6	24,7	0,0	0,7	2010
<i>Warto, aby uczniowie sami oceniali poprawność prezentowanych przez siebie rozwiązań.</i>	25,7	61,3	11,9	1,1	2008
	32,8	58,5	7,0	1,7	2010
<i>Uczeń powinien mieć świadomość, że każde zadanie można rozwiązać na kilka różnych sposobów.</i>	67,6	30,8	1,2	0,4	2008
	71,8	26,8	1,4	0,0	2010
<i>Rozwiązanie zadania na rysunku jest tak samo dobre, jak zapisanie i wykonanie odpowiedniego obliczenia.</i>	25,7	59,4	12,6	2,3	2008
	37,5	51,0	11,2	0,3	2010
<i>Rozwiązanie zadania dzięki zapisaniu i wykonaniu odpowiedniego obliczenia jest lepsze i bardziej „matematyczne” niż np. rozwiązanie rysunkowe.</i>	3,4	20,7	60,9	15,0	2008
	3,8	19,8	53,1	23,3	2010
<i>Zadania nietypowe mogą rozwiązywać tylko uczniowie najzdolniejsi.</i>	8,1	26,5	47,7	17,7	2008
	5,2	12,2	45,4	37,2	2010
<i>Jeśli chcemy, aby uczniowie opanowali umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych, musimy przerobić z nimi dużą liczbę typowych zadań.</i>	28,7	47,5	21,1	2,7	2008
	34,7	47,9	15,7	1,7	2010

Początkowe stwierdzenia tej tabeli rysują wręcz idealistyczny wizerunek procesu matematycznego kształcenia dziecka:

- zdecydowana większość nauczycieli (odpowiednio: 83,8% oraz 87,0%) popiera pogląd, że zawsze dzieci powinny mieć prawo wyboru metody rozwiązania zadania tekstowego, gdyż wymyślone przez ucznia rozwiązanie jest tym najlepszym (70,8% oraz 65,2%),
- prawie wszyscy (99,6% oraz 99,3%) zgadzają się ze stwierdzeniem, że warto znaleźć czas, aby potem dzieci prezentowały swoje rozwiązania kolegom, a nawet aby one same oceniały poprawność pokazywanych rozwiązań (87,0% oraz 91,3%),
- także niemal wszyscy są zdania, że uczniowie powinni wiedzieć, że jest wiele możliwych sposobów rozwiązania każdego zadania tekstowego (98,4% oraz 98,6%),
- respondenci konsekwentnie zgadzają się także z tym, że rozwiązanie rysunkowe zadania tekstowego jest równie dobre, jak arytmetyczne (85,1% oraz 88,5%; przy innym sformułowaniu 75,9% oraz 76,4%, czyli o około 10% mniej).

Tylko niewielu nauczycieli w roku 2010 poparło stwierdzenie, że zadania nietypowe są niedostępne „przeciętnym” uczniom – w roku 2008 zrobiło to 34,6% osób, czyli prawie dwa razy więcej. Jest to największa zaobserwowana zmiana w zakresie stosunku respondentów do opinii zawartych w kwestionariuszu. Ten obraz psuje jednak ostatnie stwierdzenie – aż odpowiednio 76,2% oraz 82,6% badanych akceptuje pogląd, tym razem nawiązujący już do codziennej praktyki, że **w rozwijaniu umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych chodzi przede wszystkim o przerobienie dużej liczby typowych zadań**. Jak to się ma do stwierdzeń przytoczonych powyżej?

Podobne zjawisko daje się zauważyć w przypadku opinii dotyczących rozwijania sprawności rachunkowej dzieci:

Tabela 10. Procentowy rozkład opinii nauczycieli badanych klas 1-3 w latach 2008 i 2010 – rozwijanie sprawności rachunkowej dzieci.

stwierdzenia	+	+	-	-	rok
<i>Należy dążyć do tego, aby jak najwięcej dzieci tworzyło własne sprytnie metody wykonywania obliczeń.</i>	42,5	43,2	12,8	1,5	2008
	44,2	47,0	8,8	0,0	2010
<i>Uczniowie w tym wieku nie są w stanie tworzyć własnych sprytnych metod wykonywania obliczeń.</i>	1,5	15,6	55,7	25,2	2008
	1,4	11,3	49,3	38,0	2010
<i>Uczniowie najlepiej uczą się liczyć, utrwalając z pomocą typowych słupków metody pokazane przez nauczyciela.</i>	10,3	34,1	48,7	6,9	2008
	10,1	37,3	42,8	9,8	2010
<i>Najlepiej i najbezpieczniej, gdy dzieci liczą w sposób pokazany przez nauczyciela.</i>	4,2	32,4	46,2	17,2	2008
	4,6	26,7	50,5	18,2	2010
<i>Biegłe stosowanie algorytmów działań pisemnych, to jedna z najbardziej życiowo przydatnych umiejętności matematycznych.</i>	43,0	39,8	13,7	3,5	2008
	41,7	41,1	14,0	3,2	2010
<i>Dzieci nie powinny korzystać z kalkulatora, ponieważ nie będą umiały sprawnie liczyć w pamięci.¹⁰⁵</i>	48,1	28,6	17,6	5,7	2008
	36,3	33,4	25,1	5,2	2010

Prawie jednomyślnie (85,7% oraz 91,2%) nauczyciele zgadzają się z tym, że w procesie kształcenia trzeba rozwijać zaradność arytmetyczną dzieci i dążyć do tego, żeby samodzielnie budowały one swoje strategie obliczeniowe, tym bardziej, że są w stanie to robić – tylko odpowiednio 17,1% oraz 12,7% badanych było przeciwnego zdania.

Z drugiej strony jednak, prawie połowa respondentów (44,4% oraz 47,4%) jest przekonanych, że uczniowie będą najlepiej liczyć wówczas, gdy „przerobią”

¹⁰⁷ W roku 2008 to stwierdzenie brzmiało tak: *Kalkulator to narzędzie, które „zabija” umiejętność wykonywania obliczeń w pamięci.*

wystarczająco dużo typowych słupków, utrwalając w ten sposób te metody rachunkowe, które pokaże im nauczyciel. Dzieci wykonujące obliczenia sposobem wybranym przez nauczyciela dają sporej części badanych (36,6% oraz 31,3%) poczucie bezpieczeństwa i realizacji założonego celu.

Po 82,8% nauczycieli uważa, że mistrzostwo w posługiwaniu się algorytmami działań pisemnych jest najbardziej przydatną na co dzień umiejętnością matematyczną. Nie zmieniają tego przekonania ani realia, ani powszechność kalkulatorów, ani zmiany podstawy programowej. Jest to o tyle niepokojące, że w ten sposób badani ujawniają również, jak faktycznie postrzegają samą matematykę i jej użyteczność. W starciu: *algorytmy działań pisemnych kontra kalkulator* ten ostatni zdecydowanie przegrywa – i to, znowu, mimo zmian w naszym codziennym życiu i w podstawie programowej. Ten obszar przekonań wciąż pozostaje niezmienny.

Tabela 11. prezentuje dane dotyczące pozostałych stwierdzeń o matematycznym charakterze. Większość nauczycieli: odpowiednio 80,5% oraz 81,2% przyznaje, że może mieć istotny wpływ na poziom motywacji dzieci do uczenia się matematyki. Prawie wszyscy zgadzają się także z tym, że jednym ze sposobów budowania tej motywacji jest pokazywanie codziennej użyteczności matematyki (94,6% oraz 96,6%). Nieco mniej, bo odpowiednio 58,8% oraz 69,0%, ma świadomość, że podobną funkcję może pełnić rozwiązywanie zagadek.

Nieco ponad $\frac{1}{3}$ badanych (39,5% oraz 34,4%) uznaje zadania otwarte, które mają w sobie przecież coś z zagadek, za zbyt trudne dla dzieci. Okazuje się, że część nauczycieli uważa, że zadania tego typu są trudniejsze dla uczniów niż np. budowanie argumentacji i wyjaśnień.

Mniej więcej połowa respondentów (53,4% oraz 46,5%) jest przekonana, że najważniejszym celem edukacji matematycznej w klasach 1–3 jest zapoznanie dzieci z symbolami matematycznymi. Znajduje to także swoje odbicie w niezmiennej „sympatii” nauczycieli klas 1–3 do grafów i drzewek, które – zdaniem ponad 90% badanych – pomagają dzieciom w lepszym rozumieniu matematyki. Jak widać, te w pełni symboliczne notacje o znikomej przydatności edukacyjnej, które wprowadzono do nauczania początkowego w ramach „nowej matematyki” prawie czterdzieści lat temu wciąż są obecne w zawodowej świadomości nauczycieli.

Także ostatnie stwierdzenie z tabeli 11. dotyczy wprost praktyki nauczania – więcej niż połowa nauczycieli (56,9% oraz 53,0%), jest zdania, że uczenie się matematyki powinno polegać przede wszystkim na słuchaniu i naśladowaniu nauczyciela.

Tabela 11. Procentowy rozkład opinii nauczycieli badanych klas 1-3 w latach 2008 i 2010 – pozostałe stwierdzenia dotyczące edukacji matematycznej.

stwierdzenia	+	+	-	-	rok
<i>Nauczyciel ma tylko niewielki wpływ na chęć dziecka do uczenia się matematyki.</i>	3,1	16,4	51,1	29,4	2008
	2,4	16,4	50,8	30,4	2010
<i>Dzieci chętnie uczą się matematyki, gdy widzą jej przydatność w sytuacjach codziennych.</i>	53,4	41,2	5,0	0,4	2008
	70,5	26,1	3,1	0,3	2010
<i>Każde dziecko lubi zagadki, więc każde dziecko może lubić matematykę i chętnie jej się uczyć.</i>	20,6	38,2	32,4	8,8	2008
	30,7	38,3	25,8	5,2	2010
<i>Zadania otwarte, czyli o wielu możliwych rozwiązaniach, są za trudne dla dzieci w klasach 1–3.</i>	6,5	33,0	49,4	11,1	2008
	4,2	30,2	52,1	13,5	2010
<i>Tworzenie nawet prostych argumentacji i wyjaśnień przekracza możliwości większości uczniów klas 1–3.</i>	2,7	18,1	54,2	25,0	2008
	1,7	16,1	54,6	27,6	2010
<i>Najważniejszym celem edukacji matematycznej w klasach 1–3 jest zapoznanie uczniów z symboliką matematyczną.</i>	16,0	37,4	37,4	9,2	2008
	17,3	29,2	39,1	14,4	2010
<i>Grafy i drzewka pomagają uczniom w lepszym rozumieniu matematyki.</i>	49,0	44,8	5,0	1,2	2008
	56,5	36,2	5,9	1,4	2010
<i>Ucząc się matematyki, dziecko powinno przede wszystkim uważnie słuchać nauczyciela i powtarzać jego czynności.</i>	14,6	42,3	32,3	10,8	2008
	13,7	39,3	32,3	14,7	2010

Widać sporą rozbieżność pomiędzy opiniami wyrażanymi przez tych samych nauczycieli. Deklarują oni potrzebę, a niekiedy wręcz konieczność, tworzenia warunków dla aktywności intelektualnej dzieci i ich samodzielności poznawczej, ale równocześnie konsekwentnie oczekują utrwalania w tradycyjny sposób metod rozwiązywania zadań podawanych przez nauczycieli, uważnego słuchania nauczyciela przez dzieci i naśladowania przez nie wykonywanych przez niego czynności.

Czy to oznacza, że niektóre z tych opinii mają charakter „czystej” deklaracji? Że nauczyciele ustosunkowują się do części stwierdzeń w sposób, który uznają za zgodny z oczekiwaniami badaczy, choć sprzeczny z ich własnymi przekonania-
mi? A może po prostu nie mają jasno sprecyzowanych przekonań zawodowych, stąd ta rozbieżność sformułowań?

Oba te wyjaśnienia są prawdopodobne i należy sądzić, że prawdziwe w przypadku części respondentów.

Warto jednak zwrócić uwagę na to, że mamy tu do czynienia ze sprzecznością dwóch obszarów zagadnień – obszaru deklaracji dotyczących celów edukacji matematycznej i sposobów ich realizacji oraz obszaru praktyki szkolnej i stosowanych w niej na co dzień rozwiązań. Możliwe jest więc jeszcze jedno wyja-

śnienie zaobserwowanego zjawiska – część nauczycieli może być przekonana, że te praktyczne metody, które są obecne w naszej szkole „od zawsze” (i które, w efekcie, oni stosują) są najlepszym, z punktu widzenia dobra dziecka, sposobem realizacji deklarowanych celów i konsekwentnie oraz bardzo skutecznie w ten właśnie sposób działa. Innymi słowy: **należy sądzić, że zajęcia z edukacji matematycznej wyglądają w przedstawiony sposób, ponieważ nauczyciele uważają, że tak powinny wyglądać, że to jedyny właściwy sposób prowadzenia tych zajęć**¹⁰⁸.

Tym bardziej, że – jak pokazują np. obserwacje zajęć prowadzonych przez nauczycieli w klasach trzecich – jest wielce prawdopodobne, że niektórym ze słów-kłuczy zawartym w stwierdzeniach kwestionariusza: *samodzielne, własne* nadają oni swoje własne, typowo szkolne, znaczenie. Uczeń rozwiązał samodzielnie zadanie – czyli sam, a nie pod dyktando nauczyciela, zastosował podaną wcześniej przez nauczyciela metodę postępowania do kolejnego podobnego zadania z serii.

I ostatnie spostrzeżenie: uderza ogromna zgodność opinii nauczycielskich z badań z lat 2008 i 2010. **Świadczy to o tym, że prezentowane tu wyniki są typowe dla I etapu kształcenia w polskiej szkole.**

Stwierdzenia z opisanego powyżej kwestionariusza pozwoliły każdego z ankietowanych nauczycieli ulokować w trzech skalach: *pesymizmu edukacyjnego, formalizmu edukacyjnego oraz promowania samodzielności*¹⁰⁹.

W skład skali *pesymizmu edukacyjnego* wchodzi stwierdzenia wyrażające przekonanie o braku gotowości dzieci do samodzielnego myślenia, ich niewielkich możliwościach intelektualnych oraz wiedzy. Nauczyciele o wysokich wynikach na tej skali niechętnie się odnoszą do idei tworzenia uczniom warunków do podejmowania mniej sformalizowanych, bardziej spontanicznych i twórczych w swej naturze aktywności edukacyjnych.

Formalizm edukacyjny mierzy natężenie postawy, która objawia się eksponowaniem w procesie kształcenia prostych procedur i algorytmów, łatwo poddających się testowaniu i konsekwentnym ich utrwalaniem. Nauczyciel lokujący się wysoko w tej skali preferuje taki styl pracy, który wymaga od uczniów przede wszystkim podporządkowania i dyscypliny.

¹⁰⁸ A może także jedyny im znany sposób ich prowadzenia.

¹⁰⁹ Por. Kondratek B. 2009, 2011.

Natomiast *promowanie samodzielności* bada poziom przekonania nauczyciela o wadze samodzielności poznawczej dzieci i ich aktywności intelektualnej dla ich rozwoju oraz jego gotowość do uruchamiania samodzielnych działań uczniów w procesie kształcenia.

Zestawienie tych skal z poziomem umiejętności uczniów¹¹⁰ pokazało, że istnieje związek między poglądami wyrażanymi przez nauczyciela a umiejętnościami jego uczniów, zwłaszcza umiejętnościami matematycznymi.

Okazało się, że najsilniej różnicowała wyniki uczniów skala pesymizmu edukacyjnego – korelował on ujemnie ze wszystkimi badanymi typami umiejętności matematycznych, np. rozwiązywaniem zadań tekstowych typowych oraz nietypowych, czytaniem tekstów matematycznych czy wykonywaniem obliczeń i to zawsze w sposób istotny statystycznie. Większy pesymizm edukacyjny nauczyciela był tożsamy z gorszymi wynikami jego uczniów, lepsze wyniki uczniów oznaczały niższy poziom pesymizmu u ich nauczyciela.

Formalizm edukacyjny nauczyciela także korelował ujemnie z matematycznymi umiejętnościami jego uczniów i dla wielu obszarów umiejętności był to związek istotny statystycznie.

Jedynie *promowanie samodzielności* korelowało pozytywnie z umiejętnościami dzieci, choć dla większości badanych obszarów umiejętności w sposób, który nie był istotny statycznie.

Nasuwa się pytanie: **czy poglądy nauczycieli są odbiciem poziomu uczniów, czy raczej odwrotnie, to one właśnie – i wynikający z nich styl edukacyjny – generują taki, a nie inny poziom umiejętności uczniów?** Wiele przemawia za tym¹¹¹, że w znacznej mierze to poglądy nauczycieli determinują szkolną praktykę i wpływają na efekty szkolnych poczynań uczniów.

¹¹⁰ Por. Kondrątek B. 2011.

¹¹¹ *Op.cit.*

ROZDZIAŁ III. CZAS PODSTAW PROGRAMOWYCH

Ja muszę realizować program nauczania! – to stwierdzenie padające z ust nauczyciela ucinąło w przeszłości wszelkie próby rozmowy o zmianie sposobu pracy z klasą czy choćby poświęceniu dodatkowego czasu na niezrozumiałe dla uczniów zagadnienie. W naszym kraju program nauczania był zawsze dokumentem wywierającym ogromny wpływ na sposób myślenia i funkcjonowania nauczycieli, to on determinował nie tylko to, czego dzieci mają się uczyć, ale także w jaki sposób mają to robić. A ponieważ „najlepszą” i najbezpieczniejszą egzemplifikacją programu nauczania był, w opinii wielu nauczycieli, podręcznik, więc w szkołach na porządku dziennym była „realizacja podręcznika”. W efekcie, celem pracy części nauczycieli przestawał być rozwój uczniów, a stawało się „odfajkowywanie” kolejnych haseł programu czy kolejnych stron pakietu edukacyjnego.

W roku 1989 w polskiej edukacji „powiało nowym” – rozpoczął się proces demokratyzacji szkoły, z którym rzesze nauczycieli, zwłaszcza tych bardziej postępowych, wiązały ogromne nadzieje.

Stopniowo zachodzące zmiany objęły także obszar programów nauczania:

- Państwo rezygnowało z monopolu na programy nauczania, uruchamiając procedurę dopuszczania do użytku szkolnego na terenie kraju programów przygotowywanych przez wydawnictwa czy osoby prywatne.
- Rozpoczęto prace nad nowym typem dokumentu programowego, który miał zawierać wspólny trzon treści dla programów nauczania dopuszczanych do użytku, trwały dyskusje na temat jego nazwy: *minimum programowe* a może *podstawa programowa*¹¹².
- Coraz więcej mówiono, podobnie jak na całym świecie, o oczekiwaniach pracodawców w stosunku do systemu edukacji. Określenie: *kompetencje kluczowe* weszło do polskiego słownika edukacyjnego, a rozwijanie u uczniów *umiejętności kluczowych*, których celem miało być m.in. wyposażenie uczniów w narzędzia pozwalające im samodzielnie radzić sobie z szybko zmieniającą się rzeczywistością, stało się ważnym zadaniem naszej edukacji, wpisywanym w kolejne dokumenty programowe.

¹¹² Por. Sławiński S. 1994, 1996.

- Podstawowym¹¹³ dokumentem prawnym określającym zadania merytoryczne stojące przed szkołą (ogólnokształcąca) stały się początkowo *podstawy programowe obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących*, a od 1999 roku *podstawa programowa kształcenia ogólnego*.

W tym rozdziale chcę się przyjrzeć bliżej mniej więcej dwudziestoletniemu procesowi zmian programowych w tym zakresie, jaki dotyczy nauczania początkowego matematyki. Przytoczę w tym celu zarówno odpowiednie zapisy kolejnych obowiązujących minimów czy podstaw programowych, jak i takich ich wersji, które – mimo przygotowania – nie nabrały mocy prawnej.

Opiszę także ewolucję w dokumentach prawnych wspomnianych wyżej kompetencji (czy umiejętności) kluczowych – i to nie tylko dlatego, że na I etapie kształcenia powinno rozpocząć się budowanie fundamentu pod ich efektywny rozwój w kolejnych latach nauki, ale przede wszystkim z tego względu, że są one także istotne dla matematycznego rozwoju dziecka.

III.1 UMIEJĘTNOŚCI KLUCZOWE W POLSKICH PODSTAWACH PROGRAMOWYCH¹¹⁴

W 1995 roku uruchomiono w Polsce program PHARE Kreator¹¹⁵, którego celem było opracowanie sposobu włączenia pięciu umiejętności kluczowych:

- planowania, organizowania i oceniania własnego uczenia się
- skutecznego porozumiewania się w różnych sytuacjach
- efektywnego współdziałania w zespole
- rozwiązywania problemów w twórczy sposób
- operowania informacjami i efektywnego posługiwania się technologią informacyjną

w nauczanie przedmiotowe oraz nauczanie początkowe, z uwzględnieniem m.in. planowania i oceniania procesu ich rozwijania oraz doboru stosowanych metod.

W okresie trwania projektu pracujący w nim nauczyciele zrealizowali na terenie całego kraju wiele szkoleń i konferencji, promujących zmianę stylu pracy nauczyciela – także w kierunku pobudzania i wykorzystywania świadomej aktywności poznawczej ucznia oraz przygotowali bogate materiały edukacyjne ilu-

¹¹³ A aktualnie nawet jedynym.

¹¹⁴ Dąbrowski M., Wiśniewski J. 2011.

¹¹⁵ Kreator 1998.

strujące m.in. za pomocą scenariuszy zajęć¹¹⁶ sposoby rozwijania umiejętności kluczowych w warunkach szkolnych zajęć.

W dniu 15 maja 1997 roku Minister Edukacji Narodowej podpisał *Zarządzenie nr 8 w sprawie podstaw programowych obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących*¹¹⁷. Był to dokument pod wieloma względami nowatorski. Proces kształcenia został podzielony w nim strukturalnie na dwu lub trzyletnie etapy edukacyjne (w miejsce tradycyjnych klas), a tematycznie – na 21 dziedzin edukacyjnych. Dokument traktował szkołę jako całość i to przed szkołą jako spójnie działającą instytucją stawiał zadania – zarówno ogólne, dotyczące jej globalnego działania, jak i szczegółowe – odnoszące się do kolejnych etapów kształcenia czy dziedzin edukacyjnych. Ustalając te zadania: *położono nacisk na kształtowanie umiejętności przygotowujących uczniów do odpowiedzialnego życia w demokratycznym społeczeństwie o wolnorynkowej gospodarce*¹¹⁸, czego efektem było także sformułowanie pierwszej w polskim prawodawstwie oświatowym listy umiejętności kluczowych. Znalazło się na niej siedem umiejętności, które uznano za najważniejsze dla rozwoju ucznia i jego przyszłego życia zawodowego: *uczenie się, myślenie, poszukiwanie, doskonalenie się, komunikowanie się, współpraca oraz działanie* (por. tabela 1.). W ich doborze widać wyraźne odbicie dyskusji toczących się w latach dziewięćdziesiątych na różnych międzynarodowych forach¹¹⁹.

Tabela 1. Lista umiejętności kluczowych – podstawy programowe obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących z 15.05.1997 r. (Dz.U. MEN Nr 5, poz. 23).

UCZENIE SIĘ

Rozwiązywanie problemów poznawczych i realizacyjnych.

Organizowanie procesu uczenia się i przyjmowanie odpowiedzialności za własne wykształcenie.

Wykorzystywanie doświadczeń i łączenie różnych elementów wiedzy.

MYŚLENIE

Dostrzeganie związków przeszłości z teraźniejszością, związków przyczynowo-skutkowych i zależności funkcjonalnych.

Radzenie sobie z niepewnością i złożonością zjawisk; ich całościowe i kontekstowe postrzeganie.

POSZUKIWANIE

Poszukiwanie, porządkowanie i wykorzystywanie informacji z różnych źródeł, w tym rozważne i umiejętne korzystanie z mediów.

¹¹⁶ Kreator 1999.

¹¹⁷ Dz.U. MEN Nr 5, poz. 23.

¹¹⁸ Załącznik do zarządzenia nr 8 MEN z dnia 15.05.1997 r. (Dz.U. MEN Nr 5, poz. 23).

¹¹⁹ Council of Europe 1996.

DOSKONALENIE SIĘ

Ocena postaw i postępowania własnego i innych zgodnie z przyjętymi normami i systemem wartości uniwersalnych.

Przyjmowanie odpowiedzialności za siebie i innych.

Elastyczne reagowanie w obliczu zmiany, poszukiwanie nowych rozwiązań, stawianie czoła przeciwnościom.

Utrzymywanie zdrowia fizycznego i psychicznego.

KOMUNIKOWANIE SIĘ

Skuteczne komunikowanie się.

Prezentowanie własnego punktu widzenia, argumentowanie i obrona własnego zdania.

Gotowość wysłuchania i brania pod uwagę poglądów innych ludzi.

Korzystanie z nowych technologii komunikowania się.

WSPÓŁPRACA

Praca w grupie; negocjowanie i osiąganie porozumienia; podejmowanie decyzji grupowych, stosowanie procedur demokratycznych.

Nawiązywanie i podtrzymywanie kontaktów.

DZIAŁANIE

Organizowanie pracy własnej i innych; opanowanie technik i narzędzi pracy.

Projektowanie działań i przyjmowanie odpowiedzialności za ich przebieg i wyniki.

Racjonalne gospodarowanie czasem.

Także w listach zadań dla poszczególnych etapów kształcenia czy poszczególnych dziedzin edukacyjnych znalazły się zapisy nawiązujące do procesu rozwijania umiejętności kluczowych (przykładowe zebrano w tabeli 2. – str. 263-264), były one jednak na tyle ogólnie sformułowane, że co najwyżej przypominały dyrektorom szkół, nauczycielom i autorom podręczników szkolnych o potrzebie realizacji zadań ogólnych na zajęciach przedmiotowych, a nie faktycznie wspierały i ukierunkowywały działania służące ich rozwijaniu.

Podstawy programowe miały zacząć obowiązywać od 1 września 1999 roku, ale w roku 1998 nastąpiła zmiana rządu i – w efekcie – nigdy nie zaistniały one faktycznie w naszej szkole.

Lata 1998-1999 to okres realizacji kolejnej reformy polskiej edukacji, która, oprócz wprowadzenia gimnazjum i egzaminów zewnętrznych, zaowocowała także nową, obowiązującą właśnie od 1 września 1999 roku, podstawą programową kształcenia ogólnego.

W podstawie tej zadania ogólne – tym razem stawiane już, bardziej tradycyjnie, nauczycielom a nie szkołom – zostały rozszerzone:

Edukacja szkolna polega na harmonijnej realizacji przez nauczycieli zadań w zakresie nauczania, kształcenia umiejętności i wychowania. Zadania te two-

*rzą wzajemnie uzupełniające się i równoważne wymiary pracy każdego nauczyciela*¹²⁰.

W każdym z tych trzech obszarów: nauczanie, rozwijanie umiejętności, wychowanie sformułowano po osiem zadań (por. tabela 3. – str. 265).

W moim odczuciu zabieg ten, który uzasadniano potrzebą zrównoważenia nacisku kładzionego w procesie kształcenia na wiedzę¹²¹, umiejętności i postawy miał na celu przede wszystkim osłabienie znaczenia przykładanego do rozwijania umiejętności kluczowych, bez radykalnego zabiegu usunięcia ich z podstawy. Widać to m.in. w listach celów edukacyjnych stawianych kolejnym etapom kształcenia czy przedmiotom, czy też w nowym elemencie struktury podstawy: osiągnięciach, podsumowujących poszczególne przedmioty – zapisy wspierające rozwijanie umiejętności kluczowych pojawiają się w nich zupełnie sporadycznie, podobnie zresztą, jak zapisy dotyczące zadań ogólnych w zakresie nauczania i wychowania.

Zmiany programowe zostały „obudowane” szeregiem innych, wzmacniających je, rozwiązań. Uruchomiono np. procedurę dopuszczania do użytku szkolnego na terenie kraju programów nauczania i podręczników szkolnych na podstawie recenzji przygotowywanych przez rzeczoznawców Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wśród warunków, jakie program czy podręcznik powinny spełnić, aby mogły być wykorzystywane przez szkoły nie znalazły się żadne odniesienia do realizacji zadań ogólnych szkoły. Nie było na nie miejsca także w strukturze recenzji przedstawianych MEN przez rzeczoznawców.

W związku z wprowadzeniem egzaminów zewnętrznych opracowano zestawy standardów egzaminacyjnych definiujące zakres badanej wiedzy uczniów. Także wśród wymagań egzaminacyjnych nie znalazły się jakiegokolwiek nawiązania do umiejętności kluczowych.

Trzeba więc uznać, znając siłę i sposób oddziaływania egzaminów zewnętrznych na szkolną rzeczywistość, że **zadania ogólne szkoły nabrały charakteru pustej deklaracji**, a ich ewentualną faktyczną realizację pozostawiono dobrej woli hobbyistów: dyrektorów i nauczycieli oraz autorów programów nauczania i podręczników.

¹²⁰ Załącznik do Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 lutego 1999 r. (Dz.U. nr 14, poz. 129).

¹²¹ Wyraźnie, przy okazji, postawiono znak równości pomiędzy wiedzą a wiadomościami, zgodnie z dominującą od lat w naszym społeczeństwie i w naszej szkole tradycją encyklopedyzmu. Tradycja ta do dziś determinuje sposób czytania podstawy programowej – w powszechnej opinii „liczą się” w niej tylko listy treści.

Tabela 2. Wybrane zadania szkoły dla etapów kształcenia i dziedzin edukacyjnych – podstawy programowe obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących z 15.05.1997 r. (Dz.U. MEN Nr 5, poz. 23).

	Zadaniem szkoły na tym etapie jest ... w szczególności:	Zadaniem szkoły jest ¹²⁰ :
Etap I klasy 1-3 szkoły podstawowej	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Kształtowanie umiejętności obserwacji, ułatwienie rozumienia zjawisk zachodzących w dostępnym doświadczeniu dziecka otoczeniu przyrodniczym, społecznym, kulturowym i technicznym.</i> • <i>Rozbudzenie ciekawości poznawczej, zachęcanie do aktywności badawczej i wyrażania własnych myśli i przeżyć.</i> 	Edukacja weczesnoszkolna nie była dzielona na dziedziny edukacyjne.
Etap II klasy 4-6 szkoły podstawowej	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Rozwijanie ciekawości poznawczej i aktywności intelektualnej uczniów, pozytywne reagowanie na ich zainteresowania; zachęcanie do twórczości własnej.</i> • <i>Uczenie życia i aktywności w grupie rówieśników i społeczności szkolnej.</i> 	<p><i>Wdrażanie do pracy w zespole i porozumiewania się z innymi. (edukacja polonistyczna)</i></p> <p><i>Swierzanie uczniom warunków do indywidualnego i grupowego działania na rzecz innych dzieci i całej klasy. (edukacja obywatelska)</i></p> <p><i>Współdziałania i komunikowania się w grupie podczas obserwacji i interpretowania zjawisk przyrodniczych. (edukacja fizyczna i astronomiczna)</i></p> <p><i>Umożliwienie uczniom podejmowania i wykonywania działań we współpracy z innymi. (edukacja matematyczna)</i></p>
Etap III klasy 7-8 szkoły podstawowej	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Ułatwienie zrozumienia i poznawania samego siebie, znajdowanie swego miejsca w społeczeństwie, przyjmowanie odpowiedzialności za siebie.</i> • <i>Rozwijanie wrażliwości moralnej i otwartości na poglądy i potrzeby innych ludzi.</i> 	<p><i>Rozwijanie umiejętności logicznego myślenia, kształcenie aktywności i samodzielności intelektualnej. (edukacja polonistyczna)</i></p> <p><i>Umożliwienie uczniom rozwijania umiejętności poszukiwania, porządkowania, wykorzystywania i przechowywania różnych rodzajów informacji. (edukacja historyczna)</i></p> <p><i>Swierzanie warunków do współdziałania w grupie podczas podejmowania prostych problemów badawczych. (edukacja fizyczna i astronomiczna)</i></p>

¹²² Dla podanej w nawiasie dziedziny edukacyjnej.

Tabela 2. cd.

<p>Etap IV klasy 1-2 szkoły ponad- podstawowej</p>	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Sprzysianie rozwojowi samodzielności intelektualnej i krytycznego myślenia, refleksji wobec własnej hierarchii wartości.</i> • <i>Rozwijanie aktywności twórczej w różnorodnych dziedzinach sztuki, nauki, techniki i zajęciach czasu wolnego.</i> • <i>Stworzenie warunków do nabycia umiejętności tworzenia własnego warsztatu pracy umysłowej.</i> 	<p><i>Doskonalenie umiejętności logicznego myślenia i wnioskowania, formułowania własnych sądów; wdrażanie do samodzielności i aktywności intelektualnej. (edukacja polonistyczna)</i></p> <p><i>Umożliwienie uczniom kształtowania postawy tolerancji i krytycyzmu wobec poglądów i opinii innych ludzi. (edukacja fizyczna i astronomiczna)</i></p> <p><i>Umożliwienie uczniom stawiania hipotez i ich weryfikacji. (edukacja matematyczna)</i></p> <p><i>Umożliwienie uczniom planowania własnego uczenia się. (edukacja matematyczna)</i></p>
<p>Etap V klasy 3-4 szkoły ponad- podstawowej</p>	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Uczenie analizowania i oceniania zjawisk społecznych, krytycznego podejścia do różnych aspektów rzeczywistości.</i> • <i>Przygotowanie do korzystania (i sporządzenia własnego) nowoczesnego warsztatu pracy intelektualnej.</i> 	<p><i>Doskonalenie umiejętności myślenia abstrakcyjnego, zajmowania stanowiska, argumentowania i wnioskowania, obrony własnych przekonań i sądów. (edukacja polonistyczna)</i></p> <p><i>Umożliwienie uczniom opanowania umiejętności ustawicznego pogłębiania nabytej wiedzy. (edukacja chemiczna)</i></p> <p><i>Umożliwienie uczniom włączenia się w działanie na rzecz społeczności lokalnej w zakresie badań i ochrony środowiska. (edukacja fizyczna i astronomiczna)</i></p>

Tabela 3. Lista zadań ogólnych – podstawa programowa kształcenia ogólnego z 15.02.1999 r. (Dz.U. Nr 14, poz. 129).

<p>Szkola w zakresie nauczania, co stanowi jej zadanie specyficzne, zapewniła uczniom w szczególności:</p>	<p>Nauczyciele swarząc uczniom warunki do nabywania następujących umiejętności:</p>	<p>Nauczyciele w swojej pracy wychowawczej, wspierając w tym zakresie obowiązki rodziców, powinni zmierzać do tego, aby uczniowie w szczególności:</p>
<ol style="list-style-type: none"> 1. Naukę poprawnego i swobodnego wypowiedzania się, pisanie i czytania ze zrozumieniem; 2. Poznawanie wymaganych pojęć i zdobywanie rzetelnej wiedzy na poziomie umożliwiający co najmniej kontynuację nauki na następnym etapie kształcenia; 3. Dochodzenie do rozumienia, a nie tylko do pamięciowego opanowania przekazywanych treści; 4. Rozwijanie zdolności dostrzegania różnego rodzaju związków i zależności (przyczynowo-skutkowych, funkcjonalnych, czasowych i przestrzennych itp.); 5. Rozwijanie zdolności myślenia analitycznego i syntetycznego; 6. Traktowanie wiadomości przedmiotowych, stanowiących wartość poznawczą samą w sobie, w sposób integralny, prowadzący do lepszego rozumienia świata, ludzi i siebie; 7. Poznawanie zasad rozwoju osobowego i życia społecznego; 8. Poznawanie dziedzictwa kultury narodowej postrzeganej w perspektywie kultury europejskiej. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Planowania, organizowania i oceniania własnej nauki, przyjmowania za nią coraz większej odpowiedzialności; 2. Skutecznego porozumiewania się w różnych sytuacjach, prezentacji własnego punktu widzenia i uwzględniania poglądów innych ludzi, poprawnego posługiwania się językiem ojczystym, przygotowania do publicznych wystąpień; 3. Efektywnego współdziałania w zespole i pracy w grupie, budowania więzi międzyludzkich, podejmowania indywidualnych i grupowych decyzji, skutecznego działania na gruncie zachowania obowiązujących norm; 4. Rozwiązywania problemów w twórczy sposób; 5. Poszukiwania, porządkowania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł oraz efektywnego posługiwania się technologią informacyjną; 6. Odnoszenia do praktyki zdobytej wiedzy oraz twórczości potrzebnych doświadczeń i nawyków; 7. Rozwijania sprawności umysłowych oraz osobistych zainteresowań; 8. Przystawiania sobie metod i technik negocjacyjnego rozwiązywania konfliktów i problemów społecznych. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Znajdowali w szkole środowisko wszechstronnego rozwoju osobowego (w wymiarze intelektualnym, psychicznym, społecznym, zdrowotnym, estetycznym, moralnym, duchowym); 2. Rozwijali w sobie dociekliwość poznawczą, ukierunkowaną na poszukiwanie prawdy, dobra i piękna w świecie; 3. Mieli świadomość życiowej użyteczności zarówno poszczególnych przedmiotów szkolnych, jak i całej edukacji na danym etapie; 4. Stawiali się coraz bardziej samodzielni w dążeniu do dobra w jego wymiarze indywidualnym i społecznym, godząc umiętnie dążenie do dobra własnego z dobrem innych, odpowiedzialność za siebie z odpowiedzialnością za innych, wolność własną z wolnością innych; 5. Poszukiwali, odkrywali i dążyli na drodze rzetelnej pracy do osiągnięcia wielkich celów życiowych i wartości ważnych dla odnalezienia własnego miejsca w świecie; 6. Uczyli się szacunku dla dobra wspólnego jako podstawy życia społecznego oraz przygotowywali się do życia w rodzinie, w społeczności lokalnej i w państwie w duchu przekazu dziedzictwa kulturowego i kształtowania postaw patriotycznych; 7. Przygotowywali się do rozpoznawania wartości moralnych, dokonywania wyborów w hierarchizacji wartości oraz mieli możliwość doskonalenia się; 8. Kształtowali w sobie postawę dialogu, umiejętności słuchania innych i rozumienia ich poglądów; umieli współdziałać i współpracować w szkole wspólnie z nauczycielami i uczniami.

W ciągu ostatniego dziesięciolecia kilkakrotnie zmieniał się Minister Edukacji Narodowej, co na ogół pociągało za sobą także kolejne, często zresztą niewielkie, zmiany w podstawie programowej. Co ciekawe, zmiany dokonywane w latach 2001-2007 zupełnie nie dotknęły zapisów dotyczących zadań ogólnych szkoły – to kolejny objaw ich marginalizacji.

W okresie tym powstał projekt podstawy programowej, który wprawdzie nie zaistniał w sensie prawnym, ale wart jest odnotowania ze względu na autorskie, bardzo zwięzłe, zwłaszcza w porównaniu z podstawą z 1999 roku, spojrzenie na zadania (ogólne) szkoły (por. tabela 4.).

Tabela 4. Zadania szkoły – projekt podstaw programowych kształcenia ogólnego z 2005¹²³.

Naczelnym zadaniem szkoły jest przygotowanie młodych pokoleń do twórczego uczestnictwa w otwartym społeczeństwie demokratycznym. Szkoła oferuje każdemu uczniowi wykształcenie równoważące gotowość do nowatorstwa i przywiązanie do tradycji. Główne składniki takiego wykształcenia to:

- bogaty repertuar strategii wykonawczych, dzięki którym uczeń wykorzystuje zasoby wiadomości i umiejętności instrumentalnych (rozumienie słuchanych i czytanych tekstów w języku polskim i obcym, rozumowanie logiczne i matematyczne, biegłość komputerowa) do tworzenia własnych projektów rozwiązania problemów,
- umiejętności współpracy z innymi w celu poszukiwania i doskonalenia rozwiązań problemów, w tym umiejętność prowadzenia dyskusji i rzeczowy stosunek do krytyki,
- zakorzenie w śródziemnomorskiej tradycji aksjologicznej, w tym uznanie takich wartości, jak wolność, sprawiedliwość i patriotyzm.

Szkoła kształci uczniów, czyli integruje w jednym procesie nauczanie i wychowanie. Jest społecznością otwartą na opinie uczniów, ich rodziców i lokalnego środowiska; stosuje demokratyczne procedury rozstrzygania spornych rozstrzeżeń. Nauczyciele współpracują ze sobą w celu zapewnienia wszystkim uczniom godziwego wykształcenia. Własnym postępowaniem poświadczają głoszone wartości.

Zwięzłość tych zapisów, ich ogólność oraz brak ich czytelnej specyfikacji na kolejnych stronach tego dokumentu doskonale ukrywa przed oczyma czytelnika faktyczne intencje autorów.

Trzecia prawna „odsłona” umiejętności kluczowych nastąpiła w podstawie programowej kształcenia ogólnego z 23 grudnia 2008 roku, w której wyraźnie nawiązano do *Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 18 grudnia 2006 roku w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie*.

¹²³ Bartnik E., Konarzewski K., Kowalczykowska A., Marciniak Z., Merta T. 2005.

W tabeli 5. zestawione są umiejętności kluczowe dla szkoły podstawowej (I i II etapu edukacyjnego), gimnazjum i szkół ponadgimnazjalnych ogólnokształcących (III i IV etapu edukacyjnego) oraz zasadniczych szkół zawodowych.

Z pierwszej listy umiejętności kluczowych z roku 1997 zostały tylko dwie, choć także w zmienionej postaci: *uczenie się* oraz *współpraca*.

Podobnie, jak to już miało miejsce w przeszłości, aktualna podstawa programowa nie podpowiada, w jaki sposób zadbać o rozwój tych umiejętności w kolejnych etapach edukacji, jaka ich gradacja powinna następować. MEN wydało serię ośmiu książeczek¹²⁴ komentujących i wyjaśniających zapisy podstawy. W każdej z nich przytoczona jest część wstępna podstawy programowej z listą umiejętności kluczowych. I w żadnej z tych, które przeczytałem nie znalazłem ani zdania komentarza do tej listy, ani słowa wskazówki, jak pracować, aby rozwijać zawarte na niej umiejętności. Jest to tym istotniejsze, że po raz pierwszy podstawa programowa ma równocześnie pełnić funkcję standardów egzaminacyjnych, zatem wyznaczać rzeczy „ważne” także dla oceny pracy nauczycieli.

Wydaje się, że po prawie dwudziestu latach od wprowadzenia do naszych dokumentów programowych umiejętności kluczowych „hobbyści” wierzący, że jest to przejaw nowoczesnego, nakierowanego na faktyczne potrzeby uczniów nauczania są nadal pozostawieni sobie. A sam proces rozwijania umiejętności kluczowych w naszych szkołach chyba nigdy faktycznie się nie rozpoczął, czego wyraźne odbicie widać także w przytoczonych wcześniej sprawozdaniach z obserwacji.

¹²⁴ Por. http://www.men.gov.pl/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=230&Itemid=290

Tabela 5. Lista umiejętności kluczowych – podstawa programowa kształcenia ogólnego z 23.12.2008 r. (Dz.U. Nr 4, poz. 17).

<p>Do najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w trakcie kształcenia ogólnego w szkole podstawowej należą:</p> <p>1. czytanie – rozumiane zarówno jako prosta czynność, jako umiejętność rozumienia, wykorzystywania i przetwarzania tekstów w zakresie umożliwiających zdobywanie wiedzy, rozwój emocjonalny, intelektualny i moralny oraz uczestnictwo w życiu społeczeństwa;</p>	<p>Do najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w trakcie kształcenia ogólnego na III i IV etapie edukacyjnym należą:</p> <p>1. czytanie – umiejętność rozumienia, wykorzystywania i refleksyjnego przetwarzania tekstów; w tym tekstów kultury; prowadząca do osiągnięcia własnych celów; rozwoju osobowego oraz aktywnego uczestnictwa w życiu społeczeństwa;</p> <p>2. myślenie matematyczne – umiejętność wykorzystania narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz formułowania sądów opartych na rozumowaniu matematycznym;</p> <p>3. myślenie naukowe – umiejętność wykorzystania wiedzy o charakterze naukowym do identyfikowania i rozwiązywania problemów, a także formułowania wniosków opartych na obserwacjach empirycznych dotyczących przyrody i społeczeństwa;</p> <p>4. umiejętność komunikowania się w języku ojczystym i w językach obcych, zarówno w mowie, jak i w piśmie;</p> <p>5. umiejętność sprawnego posługiwania się nowoczesnymi technologiami informacyjno-komunikacyjnymi;</p> <p>6. umiejętność wyszukiwania, selekcjonowania i krytycznej analizy informacji;</p> <p>7. umiejętność rozpoznawania własnych potrzeb edukacyjnych oraz uczenia się;</p> <p>8. umiejętność pracy zespołowej.</p>	<p>Do najważniejszych umiejętności zdobywanych w trakcie kształcenia ogólnego w zasadniczej szkole zawodowej należą:</p> <p>1. czytanie – umiejętność zrozumienia, wykorzystania i refleksyjnego przetwarzania tekstów; w tym tekstów kultury, prowadząca do osiągnięcia własnych celów, rozwoju osobowego oraz aktywnego uczestnictwa w życiu społeczeństwa;</p> <p>2. myślenie matematyczne – umiejętność wykorzystania narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz formułowania sądów opartych na rozumowaniu matematycznym;</p> <p>3. myślenie naukowe – umiejętność wykorzystania wiedzy o charakterze naukowym do identyfikowania i rozwiązywania problemów, a także formułowania wniosków opartych na obserwacjach empirycznych dotyczących przyrody lub społeczeństwa;</p> <p>4. umiejętność komunikowania się w języku ojczystym i w językach obcych;</p> <p>5. umiejętność sprawnego posługiwania się nowoczesnymi technologiami informacyjnymi i komunikacyjnymi;</p> <p>6. umiejętność wyszukiwania, selekcjonowania i krytycznej analizy informacji;</p> <p>7. umiejętność rozpoznawania własnych potrzeb edukacyjnych oraz uczenia się;</p> <p>8. umiejętność pracy zespołowej.</p>
--	--	---

III.2 CELE I TREŚCI EDUKACJI MATEMATYCZNEJ W PODSTAWACH PROGRAMOWYCH

Prace nad koncepcją podstaw programowych rozpoczęły się w Polsce mniej więcej 20 lat temu¹²⁵. W sierpniu 1992 roku zostało opublikowane pierwsze minimum programowe dla przedmiotów ogólnokształcących¹²⁶, które miało stworzyć prawne podstawy do uporządkowania obszaru programów nauczania. Minimum to w klasach 1-3 odnosiło się do przedmiotów i powstało na bazie obowiązujących wcześniej programów nauczania – dzięki temu może ono dawać wyobrażenia o tym, czego oczekiwano od ucznia kończącego klasę trzecią szkoły podstawowej na przełomie lat osiemdziesiątych oraz dziewięćdziesiątych minionego wieku.

W tym samym czasie działało powołane przez MEN Biuro ds. Reformy Szkolnej, w którym przygotowywano pierwszą wersję podstaw programowych¹²⁷. Także i w tym dokumencie, który nie wyszedł poza etap projektu proces kształcenia w klasach 1-3 był podzielony na przedmioty i, dodatkowo, na klasy. Przytaczając z tego projektu treści, będę podawał także, do jakiej klasy zostały one przypisane.

Jak już wspominałem, pierwszy zestaw *podstaw programowych przedmiotów ogólnokształcących* został oficjalnie podpisany w maju 1997 roku¹²⁸. Dopiero w tym dokumencie w klasach 1-3 nie dokonano podziału treści i umiejętności (kompetencji) ani na klasy, ani na przedmioty czy edukacje. Od tego momentu rozwiązanie to powtarzało się w kolejnych obowiązujących podstawach programowych.

W roku 1998 podczas przygotowywania kolejnej strukturalnej i programowej reformy szkoły MEN opublikował opis poszczególnych obszarów planowanej reformy¹²⁹, w którym zawarty był także projekt *podstawy programowej kształcenia ogólnego*. Projekt ten wykorzystywał pewne rozwiązania przyjęte w podstawach sprzed roku. Rok później – w lutym 1999 roku została opublikowana podstawa programowa¹³⁰ zdecydowanie różniąca się od wcześniej upowszechnionego projektu.

¹²⁵ Por. Sławiński S. 1994, 1996.

¹²⁶ MEN 1992.

¹²⁷ MEN 1993.

¹²⁸ MEN 1997.

¹²⁹ MEN 1998.

¹³⁰ MEN 1999.

Przez następne kilka lat zmiany w podstawie programowej¹³¹ omijały rozwijanie umiejętności matematycznych dzieci na I etapie kształcenia – z dokładnością do jednego słowa: *rachowanie* zostało zastąpione przez *liczenie* (por. dalej).

Spore „trzęsienie ziemi” zdarzyło się natomiast w sierpniu 2007 roku¹³², gdy ten fragment podstawy programowej (i tylko ten!) został radykalnie zmieniony. Miał to być zabieg związany z obniżeniem do 6 lat wieku rozpoczęcia nauki w szkole – tyle, że decyzja o tym obniżeniu wówczas nie zapadła. Jak zresztą doskonale wiemy, także dziś, czyli 6 lat później, wciąż nie weszła ona w życie.

Kolejna istotna zmiana zawartości podstawy programowej nastąpiła w grudniu 2008 roku¹³³ – ta wersja podstawy, która obowiązuje do dziś także podporządkowana jest kwestii obniżenia wieku rozpoczęcia „obowiązku szkolnego”. Jednym z efektów wprowadzonych zmian było wyodrębnienie osobnych edukacji, w tym – oczywiście – także edukacji matematycznej, oraz określenie oczekiwanych umiejętności dzieci nie tylko po klasie trzeciej, ale także po pierwszej.

Porównując zapisy dotyczące celów rozwijania umiejętności matematycznych w klasach 1-3 oraz treści, które mają umożliwić realizację tych celów będą odwoływać się na ogół do przywołanych powyżej dokumentów.

Cele edukacji matematycznej w podstawach programowych

Jak wspomniałem, w dwóch początkowych dokumentach proponowano w klasach 1-3 nauczanie przedmiotowe, czego efektem była m.in. rozbudowana lista celów ogólnych i szczegółowych dotyczących matematyki, zwłaszcza w pierwszym z nich (por. tabela 6.).

Wśród celów ogólnych mamy w nim np. *rozwijanie zdolności poznawczych, wdrażanie do współdziałania w zespole czy wyrabianie krytycznego stosunku do wykonywanej pracy*.

Wśród celów szczegółowych mowa jest m.in. o *kształtowaniu rozumienia pojęcia liczby naturalnej* oraz *rozumienie czterech działań arytmetycznych* czy o *na-bywaniu różnorodnych doświadczeń* związanych np. z pojęciami geometrycznymi. Pojawia się też *posługiwanie się metodami matematycznymi w życiu* oraz *matematyzacja konkretnych sytuacji*, *rozwijanie wyobraźni przestrzennej* oraz *aktywności twórczej*, a także *czytanie i rozumienie tekstów matematycznych*. Jak

¹³¹ Por. MEN 2001, 2003.

¹³² MEN 2007.

¹³³ MEN 2008.

widać, na tej liście jest sporo celów, pod którymi dziś można się bez namysłu „oburzyć” podpisać.

Sprawność obliczeniowa została potraktowana, chyba, dość „lekką”: *opanowanie elementarnych podstaw techniki obliczeniowej*.

Lista celów w projekcie podstawy z 1992 roku jest skromniejsza, a trzy cele szczegółowe powtarzają lub przypominają niektóre cele przytoczone z minimum: *kształtowanie rozumienia liczby naturalnej oraz czterech działań arytmetycznych* oraz *kształcenie umiejętności czytania ze zrozumieniem* – choć to ostatnie ograniczone, z bliżej nieznanych poznawczych powodów, do elementów podręcznika z matematyki.

Kolejne podstawy i ich projekty dotyczą już kształcenia zintegrowanego, co owocuje listami ogólnych celów, wśród których rzadko w jawny sposób pojawiają się odniesienia do rozwijania umiejętności matematycznych dzieci.

I tak, w podstawie z roku 1997 mamy m.in.: *umacnianie wiary we własne siły, rozwijanie samodzielności, rozbudzanie ciekawości poznawczej* i, być może najbardziej konkretne, *zachęcanie do aktywności badawczej*. Każde z tych haseł powinno przekładać się, oczywiście, na styl rozwijania umiejętności matematycznych dzieci, ale ilu autorów materiałów edukacyjnych oraz nauczycieli mogło mieć tę świadomość?

W projekcie z roku 1998 ponownie mamy wśród celów edukacji np. *umacnianie wiary we własne siły* i *dążenie do osiągnięcia celów*, a wśród zadań szkoły *uwzględnianie indywidualnych potrzeb dziecka* oraz *inspirowanie aktywności badawczej*. Pojawia się jednak dodatkowo coś znacznie bardziej konkretnego: *wykonywanie elementarnych działań arytmetycznych*. Dość przewrotnie i chyba nieoczekiwanie, **w kształceniu zintegrowanym jedynym jawnie podanym celem edukacji matematycznej zaczyna się stawać sprawność rachunkowa.**

Tabela 6. Wybrane cele ogólne i szczegółowe w minimach i podstawach programowych w latach 1992-2008.

Dokument prawny	Cele ogólne/zadania i cele szczegółowe
<p>Minimum programowe z dnia 18.08.1992</p>	<p><i>Cele ogólne:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – przyczynianie się do wszechstronnego rozwoju osobowości uczniów (rozwijanie ogólnych zdolności poznawczych i samodzielnego, logicznego myślenia), – wstępne ukształtowanie rozumienia określonych programem podstawowych pojęć matematycznych wraz z opanowaniem odpowiednich umiejętności, – wdrażanie uczniów do rzetelnej i sumiennej pracy własnej i współdziałania w zespole, – wyrabianie pożądaných postaw i cech (umiejętność koncentracji, wytrwałość w przezwyciężaniu trudności, staranność, krytyczny stosunek do wykonywanej pracy). <p><i>Cele szczegółowe:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – kształtowanie rozumienia pojęcia liczby naturalnej (jako liczby elementów zbioru, jako liczby porządkowej i jako liczby związanej z mierzaniem wielkości ciągłych) oraz rozumienia czterech działań arytmetycznych wraz z opanowaniem elementarnych podstaw techniki rachunkowej; – intuicyjne kształtowanie pojęcia zbioru, pojęcia ułamka i niektórych pojęć geometrycznych, połączone z nabywaniem różnorodnych doświadczeń; – rozwijanie umiejętności posługiwania się metodami matematycznymi w życiu, umiejętności schematyzacji i wstępnej matematyzacji konkretnych sytuacji oraz umiejętności ich opisywania za pomocą słów, schematów obrazkowych i symboli matematycznych, rozwijanie wyobraźni przestrzennej, aktywności twórczej i matematycznych zainteresowań uczniów; – przygotowanie do zdobywania umiejętności czytania i rozumienia tekstów matematycznych.
<p>Projekt podstawy programowej wersją z dnia 19.11.1992</p>	<p>I. 1. Rozwijanie i kształtowanie poznawczych możliwości uczniów, w szczególności wspomaganie przejścia na etap operacyjnego myślenia na poziomie konkretnym.</p> <p>2. Kształtowanie dojrzałości emocjonalnej uczniów do podejmowania trudności natury intelektualnej i radzenie sobie z nimi.</p> <p>II. 1. Kształtowanie rozumienia liczby naturalnej.</p> <p>2. Kształtowanie rozumienia czterech działań arytmetycznych.</p> <p>3. Kształcenie umiejętności czytania ze zrozumieniem zadań, informacji i poleceń z podręcznika do matematyki.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 15.05.1997</p>	<p><i>Wybrane zadania szkoły:</i></p> <p>Uwzględnienie indywidualnych potrzeb dziecka, troska o zapewnienie równych szans, umacnianie wiary we własne siły i możliwości osiągnięcia sukcesu.</p> <p>Stworzenie warunków do rozwijania samodzielności, dążenia do osiągnięcia celów, podejmowania odpowiedzialności za siebie i najbliższe otoczenie.</p> <p>Kształtowanie umiejętności obserwacji, ułatwienie rozumienia zjawisk zachodzących w dostępnym doświadczeniu dziecka otoczeniu przyrodniczym, społecznym, kulturowym i technicznym.</p> <p>Rozbudzenie ciekawości poznawczej, zachęcanie do aktywności badawczej i wyrażania własnych myśli i przeżyć.</p>

<p>Projekt podstawy programowej 1998</p>	<p><i>Wybrane cele szkolnej edukacji:</i> Prowadzenie dziecka do nabywania i rozwijania umiejętności czytania i pisania, wykonywania elementarnych działań arytmetycznych, posługiwania się prostymi narzędziami i kształtowania nawyków społecznego współżycia. Umocnianie wiary we własne siły i możliwość osiągania sukcesów oraz dążenia do osiągnięcia celów. Rozwijanie umiejętności poznawania siebie oraz otoczenia rodzinnego, społecznego, kulturowego, technicznego i przyrodniczego dostępnego doświadczeniu dziecka. <i>Wybrane zadania szkoły:</i> Uwzględnianie indywidualnych potrzeb dziecka; troska o zapewnienie równych szans. Stwarzanie warunków do rozwijania samodzielności, obowiązkowości, podejmowania odpowiedzialności za siebie i najbliższe otoczenie. Inspirowanie aktywności badawczej oraz wyrażanie własnych myśli i przeżyć.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 15.02.1999</p>	<p><i>Wybrane cele edukacyjne:</i> Wspomaganie wszechstronnego i harmonijnego rozwoju ucznia, w tym szczególnie: Umiejętności służących zdobywaniu wiedzy (czytania, pisania i rachowania). Umiejętności działania w różnych sytuacjach szkolnych i pozaszkolnych. <i>Wybrane zadania szkoły:</i> Rozpoznanie poziomu sprawności warunkującego opanowanie przez uczniów podstawowych umiejętności: czytania, pisania i rachowania; odpowiednio do tego prowadzenie ćwiczeń usprawniających.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 21.05.2001 oraz z dnia 06.11.2003</p>	<p><i>Wybrane cele edukacyjne:</i> Wspomaganie wszechstronnego i harmonijnego rozwoju ucznia, w tym szczególnie: umiejętności służących zdobywaniu wiedzy (czytania, pisania i liczenia), umiejętności działania w różnych sytuacjach szkolnych i pozaszkolnych. <i>Wybrane zadania szkoły:</i> Rozpoznanie poziomu sprawności warunkującego opanowanie przez uczniów podstawowych umiejętności: czytania, pisania i liczenia; odpowiednio do tego prowadzenie ćwiczeń usprawniających.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 23.08.2007</p>	<p><i>Wybrane cele edukacyjne:</i> Wspomaganie wszechstronnego i harmonijnego rozwoju ucznia, w tym szczególnie: umiejętności służących zdobywaniu wiedzy (czytania, pisania i liczenia), umiejętności działania w różnych sytuacjach szkolnych i pozaszkolnych. <i>Wybrane zadania szkoły:</i> Rozpoznanie poziomu sprawności warunkującego opanowanie przez uczniów podstawowych umiejętności: czytania, pisania i liczenia; odpowiednio do tego prowadzenie ćwiczeń usprawniających.</p>

<p>Podstawa programowa z dnia 24.12.2008</p>	<p><i>Zadaniem szkoły jest:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1) realizowanie programu nauczania skoncentrowanego na dziecku, na jego indywidualnym tempie rozwoju i możliwościach uczenia się; 2) respektowanie trójpodmiotowości oddziaływań wychowawczych i kształcących: uczeń-szkoła-dom rodzinny; 3) rozwijanie predyspozycji i zdolności poznawczych dziecka; 4) kształtowanie u dziecka pozytywnego stosunku do nauki oraz rozwijanie ciekawości w poznawaniu otaczającego świata i w dążeniu do prawdy; 5) poszanowanie godności dziecka; zapewnienie dziecku przyjaznych, bezpiecznych i zdrowych warunków do nauki i zabawy, działania indywidualnego i zespołowego, rozwijania samodzielności oraz odpowiedzialności za siebie i najbliższe otoczenie, ekspresji plastycznej, muzycznej i ruchowej, aktywności badawczej, a także działalności twórczej; 6) wyposażenie dziecka w umiejętność czytania i pisanie, w wiadomości i sprawności matematyczne potrzebne w sytuacjach życiowych i szkolnych oraz przy rozwiązywaniu problemów; 7) dbałość o to, aby dziecko mogło nabywać wiedzę i umiejętności potrzebne do rozumienia świata, w tym zagwarantowanie mu dostępu do różnych źródeł informacji i możliwości korzystania z nich; 8) sprzyjanie rozwojowi cech osobowości dziecka koniecznych do aktywnego i etycznego uczestnictwa w życiu społecznym.
---	---

Sprawność rachunkowa jest „przewodnym motywem” podstawy programowej dla I etapu kształcenia przez kilka kolejnych lat. W podstawie z 1999 roku jest nawet nieco „sprymityzowana”: w celach edukacyjnych pojawia się bowiem *rachowanie* – i to jako *umiejętność służąca zdobywaniu wiedzy*.

Wspomniałem już o tym, że dwie kolejne nowelizacje podstawy programowej: z 2001 oraz 2003 roku w obszarze edukacji matematycznej ograniczyły się do zmiany tylko jednego słowa – *rachowanie* zostało zastąpione przez elegantsze *liczenie*. Zatem to *liczenie* stało się *umiejętnością służącą zdobywaniu wiedzy*, co kontynuuje też podstawa z 2007 roku.

Nie rozwiązywanie problemów, nie dostrzeżenie prawidłowości, nie uzasadnianie, nie badanie konsekwencji a liczenie.

Dopiero aktualna podstawa, tj. wersja z 2008 roku, zmienia tę stylistykę i wśród zadań szkoły wymienia m.in. znane nam już: *rozwijanie predyspozycji i zdolności poznawczych dziecka, kształtowanie u dziecka pozytywnego stosunku do nauki, rozwijanie samodzielności i aktywności badawczej oraz działalności twórczej*, ale także – i to jest coś nowego, zwłaszcza w stosunku do *rachowania* czy *liczenia* – *wyposażenie dziecka w wiadomości i sprawności matematyczne potrzebne w sytuacjach życiowych i szkolnych oraz przy rozwiązywaniu problemów*.

Wydaje mi się, że „stylistyka” zintegrowanej podstawy programowej dla I etapu edukacji sprawiła, że założone cele rozwijania u dzieci umiejętności matematycznych stopniowo zniknęły sprzed oczu autorów programów nauczania i podręczników oraz nauczycieli. Jak pokazują m.in. rozmowy z dyrektorami szkół podstawowych, nauczycielami czy rodzicami uczniów¹³⁴ efekt tego okazał się bardzo daleko idący – **powszechnie zaczęto utożsamiać podstawę programową jedynie z listą zawartych w niej treści**. Cała reszta: lista umiejętności kluczowych, cele i zadania szkoły stały się pomijanym, zupełnie nieważnym, dodatkiem.

Zobaczmy zatem, jak przez te lata zmieniały się treści z zakresu edukacji matematycznej.

Treści edukacji matematycznej w podstawach programowych

Analizę matematycznych treści podstaw programowych na przestrzeni 20 lat zaczęną od liczb oraz systemu dziesiętnego (por. tabela 7.) – także z tego powodu, że rozumienie(!) struktury systemu dziesiętnego jest niezbędne do świadomego i skutecznego operowania liczbami, także podczas obliczeń.

O strukturze systemu dziesiętnego możemy mówić na dwóch poziomach: „makro” i „mikro”. Zacznijmy od tego pierwszego. Dlaczego w minimum z 1992 roku rozszerzano na I etapie kształcenia zakres liczbowy do 1.000.000? Jeden z powodów najprawdopodobniej był taki: bo dopiero w tym zakresie widać regularności dotyczące zapisywania dużych liczb: kolejne trójki rzędów są budowane zgodnie z tą samą językową i matematyczną zasadą: *jedności, dziesiątki* oraz *setki* ilustrują i przygotowują zrozumienie trzech następnych rzędów: *tysiący, dziesiątek tysięcy* oraz *setek tysięcy*. Próbę nawiązania do struktury systemu dziesiętnego w skali „mikro” mamy chyba np. w aktualnej podstawie w klasie I: *dostrzega regularności dziesiątkowego systemu liczenia*. I tu jest kłopot, bo w zakresie 20, a takie tu mamy narzucone ograniczenie, dziecko nie może dostrzec tych regularności z prostej i obiektywnej przyczyny – w tym zakresie liczbowym ich nie ma. Struktura systemu dziesiętnego ujawnia się dopiero po przekroczeniu 20:

- dwadzieścia jeden, trzydzieści jeden, czterdzieści jeden ...
 - trzydzieści cztery, trzydzieści pięć, trzydzieści sześć ...
- czytelny, regularny rytm językowy, który łatwo wpada w ucho i prosto przekłada się na zapis symboliczny. A co dzieje się na poziomie kilkunastu?

¹³⁴Na podstawie setek maili i rozmów telefonicznych towarzyszących badaniom OBUT.

Mamy „wyjątek od reguły” – trzynaście, czternaście Skąd to naście i co ono znaczy? Warto też zwrócić uwagę na sposób, w jaki zapisujemy te liczby: mówimy *trzy*, po czym *naście*, a piszemy najpierw 1 (bo naście), potem 3. Sprzeczność pomiędzy tym, co mówimy i tym, co piszemy. I ani śladu powtarzalnej regularności, pozwalającej na samodzielne uświadomienie sobie, jak to będzie dalej. To najtrudniejsze, z punktu widzenia dziecka, liczebniki!

Jeśli mowa o regularnościach, to zarówno w tabeli 7., jak i w kolejnych tabelach widać pewną prawidłowość – początkowe wiersze są zazwyczaj obszerne, środkowe robią się bardzo zwięzłe, a końcowe znowu zawierają sporo tekstu. Tych podobieństw pomiędzy dokumentami z roku 1992 i 2008 jest więcej, np. powrót do operowania edukacjami czy klasami.

Warto zwrócić uwagę, jak zmienia się zakres liczb, „dostępnych” uczniom w klasach 1-3: od 1.000.000 w roku 1992, poprzez 10.000 w latach 1999-2007, do 1.000 aktualnie. I jeszcze jedna warta odnotowania rzecz – projekt podstawy z 1992 roku, czyli sprzed 20 lat!, proponuje rozszerzenie zakresu liczbowego w klasie I do 100. Dziś mało który nauczyciel odważa się przekroczyć 20, choć wie, że jego uczniowie operują liczbami w znacznie większym zakresie.

Tabela 7. Treści kształcenia dotyczące liczb naturalnych i systemu dziesiętnego w minimach i podstawach programowych w latach 1992-2008.

Liczby naturalne i system dziesiętny	
Dokument prawny	Treści kształcenia /umiejętności i kompetencje
<p>Minimum programowe z dnia 18.08.1992</p>	<p><i>Dodawanie i odejmowanie w zakresie 100:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – liczenie dziesiątkami (np. od 20 do 70) oraz kolejno (np. od 65 do 75), – zapis liczby dwucyfrowej, wyodrębnienie cyfry dziesiątek i cyfry jedności, – porównywanie liczb dwucyfrowych, <p><i>Rozszerzanie numeracji do 1000:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – wyodrębnianie setek, dziesiątek i jedności, – przedstawianie liczb w postaci: $425 + 400 + 20 + 5 = 4 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1$, – wymawianie i pisanie liczebników, – porównywanie liczb trzycyfrowych, – powtórzenie numeracji w zakresie 1000 ze zwróceniem uwagi na dziesiątkowy system liczenia. <p><i>Rozszerzenie zakresu liczbowego do miliona:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – dziesiątkowy system pozycyjny, – porównywanie liczb wielocyfrowych, – zapisywanie i odczytywanie liczb w zakresie do 1 000 000.

Projekt podstawy programowej wersja z dnia 19.11.1992	<i>Rozszerzenie numeracji do 100</i> (klasa I). Głośne liczenie dziesiątkami (0, 10, 20 itd. do 100) oraz kolejno (np. od 37 do 43). Zapisywanie i odczytywanie liczb dwucyfrowych; rozróżnianie roli cyfry dziesiątek i cyfry jedności. Porównywanie liczb. ... Mierzenie taśmą stucentymetrową. <i>Rozszerzenie numeracji do 1000</i> (klasa III). Wyodrębniania setek, dziesiątek i jedności; zapisywanie liczb. Porównywanie liczb.
Podstawa programowa z dnia 15.05.1997	Treści: Liczby naturalne, działania arytmetyczne, zapis dziesiątkowy, kolejność wykonywania działań. Umiejętności i kompetencje: Posługiwanie się liczbami i działaniami arytmetycznymi w praktyce.
Projekt podstawy programowej 1998	Posługiwanie się liczbami i działaniami arytmetycznymi w praktyce.
Podstawa programowa z dnia 15.02.1999	liczenie (przeliczanie przedmiotów, niezależność liczby przedmiotów od sposobów ich przeliczania, porównywanie liczebności zbiorów), liczby i ich zapis, stopniowe rozszerzanie zakresu liczbowego do 10.000, zapis dziesiątkowy.
Podstawa programowa z dnia 23.08.2007	liczenie (przeliczanie przedmiotów, niezależność liczby przedmiotów od sposobów ich przeliczania, porównywanie liczebności zbiorów), zapisywanie liczb w zakresie 1.000, stopniowe rozszerzanie zakresu do 10.000,
Podstawa programowa z dnia 24.12.2008	Uczeń kończący klasę I: <i>w zakresie liczenia i sprawności rachunkowych:</i> sprawnie liczy obiekty (dostrzega regularności dziesiątkowego systemu liczenia), wymienia kolejne liczebniki od wybranej liczby, także wspak (zakres do 20); zapisuje liczby cyframi (zakres do 10). Uczeń kończący klasę III: liczy (w przód i w tył) od danej liczby po 1, dziesiątkami od danej liczby w zakresie 100 i setkami od danej liczby w zakresie 1.000; zapisuje cyframi i odczytuje liczby w zakresie 1.000; porównuje dowolne dwie liczby w zakresie 1.000 (słownie i z użyciem znaków <, >, =).

Pora na „rachunki” (por. tabela 8.), które, jak już wspominałem, awansowały do roli zasadniczej czy nawet jedynej matematycznej umiejętności *służącej zdobywaniu wiedzy*. Zdecydowanie wolę o nich myśleć w duchu *technik rachunkowych*.

Tabela 8. Treści kształcenia dotyczące wykonywania obliczeń w minimach i podstawach programowych w latach 1992-2008.

Obliczenia na liczbach naturalnych	
Dokument prawny	Treści kształcenia /umiejętności i kompetencje
Minimum programowe z dnia 18.08.1992	<p><i>Dodawanie i odejmowanie w zakresie 100:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – dodawanie i odejmowanie typu $20 + 60$, $80 - 20$, różnymi sposobami, bez przekraczania i z przekraczaniem progu dziesiątkowego, – powtórzenie numeracji w zakresie 100, dodawania i odejmowania (różnymi sposobami), – powtórzenie i pogłębienie rozumienia własności dodawania i odejmowania, – porównywanie sum i różnic typu: $18 + 46$ $20 + 46$, $35 - 15$ $35 - 12$. <p><i>Rozszerzenie numeracji do 1000:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – dodawanie i odejmowanie w zakresie 1000 różnymi sposobami, – algorytm dodawania i odejmowania pisemnego. <p><i>Mnożenie i dzielenie w zakresie 100:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – praktyczne poznawanie i stosowanie rozdzielności mnożenia i dzielenia względem dodawania i odejmowania oraz łączności mnożenia, – mnożenie liczb jednocyfrowych (tabliczka mnożenia) i odpowiednie przypadki dzielenia, – użycie nawiasów przy dwóch działaniach, kolejność wykonywania działań, – dzielenie liczby przez 1, dzielenie liczby przez nią samą, badanie podzielności liczby przez 2, 5 i 10, – porównywanie ilorazowe (tyle razy więcej, tyle razy mniej, ile razy więcej, ile razy mniej), – dzielenie z resztą, sprawdzanie dzielenia z resztą. <p><i>Mnożenie i dzielenie (bez reszty i z resztą) w zakresie 1000:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – powtórzenie i pogłębienie rozumienia własności mnożenia, – mnożenie przez dziesiątki i setki, – praktyczne zastosowanie rozdzielności mnożenia względem dodawania do obliczenia iloczynów typu $3 \cdot 247$, $20 \cdot 24$, – algorytm mnożenia sposobem pisemnym przez liczby jednocyfrowe, – zastosowanie rozdzielności dzielenia względem dodawania do dzielenia przez liczbę jednocyfrową (np. $412 : 4 = 400 : 4 + 12 : 4$), – dzielenie typu: $600 : 2$, $600 : 20$, $600 : 200$, – algorytm dzielenia sposobem pisemnym przez liczbę jednocyfrową (bez reszty lub z resztą).
Projekt podstawy programowej wersja z dnia 19.11.1992	<p><i>Monografia drugiej dziesiątki</i> (klasa I) Wyodrębnianie dziesiątki przy przeliczaniu przedmiotów i mierzeniu. Zapisywanie liczb 11-20 cyframi i ich odczytywanie. Porównywanie liczb. Dodawanie i odejmowanie w zakresie 20 (również z przekraczaniem progu dziesiątkowego).</p> <p><i>Rozszerzenie numeracji do 100</i> (klasa I). ... Zapisywanie i odczytywanie liczb dwucyfrowych; rozróżnianie roli cyfry dziesiątek i cyfry jedności. ... Łatwe obliczenia typu $40 + 3 = 43$, $43 - 3 = 40$, $43 - 40 = 3$; $3 \times 10 = 30$.</p> <p><i>Dodawanie i odejmowanie w zakresie 100</i> (klasa III). Obserwowanie i wykorzystywanie zmian sumy i różnicy w zależności od zwiększania lub zmniejszania danych liczb.</p>

	<p><i>Mnożenie i dzielenie w zakresie 100</i> (klasa III). Pogłębianie rozumienia sensu i własności mnożenia i dzielenia oraz ich wzajemnych związków; związki z dodawaniem i odejmowaniem. Użycie nawiasów przy dwóch działaniach, kolejność wykonywania działań. Tabliczka mnożenia (liczb jednocyfrowych). Porównywanie ilorazowe. Dzielenie z resztą; sprawdzanie tego dzielenia za pomocą mnożenia i dodawania.</p> <p><i>Rozszerzenie numeracji do 1000</i> (klasa III). Obliczanie sum i różnic różnymi sposobami. Algorytmy: dodawania pisemnego i odejmowania pisemnego.</p> <p><i>Mnożenie i dzielenie w zakresie 1000</i> (klasa III). Mnożenie przez pełne dziesiątki i setki. Obliczenia iloczynów typu 4×357 i 40×57 przez rozdzielanie drugiego czynnika. Algorytm mnożenia pisemnego przez liczby jednocyfrowe. Obliczanie ilorazów typu $600 : 2$, $600 : 20$ i $600 : 200$. Algorytm dzielenia pisemnego przez liczby jednocyfrowe.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 15.05.1997</p>	<p>Treści: Liczby naturalne, działania arytmetyczne, zapis dziesiętkowy, kolejność wykonywania działań.</p> <p>Umiejętności i kompetencje: Posługiwanie się liczbami i działaniami arytmetycznymi w praktyce. Stosowanie odpowiednich algorytmów pisemnych (mnożenie i dzielenie przez liczbę jednocyfrową do 1000), dokonywanie prostych obliczeń w pamięci.</p>
<p>Projekt podstawy programowej 1998</p>	<p>Posługiwanie się liczbami i działaniami arytmetycznymi w praktyce. Stosowanie odpowiednich algorytmów pisemnych (mnożenie i dzielenie przez liczbę jednocyfrową do 1000), dokonywanie prostych obliczeń w pamięci.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 15.02.1999</p>	<p>działania arytmetyczne (dodawanie, odejmowanie, algorytmy dodawania i odejmowania pisemnego, mnożenie, algorytm mnożenia pisemnego przez liczby jednocyfrowe, dzielenie), kolejność wykonywania działań</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 23.08.2007</p>	<p>działania na liczbach:</p> <p>a) dodawanie i odejmowanie pamięciowe w zakresie 100, mnożenie i dzielenie liczb w zakresie tabliczki mnożenia,</p> <p>b) sprawdzanie wyniku odejmowania za pomocą dodawania i wyniku dzielenia za pomocą mnożenia,</p> <p>rozwiązywanie łatwych równań jednodziałaniowych z niewiadomą w postaci okienka (bez przenoszenia na drugą stronę),</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 24.12.2008</p>	<p>Uczeń kończący klasę I: <i>w zakresie liczenia i sprawności rachunkowych:</i> wyznacza sumy (dodaje) i różnice (odejmuje), manipulując obiektami lub rachując na zbiorach zastępczych, np. na palcach; sprawnie dodaje i odejmuje w zakresie do 10, poprawnie zapisuje te działania,</p> <p>Uczeń kończący klasę III: dodaje i odejmuje liczby w zakresie 100 (bez algorytmów działań pisemnych); sprawdza wyniki odejmowania za pomocą dodawania; podaje z pamięci iloczyny w zakresie tabliczki mnożenia; sprawdza wyniki dzielenia za pomocą mnożenia; rozwiązuje łatwe równania jednodziałaniowe z niewiadomą w postaci okienka (bez przenoszenia na drugą stronę).</p>

Także i tu widać przez te lata sporą ewolucję i to w kilku obszarach. Zmniejsza się zakres wykonywanych obliczeń, co jest m.in. konsekwencją ograniczonego zakresu liczb wykorzystywanych w procesie kształcenia. Stopniowo z dokumentów znikają algorytmy obliczeń pisemnych – w 1999 roku algorytm dzielenia przez liczby jednocyfrowe, a w 2007 pozostałe. Dodatkowo od 2007 roku w podstawie nie ma także kolejności wykonywania działań. Zarówno algorytmy, jak i kolejność zostały przeniesione w podstawie programowej na II etap edukacji. Podobnie stało się z dzieleniem z resztą, co może, niestety, utrudniać uczniom faktyczne zrozumienie, na czym polega to działanie.

Wykorzystam ten przypadek, żeby zilustrować inne jeszcze zjawisko związane z ostatnimi podstawami. Dzielenie z resztą w jawny sposób jest wymienione jedynie w obu przytoczonych dokumentach z 1992 roku, wspomina się tam również o potrzebie jego sprawdzania. W podstawie z 1997 roku oraz kolejnych dzielenia z resztą już nie ma, jednak w procesie kształcenia było wciąż obecne, choćby dlatego, że często w naturalny sposób występuje w realistycznych sytuacjach dotyczących dzielenia.

Podstawa z 2007 roku jest pierwszym dokumentem tego typu, który zaczyna operować zakazami – w kilku miejscach jest w niej wyraźnie podane, czego nie wolno robić. Język zakazów wzmacnia jeszcze aktualna podstawa, przy okazji promowania której m.in. powtarzano zasadę, że nie wolno na niższych poziomach edukacji poruszać zagadnień wymienionych w podstawie na poziomie wyższym. Co oznacza, że umieszczenie dzielenia z resztą w podstawie dla II etapu edukacji **eliminuje je** z pierwszych lat nauki matematyki.

Warto również zwrócić uwagę na to, w jaki sposób, z pomocą jakich zwrotów mówi się w tych dokumentach o rozwijaniu sprawności rachunkowej.

Zarówno w minimum, jak i w projekcie podstawy z 1992 roku zwraca się uwagę na to, że dzieci powinny rozumieć poznawane działania i ich własności, np. powinny znać związki mnożenia i dzielenia z dodawaniem i odejmowaniem – warto w tym momencie przypomnieć sobie dzielenie $88 : 22$ z badania OBUT 2011 (por. rozdział I). Co więcej, obliczenia można czy należy wykonywać *różnymi sposobami*. Można się w nich dopatrzeć nawet zachęty do rozwijania zaradności arytmetycznej dzieci: *porównywanie sum typu $18 + 46$ $20 + 46$* – ta pierwsza jest o 2 mniejsza od drugiej, a druga jest łatwa do policzenia, czyli $66 - 2 = 64$.

W kolejnych podstawach, być może ze względu na ich zwięzłość, nie ma najmniejszego sygnału, ani w treściach, ani w celach kształcenia czy zadaniach szkoły (por. wcześniej), co jest ważne przy rozwijaniu *rachunków*, na co powinno się zwracać uwagę, żeby efekty były zgodne z oczekiwaniami. Natomiast styl podstawy z roku 2008 jest szczególnie niepokojący. Czytając ją dosłownie, dowiadujemy się, że uczeń nie musi znać działania mnożenia, nie mówiąc już o rozumieniu jego istoty czy własności, gdyż jego zadaniem jest *podawanie z pamięci iloczynów w zakresie tabliczki mnożenia*. Jak na dokument programowy początku XXI wieku zapis wręcz szokujący. I jeśli nawet intencje były inne, to „przekaznik jest przekazem”. W mej opinii **tego typu sformułowania i kryjąca się za nią, potencjalnie, filozofia rozwijania umiejętności dzieci, cofają nas w zamierzczłą edukacyjną przeszłość**. Matematyka, także ta szkolna, nie jest nauką o deklamowaniu tabliczki mnożenia¹³⁵.

Kilkakrotnie już wspominałem o tym, że najważniejszym obszarem edukacji matematycznej w szkole podstawowej, także więc w klasach 1-3, jest czy powinno być rozwiązywanie zadań tekstowych. Zobaczmy, jak zmieniało się podejście do rozwiązywania zadań tekstowych w podstawach programowych (por. tabela 9.).

Tabela 9. Treści kształcenia dotyczące rozwiązywania zadań tekstowych w mini-mach i podstawach programowych w latach 1992-2008.

Zadania tekstowe	
Dokument prawny	Treści kształcenia /umiejętności i kompetencje
Minimum programowe z dnia 18.08.1992	Zadania tekstowe: <ul style="list-style-type: none"> – stopniowe zaznajamianie z budową zadań tekstowych, – dostrzeganie, co w zadaniu jest dane, co jest poszukiwane i jakie są zależności między tymi wielkościami, – rozwiązywanie prostych zadań tekstowych (różnymi metodami), – układanie zadań do praktycznej sytuacji, do rysunku, do schematu, do pytania, do odpowiedzi oraz do działania arytmetycznego, – przekształcanie zadań, – zadania tekstowe o dwóch działaniach (np. dodawanie i mnożenie), – zadania dotyczące ilości, ceny i wartości.

¹³⁵ W tym miejscu odsyłam do publikacji wybitnych dydaktyków matematyki, np. Hansa Freudenthala (1973, 1978, 1991) czy Zofii Krygowskiej (1986).

<p>Projekt podstawy programowej wersja z dnia 19.11.1992</p>	<p>Zadania tekstowe jednodziałaniowe (klasa I). Poznawanie konwencji tekstowego zadania matematycznego; stopniowe przechodzenie od zadań dotyczących przedmiotów dostępnych manipulacji i obserwacji poprzez zadania rysunkowo-słowne, do zadań czysto tekstowych (opowiadanych lub czytanych przez nauczyciela). Rozróżnianie w zadaniu liczb danych i szukanych oraz dostrzeganie związków między nimi. Rozwiązywanie zadań przez symulację ich treści na konkretach (kasztanach, patyczkach itp.) i przez wykonywanie odpowiednich działań na liczbach. Układanie zadań do konkretnych sytuacji lub rysunków oraz do danych działań arytmetycznych. Wykorzystanie równań z okienkami do rozwiązywania zadań. Dodawanie i odejmowanie (klasa II). Rozwiązywanie zadań tekstowych złożonych. Mnożenie i dzielenie (klasa II). Rozwiązywanie zadań tekstowych z użyciem jednego lub dwóch działań. Mnożenie i dzielenie w zakresie 100 (klasa III). Rozwiązywanie i układanie zadań tekstowych; rozbudowywanie zadań prostych w złożone.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 15.05.1997</p>	<p>Umiejętności i kompetencje: Matematyzowanie sytuacji konkretnych; rozwiązywanie nietrudnych zadań tekstowych podanych ustnie, rysunkiem lub na piśmie.</p>
<p>Projekt podstawy programowej 1998</p>	<p>Matematyzowanie sytuacji konkretnych; rozwiązywanie zadań tekstowych podanych ustnie, rysunkiem lub na piśmie.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 15.02.1999</p>	<p>Matematyzowanie sytuacji konkretnych, rozwiązywanie zadań tekstowych jednodziałaniowych i łatwych zadań złożonych.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 23.08.2007</p>	<p>Rozwiązywanie zadań tekstowych wymagających wykonania jednego działania (w tym zadań na porównywanie różnicowe i zadań dotyczących ilości, ceny i wartości).</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 24.12.2008</p>	<p>Uczeń kończący klasę I: w zakresie liczenia i sprawności rachunkowych: zapisuje rozwiązanie zadania z treścią przedstawionego słownie w konkretnej sytuacji, stosując zapis cyfrowy i znaki działań; Uczeń kończący klasę III: rozwiązuje zadania tekstowe wymagające wykonania jednego działania (w tym zadania na porównywanie różnicowe, ale bez porównywania ilościowego).</p>

I znów warto, przede wszystkim, zestawić dwa początkowe dokumenty z dwoma końcowymi. W tych pierwszych mamy ewidentne nawiązanie do heurystyki G. Polya¹³⁶: *dostrzeganie, co w zadaniu jest dane, co jest poszukiwane i jakie są zależności między tymi wielkościami*, a ponadto ponowną sugestię pluralizmu stosowanych metod rozwiązywania zadań.

¹³⁶ Polya G. 1990, 1993.

W tych ostatnich mamy oczekiwanie, że wszystkie dzieci będą rozwiązywać zadania dokładnie w ten sam sposób: *stosując zapis cyfrowy i znaki działań* – i to już na początku swojej matematycznej przygody.

Rozwiązanie zadania tekstowego za pomocą symbolicznego obliczenia to najtrudniejszy sposób jego rozwiązania, wymagający od dziecka bardzo zaawansowanej matematyzacji. Dzieci w tym wieku mają różny poziom gotowości do świadomego operowania symbolami. Jak pokazują badania (por. rozdział I), zapis symboliczny może być dla nich znacznie trudniejszy niż nam się wydaje. Wpychanie dzieci na starcie ich edukacji matematycznej w rozwiązanie arytmetyczne grozi nasileniem zjawiska, które dość powszechnie obserwuje się także dziś (por. rozdział I) – dzieci dobierają działania do zadań nie odwołując się do zależności opisanej w treści, lecz patrząc na liczby i słowa-klucze występujące w treści. Zjawisko to może się w wyniku respektowania tego zapisu podstawy jeszcze bardziej nasilić. Zadanie tekstowe powinny rozwiązywać za pomocą odpowiedniego obliczenia te dzieci, które są do tego już gotowe, reszta (często bardzo liczna) powinna to robić symulacyjnie czy rysunkowo. Najważniejsze bowiem jest to, żeby dziecko samodzielnie znalazło odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie, a nie przepisało z tablicy czy od kolegi jakieś działanie¹³⁷.

I druga, rzucająca się w oczy zmiana – **aktualnie oczekujemy, że uczniowie kończąc klasę trzecią będą rozwiązywać takie zadania tekstowe, z jakimi radzili sobie pierwszoklasiści 20 lat temu**. Jest to tym groźniejsze, że jak pokazuje np. dyskusja tocząca się wokół matematycznych zadań z badań OBUT 2011 i 2012 wielu przedstawicieli organów prowadzących, dyrektorów szkół, nauczycieli a także rodziców jest przekonanych, że nie wolno(!) wykraczać poza podstawę programową. Przy takim podejściu zadanie: *Ania ma 2 jabłka, a Ola o 3 więcej. Ile mają ich razem?* powinno pojawić się dopiero w klasie czwartej.

¹³⁷Co więcej, praktyka pokazuje, że wiele z zadań pojawiających się w klasach 1-3 daje się rozwiązać w pamięci – czy to ze względu na swoją prostotę, czy też dobre uchwycenie zależności pomiędzy informacjami podanymi w treści, domaganie się w takiej sytuacji obliczeń dodatkowo zniekształca proces rozwiązywania zadania.

Ważnym obszarem w większości analizowanych dokumentów i bogato reprezentowanym są umiejętności praktyczne (por. tabela 10.).

Tabela 10. Treści kształcenia dotyczące zastosowań praktycznych w minimach i podstawach programowych w latach 1992-2008.

Zastosowania praktyczne	
Dokument prawny	Treści kształcenia /umiejętności i kompetencje
Minimum programowe z dnia 18.08.1992	<p><i>Wiadomości i umiejętności praktyczne:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – odczytywanie godzin na zegarze, – nazwy dni tygodnia i ich kolejność, – rodzaje pieniędzy: banknoty i monety, liczenie pieniędzy, płacenie, – stopniowe wprowadzanie jednostek długości (centymetr, metr), jednostek używanych przy ważeniu (dekagram, kilogram) i jednostki pojemności (litr), – wdrażanie uczniów do posługiwania się skrótami nazw jednostek, – zamiana złotych na grosze i odwrotnie, – jednostki czasu: doba, godzina, minuta, odczytywanie wskazań zegara, zadania dotyczące czasu, – praktyczne zapoznanie się z kalendarzem, pisanie dat, – znaki rzymskie I-XII, – różnorodne zadania i ćwiczenia związane z miarą długości, masy i pojemności, – powtórzenie obliczeń zegarowych i kalendarzowych (z godzinami i minutami), sekundy, – zadania dotyczące ilości, ceny i wartości.
Projekt podstawy programowej wersja z dnia 19.11.1992	<p><i>Wiadomości i umiejętności praktyczne</i> (klasa I). Odmierzanie ilości płynu (np. za pomocą szklanki), litr. Ważenie za pomocą wagi szalkowej; kilogram. Obserwowanie upływu czasu (np. z użyciem klepsydry); odczytywanie godzin na zegarze. Nazwy kolejnych dni tygodnia. Kupno-sprzedaż: płacenie żetonami, imitacjami pieniędzy itp.</p> <p><i>Wiadomości i umiejętności praktyczne</i> (klasa II). Mierzenie długości, pojemności, masy; metr jako 100 centymetrów, kilogram jako 100 dekagramów. Dodawanie i odejmowanie takich wielkości w konkretnych sytuacjach. Znaki rzymskie I-XII. Praktyczne zapoznanie się z kalendarzem. Odczytywanie wskazań zegara (godziny, minuty); łatwe zadania dotyczące godzin. Odczytywanie wskazań termometru. Kupno-sprzedaż: praktyczne zapoznanie się z pieniędzmi, rozmiennianie banknotów.</p> <p><i>Wiadomości i umiejętności praktyczne</i> (klasa III). Mierzenie długości (także obwodów prostokątów i trójkątów); kilometr (pomiar w terenie), milimetr; problem dokładności pomiaru.</p> <p>Posługiwanie się wyrażeniami dwumianowanymi typu 3 m 47 cm = 347 cm. Mierzenie masy; brutto, netto. Obliczenia zegarowe z godzinami i minutami; sekundy. Proste obliczenia kalendarzowe. Odczytywanie wskazań termometru. Kupno-sprzedaż: cena, wartość, obliczenia pieniężne.</p>
Podstawa programowa z dnia 15.05.1997	<p>Treści: Mierzenie, ważenie, obliczenia pieniężne, kalendarz.</p> <p>Umiejętności i kompetencje: Dokonywanie praktycznych obliczeń dotyczących kalendarza, zegara, długości, ciężaru i pieniędzy, także związanych z samodzielnie wykonanymi pomiarami.</p>

<p>Projekt podstawy programowej 1998</p>	<p>Samodzielne wykonywanie pomiarów oraz dokonywanie prostych obliczeń dotyczących kalendarza, zegara, długości, ciężaru, pieniędzy i mapy.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 15.02.1999</p>	<p>mierzenie, ważenie, obliczenia pieniężne, kalendarz.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 23.08.2007</p>	<p>mierzenie długości, szerokości, wysokości przedmiotów oraz ich odległości z użyciem różnych jednostek i miarek; stosowanie jednostek: centymetr, metr (bez zamieniania jednostek w obliczeniach), ważenie przedmiotów i odmierzanie płynów z użyciem jednostek: dekagram, kilogram (użycie pojęcia: pół kilograma), odmierzanie płynów za pomocą szklanki, butelki, garnka (użycie pojęć: pół i ćwierć litra), obliczenia pieniężne w zakresie 100 zł, kalendarz: a) nazywanie dni tygodnia i miesiący oraz znajomość ich kolejności, b) odczytywanie i zapisywanie czasu w systemie 12- i 24-godzinnym, c) stosowanie pojęć: minuta, godzina, pół godziny, d) zapisywanie i porządkowanie chronologicznie dat (dni i miesiące), e) odczytywanie i zapisywanie liczb rzymskich od I do XII, f) wykonywanie prostych obliczeń kalendarzowych (w zakresie pełnych miesięcy) i zegarowych (w zakresie pełnych godzin), mierzenie temperatury, odczytywanie wskazań termometru bez posługiwania się liczbami ujemnymi.</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 24.12.2008</p>	<p>Uczeń kończący klasę I: <i>w zakresie pomiaru:</i> a) długości: mierzy długość, posługując się np. linijką; porównuje długości obiektów, b) ciężaru: potrafi ważyć przedmioty; różnicuje przedmioty cięższe, lżejsze; wie, że towar w sklepie jest pakowany według wagi, c) płynów: odmierza płyny kubkiem i miarką litrową, d) czasu: nazywa dni w tygodniu i miesiące w roku; orientuje się, do czego służy kalendarz, i potrafi z niego korzystać; rozpoznaje czas na zegarze w takim zakresie, który pozwala mu orientować się w ramach czasowych szkolnych zajęć i domowych obowiązków; <i>w zakresie obliczeń pieniężnych:</i> a) zna będące w obiegu monety i banknot o wartości 10 zł; zna wartość nabywczą monet i radzi sobie w sytuacji kupna i sprzedaży, b) zna pojęcie długu i konieczność spłacenia go. Uczeń kończący klasę III: mierzy i zapisuje wynik pomiaru długości, szerokości i wysokości przedmiotów oraz odległości; posługuje się jednostkami: milimetr, centymetr, metr; wykonuje łatwe obliczenia dotyczące tych miar (bez zamiany jednostek i wyrażeń dwumianowanych w obliczeniach formalnych); używa pojęcia kilometr w sytuacjach życiowych, np. jechaliśmy autobusem 27 kilometrów (bez zamiany na metry);</p>

	<p>waży przedmioty, używając określeń: kilogram, pół kilograma, dekagram, gram; wykonuje łatwe obliczenia, używając tych miar (bez zamiany jednostek i bez wyrażeń dwumianowanych w obliczeniach formalnych); odmierza płyny różnymi miarkami; używa określeń: litr, pół litra, ćwierć litra; odczytuje temperaturę (bez konieczności posługiwania się liczbami ujemnymi, np. 5 stopni mrozu, 3 stopnie poniżej zera); odczytuje i zapisuje liczby w systemie rzymskim od I do XII; podaje i zapisuje daty; zna kolejność dni tygodnia i miesięcy; porządkuje chronologicznie daty; wykonuje obliczenia kalendarzowe w sytuacjach życiowych; odczytuje wskazania zegarów: w systemach: 12- i 24-godzinnych, wyświetlających cyfry i ze wskazówkami; posługuje się pojęciami: godzina, pół godziny, kwadrans, minuta; wykonuje proste obliczenia zegarowe (pełne godziny).</p>
--	---

Jak widać, tematycznie zapisy są zbliżone: odległość, masa, czas, obliczenia pieniężne, ... Podobieństw zresztą jest więcej, np. we wszystkich dokumentach pomija się fakt, że na co dzień różne wielkości: ceny, odległości, masy, ba nawet niekiedy czas¹³⁸ podawane są w zapisie dziesiętnym. Pod tym względem szkoła konsekwentnie nie nadąża za codziennością.

Oryginalnych sformułowań raczej nie ma, no może z wyjątkiem: *kilometr (pomiar w terenie)*.

I znowu, najwięcej wątpliwości budzą we mnie zakazy „przemycane” w aktualnej podstawie programowej. Jaki sens praktyczny, a o zastosowaniach praktycznych właśnie mówimy, ma wykonywanie obliczeń na pełnych godzinach? Kto na co dzień posługuje się zegarkiem z jedną wskazówką? Zresztą analogiczny zapis dotyczący klasy I wydaje się bogatszy: *rozpoznaje czas na zegarze w takim zakresie, który pozwala mu orientować się w ramach czasowych szkolnych zajęć i domowych obowiązków*.

Wprowadzone w innych miejscach ograniczenia teraz dają znać o sobie – uczeń nie może zamienić 27 km na metry, choć jest to banalnie prosta czynność, co więcej niezbędna, żeby zrozumieć używany przez nas system miar, a także służąca budowaniu rozumienia systemu dziesiętnego, ponieważ w jego oficjalnym „słowniku liczb” nie ma liczby 27.000 – jest ona na to za duża. Zresztą w tego typu pułapki wpadamy częściej, np. w pierwszej klasie zakres liczb jest ograniczony do 20, ale równocześnie dziecko ma korzystać z kalendarza, gdzie każdy miesiąc ma więcej niż 20 dni itd.

¹³⁸ Rekord świata mężczyzn na 100 metrów wynosi aktualnie 9,58 s.

Dlaczego dziecko nie może w obliczeniach operować wyrażeniami dwumianowanymi, przecież rzadko który faktycznie wykonywany pomiar daje pełne jednostki? Natomiast zamiany jednostek pozwalają zrozumieć ich wzajemne związki, a dzięki temu strukturę i sens systemów miar, którymi się posługujemy poza szkołą.

Edukacja zakazów, zwłaszcza: edukacja matematyczna zakazów nie może się sprawdzić. I jak te zakazy pogodzić np. z celami kształcenia ze wstępu do postawy programowej, zwłaszcza ze *zdobyciem przez uczniów umiejętności wykorzystywania posiadanych wiadomości podczas wykonywania zadań i rozwiązywania problemów?*

Zdecydowanie nieobecna w naszych kilku ostatnich podstawach programowych na tym etapie kształcenia jest geometria (por. tabela 11.). Kilka z analizowanych dokumentów nie wykracza poza sztamkowe: *rozpoznawanie i nazywanie trójkąta, kwadratu, prostokąta i koła*, czyli umiejętności, z którymi ogromna większość uczniów już przychodzi do szkoły. Zdecydowanie więcej treści geometrycznych pojawia się w początkowych dokumentach – mamy w nich np. odniesienia do brył czy intuicje pola wielokąta. W wielu krajach świata na początkowym etapie poznawania geometrii dzieci operują właśnie przede wszystkim bryłami, to ich modele widzą codziennie wokół siebie, to ich modele najłatwiej jest badać.

W projekcie podstawy z 1992 roku warto odnotować także *próby dostrzeżenia prawidłowości geometrycznych* związanych z wykorzystywanymi figurami i tworzonymi ornamentami.

Znowu uwagę zwracają niektóre ograniczenia z dwóch ostatnich podstaw, np.: *mierzenie długości boków (w pełnych centymetrach)*. A jeśli długości boków nie wyrażają się pełnymi centymetrami? Czy w czynności mierzenia coś się zmienia? A w procedurze obliczania obwodu? Co najwyżej może pojawić się trudność obliczeniowa do pokonania – okazja do zastosowania posiadanej wiedzy.

Dobrym pomysłem natomiast jest nawiązanie w roku 2008 do symetrii – jednego z najważniejszych pojęć matematycznych oraz do intuicji skali: *rysuje figury w powiększeniu i pomniejszeniu*. Oba te tematy dają uczniom okazję do ciekawych i kształcących działań.

Tabela 11. Treści kształcenia dotyczące zagadnień geometrycznych w minimach i podstawach programowych w latach 1992-2008.

Geometria	
Dokument prawny	Treści kształcenia /umiejętności i kompetencje
Minimum programowe z dnia 18.08.1992	<p><i>Proste figury geometryczne:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – zaznajamianie z kształtami i nazwami podstawowych figur: koła, prostokąta, kwadratu, trójkąta, czworokąta, pięciokąta itp., – rozpoznawanie figur w otoczeniu, na obrazach sytuacyjnych oraz odnajdywanie na prostych bryłach, – rysowanie różnych figur płaskich za pomocą szablonów lub układanie ich z patyczków, – mierzenie odcinków za pomocą linijki z podziałką centymetrową, rysowanie odcinka o danej liczbie centymetrów, – porównywanie długości odcinków, – rozpoznawanie odcinków i ścian prostopadłych i odcinków oraz ścian równoległych w otoczeniu, na modelach brył i figur płaskich (wykorzystanie geoplanu, kratek w zeszytcie, ekierki i dwukrotnie zgiętej kartki), – liczba kwadratów jednostkowych w danym prostokącie, – mierzenie długości odcinków, obliczanie obwodu prostokąta, trójkąta i kwadratu.
Projekt podstawy programowej wersja z dnia 19.11.1992	<p><i>Figury geometryczne (klasa I).</i> Zaznajamianie z kształtami i nazwami prostych figur (trójkąt, kwadrat, prostokąt, koło); rozpoznawanie ich w otoczeniu, układanie, wycinanie, zginanie, dopasowywanie itp.</p> <p><i>Geometria (klasa II).</i> Rysowanie odcinków o zadanej długości. Konstruowanie (układanie, rysowanie itp.) figur z jednakowych kwadratów (kratek w zeszytcie, kafelków itp.); obliczanie liczby kwadratów w takich figurach (szczególnie prostokątach). Wycinanie, rysowanie i kolorowanie figur, komponowanie z nich innych figur i ornamentów; próby dostrzeżenia prawidłowości geometrycznych.</p> <p><i>Geometria (klasa III).</i> Konstruowania linii prostopadłych i linii równoległych przez zginanie kartki, obrysowywanie ekierki lub obu stron linijki itp. Ćwiczenia przygotowujące pojęcie ułamka: rozcinanie figur płaskich, zamalowywanie części itp. Poznawanie kształtów brył.</p>
Podstawa programowa z dnia 15.05.1997	<p><i>Treści:</i></p> <p>Podstawowe kształty geometryczne na konkretnych przykładach, szkicowanie prostych sytuacji geometrycznych.</p> <p>Obserwacje cykli i regularności w otoczeniu i matematyce.</p> <p><i>Umiejętności i kompetencje:</i></p> <p>Rozpoznawanie podstawowych kształtów geometrycznych.</p>
Projekt podstawy programowej 1998	Rozpoznawanie podstawowych kształtów geometrycznych.
Podstawa programowa z dnia 15.02.1999	figury geometryczne, w tym trójkąt, kwadrat, prostokąt, koło.

<p>Podstawa programowa z dnia 23.08.2007</p>	<p>figury geometryczne: a) mierzenie długości odcinków i rysowanie za pomocą linijki odcinków o danej długości, b) rozpoznawanie i nazywanie trójkąta, kwadratu, prostokąta i koła, c) mierzenie długości boków (w pełnych centymetrach) i obliczanie obwodu trójkąta, kwadratu, prostokąta,</p>
<p>Podstawa programowa z dnia 24.12.2008</p>	<p><i>Uczeń kończący klasę III:</i> rozpoznaje i nazywa koła, kwadraty, prostokąty i trójkąty (również nietypowe, położone w różny sposób oraz w sytuacji, gdy figury zachodzą na siebie); rysuje odcinki o podanej długości; oblicza obwody trójkątów, kwadratów i prostokątów (w centymetrach); rysuje drugą połowę figury symetrycznej; rysuje figury w powiększeniu i pomniejszeniu; kontynuuje regularność w prostych motywach (np. szlaczki, rozety).</p>

Na koniec przyjrzymy się także niektórym innym treściom, które pojawiały się w poszczególnych dokumentach. Ponownie najwięcej ich w najstarszym dokumencie – minimum programowym z roku 1992, w którym poświęcono np. nieco miejsca ułamkom zwykłym i równaniom:

Ułamki o mianownikach nie przekraczających 10:

- połowa – podział na dwie równe części,
- ćwierć – podział na cztery równe części,
- zamiany jednostek (np. 50 cm = $\frac{1}{2}$ m),
- proste zadania z użyciem słów „półtora”, „dwa i pół” itd.,
- przykłady ułamków o mianownikach 2, 3, 4 itd.,
- porównywanie ułamków na konkretach w bardzo prostych przypadkach (np. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$),
- dodawanie i odejmowanie ułamków, przykłady obliczania ułamka danej liczby.

Równania:

- pojęcie liczby niewiadomej, symbol literowy (np. x),
- rozwiązywanie prostych równań,
- układanie zadań do danego równania,
- rozwiązywanie równań typu: $x + 15 = 48$, $15 + x = 48$, $x - 5 = 37$ wraz z układaniem i rozwiązywaniem odpowiednich zadań tekstowych.

Ciekawe sformułowania, dające uczniom szansę do samodzielnej działalności – także o charakterze badawczym, znaleźć można w podstawie z roku 1997:

Porządkowanie i rejestrowanie danych empirycznych.

Obserwacje cykli i regularności w otoczeniu i matematyce.

Jak widać, 20 lat temu mieliśmy wyraźnie większe oczekiwania w stosunku do trzecioklasistów niż aktualnie. Stopniowo, eliminowaliśmy z zapisów podstaw kolejne treści, niektóre – w mej opinii – słusznie, inne nie, doprowadzając do sytuacji, w której już, faktycznie, niewiele ich zostało.

Mam świadomość, że aktualna podstawa programowa jest „pomyślana” dla dzieci, które w wieku 6 lat rozpoczynają naukę w klasie 1. Musimy jednak pamiętać o tym, że:

- przez ostatnie dwadzieścia lat zmieniło się nasze życie codzienne, m.in. upowszechniły się komputery, kalkulatory, komórki, Internet i dostęp do niego, a wiedza nieformalna dzieci jest zdecydowanie bogatsza niż było to wcześniej,
- trzecia klasa to czwarty(!) rok nauki dzieci w systemie szkolnym,
- a cały cykl kształcenia nie zmienił swojej długości, zatem to, co „wypadło” z klas 1-3, musi „wpaść” w kolejnych latach, co może być znacznie trudniejsze niż się wydaje.

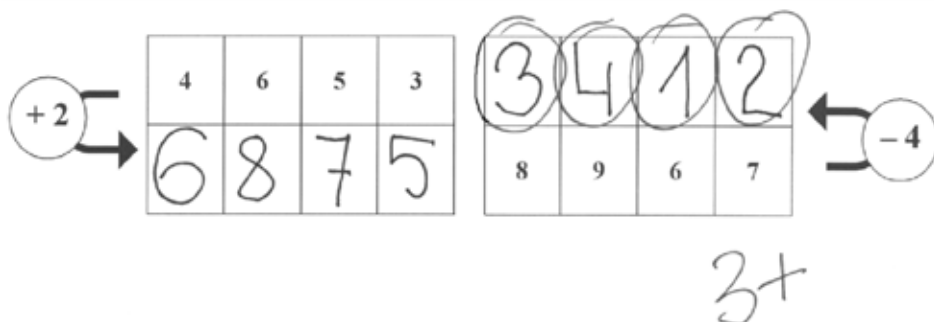
A ponadto, wciąż naukę w naszym kraju rozpoczynają w ogromnej większości dzieci siedmioletnie, którym proponujemy trzy lata ewidentnego rozleniwiania intelektualnego.

Jeśli przyjmiemy, że najważniejszy prawny dokument programowy, czyli *podstawy programowe kształcenia ogólnego*, jest odbiciem oczekiwań Państwa (społeczeństwa?) w stosunku do systemu szkolnego, to sposób pracy obserwowanych nauczycieli (rozdział II) staje się zdecydowanie bardziej zrozumiały¹³⁹.

¹³⁹O pozorach podmiotowości polskiego nauczyciela wczesnej edukacji pisała Dorota Klus-Stańska (por. 2005, 2010).

W RAMACH PODSUMOWANIA

Mniej więcej w czasach, gdy obowiązywało w naszej szkole minimum programowe analizowane w poprzednim rozdziale któregoś dnia mój syn, który od miesiąca czy dwóch był uczniem pierwszej klasy szkoły podstawowej przyniósł ze szkoły tak wyglądającą klasówkę z matematyki¹⁴⁰:



Nauczycielka sprawdziła zadanie, zaznaczyła błędy i postawiła ocenę. Uczeń wszystkie dodawania wykonał dobrze, wszystkie odejmowania źle, czyli nie umie odejmować. Musi się nauczyć i tyle.

A może jednak coś jeszcze można „odczytać” z tej klasówki?

Gdy syn mi ją pokazał, uderzyło mnie to, że wszystkie wyniki odejmowania są o 1 mniejsze od właściwego wyniku. Przypadek?

- *Jak to liczyłeś, synku?* – spytałem.
- *Jak to jak, na palcach.* – odpowiedział syn.
- *No to mi pokaż, jak to robiłeś.* – poprosiłem.

I pokazał na przykładzie pierwszego odejmowania. Najpierw odliczył 8 palców, prostując je, po czym zgiął z powrotem 3 i zostały mu 4 wyprostowane. Dlaczego? Bo odliczanie zaczął nie od ósmego palca, tylko od siódmego. Postąpił więc analogicznie, jak przy dodawaniu na palcach – dodając, dolicza się, zaczynając od następnego palca. Mój syn odejmując – odliczał, zaczynając od poprzedniego. **Stworzył, przez analogię, własną strategię odejmowania na palcach.** Tyle że na razie(!) błędną. Mniej więcej 30 sekund później strategia działała już właściwie.

¹⁴⁰ Dąbrowski M. 2009f.

Nieświadomie (wówczas jeszcze) zastosowałem strategię postępowania, którą proponuje posługiwać się w takich sytuacjach australijski dydaktyk G. Booker¹⁴¹:

1. zidentyfikuj strategię dziecka,
2. ustal źródła trudności,
3. doprowadź do uświadomienia sobie przez dziecko nieadekwatności jego strategii,
4. stwórz warunki do odkrycia przez dziecko właściwej strategii lub¹⁴² pokaż mu ją,
5. stwórz warunki do zastosowania nowej strategii w bardziej złożonych sytuacjach.

Trzeba by tę listę poprzedzić jeszcze jednym punktem: **pozwól dziecku mówić i z uwagą wysłuchaj, co ma do powiedzenia.**

Od chwili urodzenia¹⁴³ dziecko bada otaczający świat, buduje i weryfikuje różne strategie postępowania. Dokładnie tak samo postępuje ucząc się matematyki – tworzy własne strategie pokonywania trudności. Można nawet rzec, na bazie przykładów przytoczonych w rozdziale I, że jest to normalna ich działalność – także, a może nawet zwłaszcza wtedy, jak pokazują badania, gdy nie rozumieją strategii czy metody proponowanej albo wręcz narzucanej przez nauczyciela. Cała gama takich strategii towarzyszy szkolnemu rozwiązywaniu zadań tekstowych i wykonywaniu obliczeń. Część z nich, budowana na bazie zauważonej analogii czy zbyt pośpiesznego uogólnienia, to strategie – z matematycznego punktu widzenia – błędne. A ponieważ w naszej rzeczywistości szkolnej nie mamy zwyczaju słuchania dzieci, istnienie tych strategii nam umyka, nie możemy więc, nawet gdybyśmy chcieli, w porę ich skorygować.

W roku 2011 po raz pierwszy Polska wzięła udział w badaniu TIMSS¹⁴⁴, dotyczącym wiedzy matematycznej i przyrodniczej dzieci w czwartym roku zorganizowanej nauki¹⁴⁵. Ich wyniki bardzo dobrze dopełniają obraz nauczania matematyki w klasach 1-3 wyłaniający się z badań krajowych:

- polscy uczniowie w obszarze wiedzy matematycznej zajęli ostatnie miejsce wśród państw europejskich, wypadając słabiej nie tylko od dzieci z innych eu-

¹⁴¹ Booker G. 1989.

¹⁴² ... w ostateczności ...

¹⁴³ Gopnik, A., Kuhl, P. K., Meltzoff, A. N. 2004.

¹⁴⁴ Por. Konarzewski K. 2012.

¹⁴⁵ W Polsce, ze względu na obowiązkową klasę zerową, w badaniu wzięli udział uczniowie kończący klasę trzecią.

ropejskich krajów nieco od nich starszych, ale także od uczniów w tym samym wieku, czy nawet nieco młodszych;

- okazało się, że polskie programy nauczania zawierają jedynie $\frac{1}{3}$ treści matematycznych objętych badaniem, co daje nam w tym rankingu ostatnie, pięćdziesiąte, miejsce wśród krajów biorących udział w badaniu;
- nasi uczniowie najlepiej wypadli w tych obszarach matematyki, z którymi nie mieli kontaktu podczas zajęć szkolnych, albo mieli kontakt bardzo ograniczony;
- gdy wyniki zostaną ograniczone jedynie do tych treści matematycznych, które pojawiały się w szkole, nasi uczniowie spadają z 34 miejsca na 35.

Badania TIMSS pokazują, że mamy dzieci o dużych możliwościach oraz sporej wiedzy pozaszkolnej i bardzo nieefektywny sposób nauczania matematyki w szkole – czyli pokazują dokładnie to samo, co i badania krajowe.

Dzieci myślą i to znacznie intensywniej niż sądzimy, ale my w to nie wierzymy (por. rozdziały II i III), więc bezpowrotnie tracimy szansę wykorzystania potencjału w nich tkwiącego.

- *Trudne, bo trzeba myśleć?*
- *Nie! Łatwe, jeśli mogę myśleć po swojemu.*

Rozmawiajmy z dziećmi o matematyce i zachęcajmy do tego, żeby rozmawiały na ten temat z sobą. Tak niewielka zmiana, a tak wiele może zmienić.

BIBLIOGRAFIA

- Bartnik E., Konarzewski K., Kowalczykowska A., Marciniak Z., Merta T., *Podstawa programowa kształcenia ogólnego. Projekt*. ISP, Warszawa 2005.
- Booker G. (1989), *Rola błędów w konstrukcji matematycznej wiedzy*, *Dydaktyka Matematyki* 11, s. 99-108, Warszawa: PWN.
- Council of Europe (1996), *Key Competences for Europe*. Report of the Symposium (Bern, March 27-30, 1996), DECS/SE/Sec-(96)-43. Strasbourg: Council of Europe.
- Dagiel M., Żytko M. (red.) (2009), *Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?* Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dagiel M., Żytko M. (red.) (2011), *Szkolne rzeczywistości uczniów klas trzecich w środowisku wiejskim*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M. (2008), *Pozwólmy dzieciom myśleć! O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów*. Wydanie II zmienione. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M. (red.) (2009a), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M. (2009b), *Umiejętności matematyczne uczniów kończących klasę trzecią. Wykonywanie obliczeń*. W: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M. (2009c), *Umiejętności matematyczne uczniów kończących klasę trzecią. Rozwiązywanie zadań tekstowych*. W: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M. (2009e), *Edukacyjna codzienność klasy trzeciej*. W: Dagiel M., Żytko M. (red.), *Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?* Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M. (2009f), *Błędy uczniów jako źródło refleksji nauczyciela – na podstawie badań umiejętności matematycznych polskich trzecioklasistów*. W: Hurlo L., Klus-Stańska D., Łojko M. (red.), *Paradygmaty współczesnej dydaktyki*. Kraków: Wydawnictwo Impuls.
- Dąbrowski M. (red.) (2011a), *Trzecioklasiści 2010. Raport z badań ilościowych*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M. (2011b), *Umiejętności matematyczne uczniów kończących klasę trzecią. Wykonywanie obliczeń, w tym w sytuacjach praktycznych*. W: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasiści 2010. Raport z badań ilościowych*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M. (2011c), *Umiejętności matematyczne uczniów kończących klasę trzecią. Rozwiązywanie zadań tekstowych*. W: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasiści 2010. Raport z badań ilościowych*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M. (2011d), *Nauczyciele o edukacji językowej i edukacji matematycznej*. W: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasiści 2010. Raport z badań ilościowych*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M. (2011e), *Edukacyjna codzienność szkoły wiejskiej*. W: Dagiel M., Żytko M. (red.), *Szkolne rzeczywistości uczniów klas trzecich w środowisku wiejskim*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M. (2012a), *Umiejętności matematyczne uczniów kończących klasę trzecią. Rozwiązywanie zadań tekstowych*. W: Murawska B., Żytko M. (red.), *Uczeń, szkoła, dom. Raport z badań 2011*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

- Dąbrowski M. (2012b), *Umiejętności matematyczne uczniów kończących klasę trzecią. Czytanie tekstu o matematycznym charakterze*. W: Murawska B., Żytko M. (red.), *Uczeń, szkoła, dom. Raport z badań 2011*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M., Wiatrak E., (2009), *Nauczyciel nauczania początkowego w świetle ankiet*. W: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M., Wiatrak E. (2011), *Umiejętności matematyczne trzecioklasistów*. W: Pregler A., Wiatrak E. (red.), *Ogólnopolskie badanie umiejętności trzecioklasistów. Raport z badań OBUT 2011*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M., Wiatrak E. (2012a), *Umiejętności matematyczne trzecioklasistów*. W: Pregler A., Wiatrak E. (red.), *Ogólnopolskie badanie umiejętności trzecioklasistów. Raport z badań OBUT 2012*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M., Wiatrak E. (2012b), *Umiejętności matematyczne uczniów kończących klasę trzecią. Wykonywanie obliczeń, w tym rozumienie operacji arytmetycznych*. W: Murawska B., Żytko M. (red.), *Uczeń, szkoła, dom. Raport z badań 2011*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M., Wiśniewski J. (2011). *Translating Key Competences into the School Curriculum: lessons from the Polish experience*, European Journal of Education, vo. 46 nr 3, p. 323-334.
- Dąbrowski M., Żytko M. (red.) (2007a), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Raport z badania ilościowego. Cz. I*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M., Żytko M. (2007b), *Umiejętności językowe i matematyczne uczniów kończących klasę trzecią*. W: Dąbrowski M., Żytko M. (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Raport z badania ilościowego. Cz. I*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski M., Żytko M. (red.) (2008), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Konteksty szkolnych osiągnięć uczniów. Cz. II*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Freudenthal H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal H. (1978), *Weeding and Sowing. Preface to a Science of Mathematical Education*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal H. (1991), *Revisiting Mathematics Education, China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gopnik, A., Kuhl, P. K., Meltzoff, A. N. (2004). *Naukowiec w kołysce*. Poznań: Media Rodzina.
- Gravemeijer K. (1994), *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Kalinowska A. (2009), *Umiejętności matematyczne uczniów kończących klasę trzecią. Dostrzeganie i wykorzystywanie prawidłowości*. W: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Kalinowska A. (2011), *Umiejętności matematyczne uczniów kończących klasę trzecią. Czytanie tekstów matematycznych*. W: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista 2010. Raport z badań ilościowych*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Klus-Stańska D. (2005), *Mentalne zniwolenie nauczycieli wczesnej edukacji – epizod czy prawidłowość*, [w:] Problemy Wczesnej Edukacji nr 1, 55-66.
- Klus-Stańska D. (2010), *Nauczycielska tożsamość zawodowa jako konstrukt negocjowany społecznie, czyli o pozorach podmiotowości nauczyciela wczesnej edukacji*, [w:] Waloszek D. (red.) *Edukacja szkolna i wczesnoszkolna. Obszary sporów, poszukiwań, wyzwań i doświadczeń w kontekście zmian oświatowych*. Kraków: Wydawnictwo Centrum Edukacyjne Bliżej Przedszkola, 43-60.
- Konarzewski K. (2012), *Osiągnięcia szkolne polskich trzecioklasistów w perspektywie międzynarodowej. TIMSS i PIRLS 2011*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

- Kondratak B. (2009), *Analiza zależności pomiędzy badanymi umiejętnościami uczniów a zmiennymi opisującymi nauczycieli*. W: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Kondratak B. (2011), *Poglądy edukacyjne nauczycieli klas 1-3*. W: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasiści 2010. Raport z badań ilościowych*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Kreator (1998), *Kompetencje kluczowe w szkole*. Warszawa: MEN.
- Kreator (1999), *Materiały edukacyjne programu Kreator – scenariusze lekcji*. Warszawa: Wydawnictwo CODN.
- Krygowska Z. (1986), *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, *Dydaktyka Matematyki*, nr 6, s. 25-41.
- MEN (1992). *Zarządzenie Nr 23 Ministra Edukacji Narodowej z dnia 18 sierpnia 1992 roku w sprawie minimum programowego obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących*, W: *Minimum programowe przedmiotów ogólnokształcących w szkołach podstawowych i średnich obowiązujące od 1 września 1992 roku*. Warszawa: Ministerstwo Edukacji Narodowej.
- MEN (1993), *Protokół ze zjazdu uczestników II etapu prac nad zestawem podstaw programowych (minimum programowych) kształcenia ogólnego*. Warszawa.
- MEN (1997). *Zarządzenie nr 8 w sprawie podstaw programowych obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących z dnia 15.05.1997 r.* Dz.U. MEN Nr 5 poz. 23. Warszawa: Ministerstwo Edukacji Narodowej.
- MEN (1998). *Reforma systemu edukacji. Projekt*. Warszawa: WSiP.
- MEN (1999). *Załącznik do Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 lutego 1999 r.* Dz. U. nr 14, poz. 129.
- MEN (2001). *Załącznik do Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 25 maja 2001 r.*
- MEN (2003). *Załącznik do Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 6 listopada 2003 r.*
- MEN (2007). *Załącznik do Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 sierpnia 2007 r.* (Dz. U. Nr 157, poz. 1102).
- MEN (2008). *Załącznik do Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r.* (Dz. U. Nr 4, poz. 17).
- Murawska B., Żytko M (red.) (2012), *Uczeń, szkoła, dom. Raport z badań 2011*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- PISA. Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów OECD PISA. *Wyniki badania 2009 w Polsce*. Warszawa: MEN. http://www.ifispan.waw.pl/pliki/pisa_2009.pdf
- Polya G. (1954), *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.
- Polya G. (1990), *Odkrycie matematyczne*. Warszawa: PWN.
- Polya G. (1993), *Jak to rozwiązać?* Warszawa: PWN.
- Pregler A., Wiatrak E. (red.) (2011), *Ogólnopolskie badanie umiejętności trzecioklasistów. Raport z badań OBUT 2011*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Pregler A., Wiatrak E. (red.) (2012), *Ogólnopolskie badanie umiejętności trzecioklasistów. Raport z badań OBUT 2012*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Putkiewicz E. (2002), *Proces komunikowania się na lekcji*. Warszawa, Wydawnictwo APS.
- Skemp, R. R. (1976), *Relational understanding and instrumental understanding*. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Sławiński S. (1994), *Raport o reformie szkolnej 1991-1993*. Warszawa: WSiP.
- Sławiński S. (1996), *Reforma szkolna w III Rzeczypospolitej*. Warszawa: WSiP.
- Wiatrak E. (2011), *Nauczyciele o edukacji matematycznej w praktyce szkolnej*. W: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasiści 2010. Raport z badań ilościowych*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.